

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های اعداد

انسان در طول تاریخ برحسب نیاز خود از مجموعه‌های مختلف اعداد استفاده کرده است. برخی از این مجموعه‌ها که در سال‌های قبل با آنها آشنا شدیم، به شرح زیرند:

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots\}$$

مجموعه اعداد اول

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

مجموعه اعداد طبیعی

$$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

مجموعه اعداد حسابی

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

مجموعه اعداد صحیح

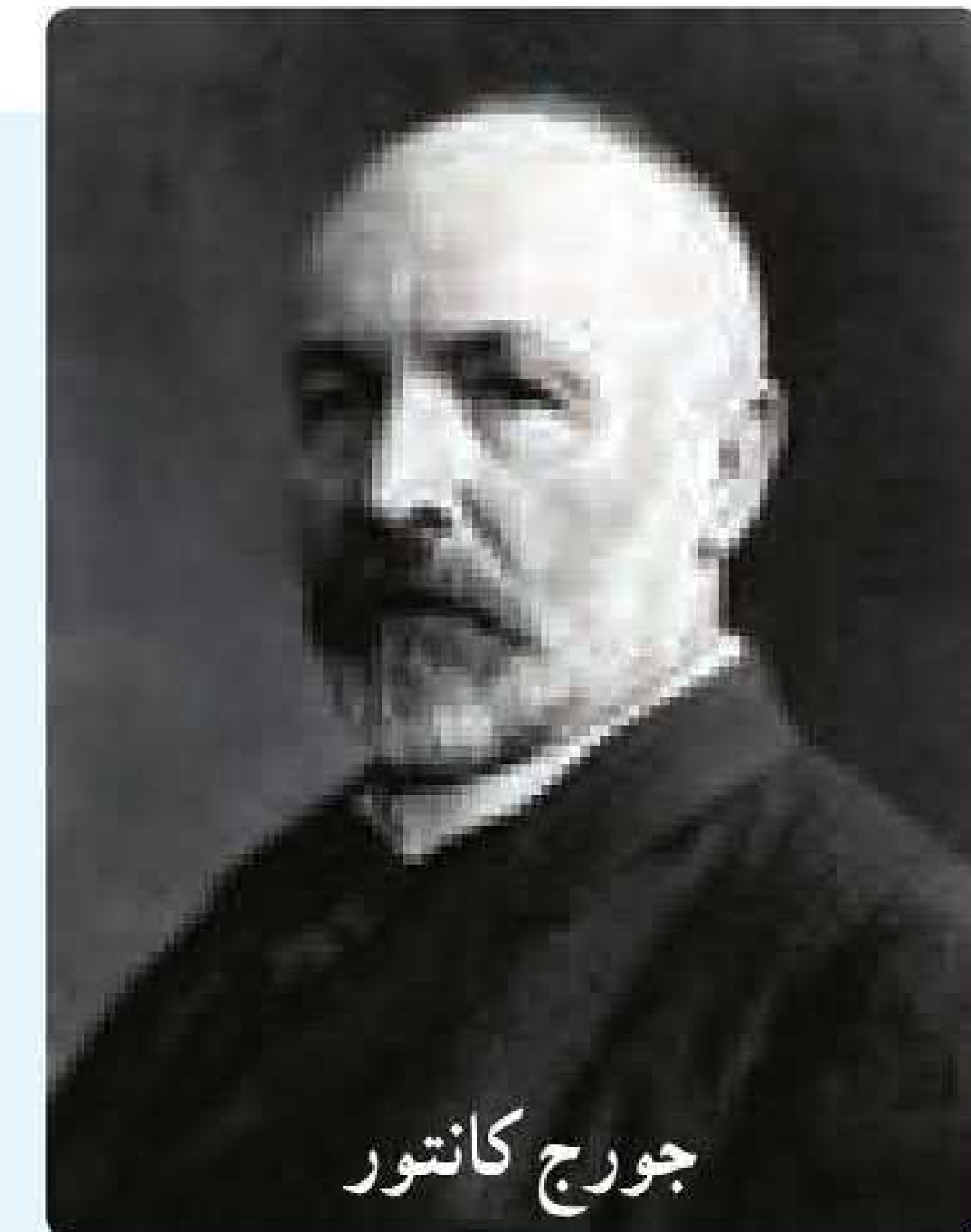
$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

مجموعه اعداد گویا

مجموعه اعدادی که نتوان آنها را به صورت Q' : مجموعه اعداد گنگ
نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.

$$\mathbb{R} = Q \cup Q'$$

مجموعه اعداد حقیقی



جورج کانتور

«مجموعه» یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضی است که بسیاری از نظریه‌های دیگر ریاضی در یک قرن اخیر بر مبنای آن پایه‌گذاری یا سازماندهی شده‌اند. مطالعات جدی دربارهٔ مجموعه‌ها با کار جورج کانتور در سال ۱۸۷۰ آغاز می‌شود.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود رابطهٔ زیرمجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به شکل $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ برقرار است. به عبارت دیگر تمام مجموعه‌های اعدادی که تاکنون با آنها آشنا شده‌ایم، زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی‌اند. در نتیجه، هر عدد دلخواهی را که در نظر بگیریم، باید جایی روی محور اعداد حقیقی داشته باشد و همچنین هر نقطه روی این محور نشان‌دهندهٔ یک عدد حقیقی مشخص است.

کاردرکلاس

۱ الف) مجموعه $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ چه نام دارد؟ آن را روی شکل مقابل هاشور بزنید و دو عضو دلخواه از آن را در ناحیهٔ هاشورخورده بنویسید. آن مجموعه‌ی اعداد گنگ است که با نماد Q' نمایش می‌دهیم در شکل هاشور قرمز زده شده است. دو عضو آن عبارتند از: $\sqrt{2}, \pi$

ب) دو عدد گویا مثال بزنید که عدد صحیح نباشند و آنها را روی شکل مقابل در محل مناسب بنویسید. $\frac{1}{2}, -1/3$

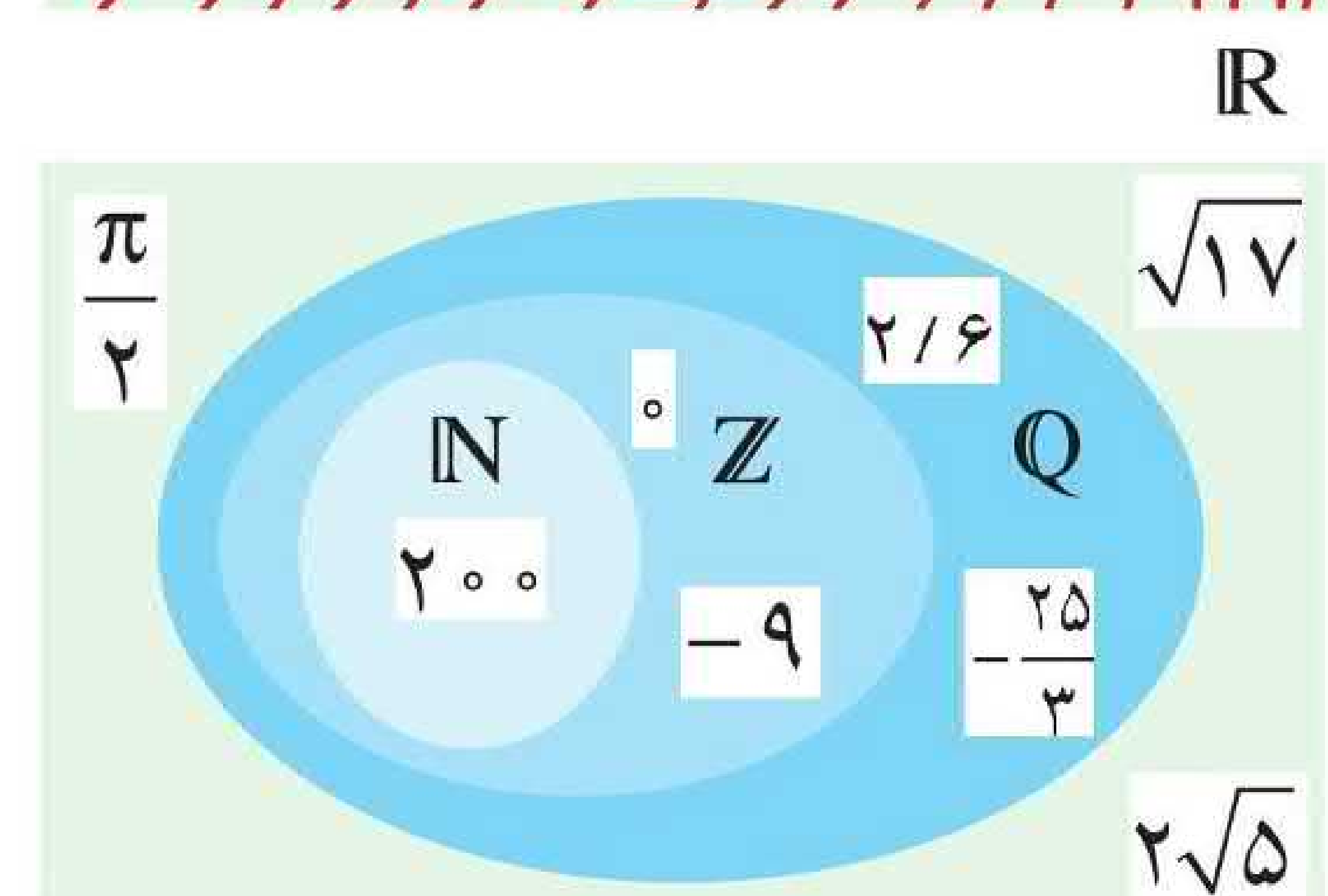
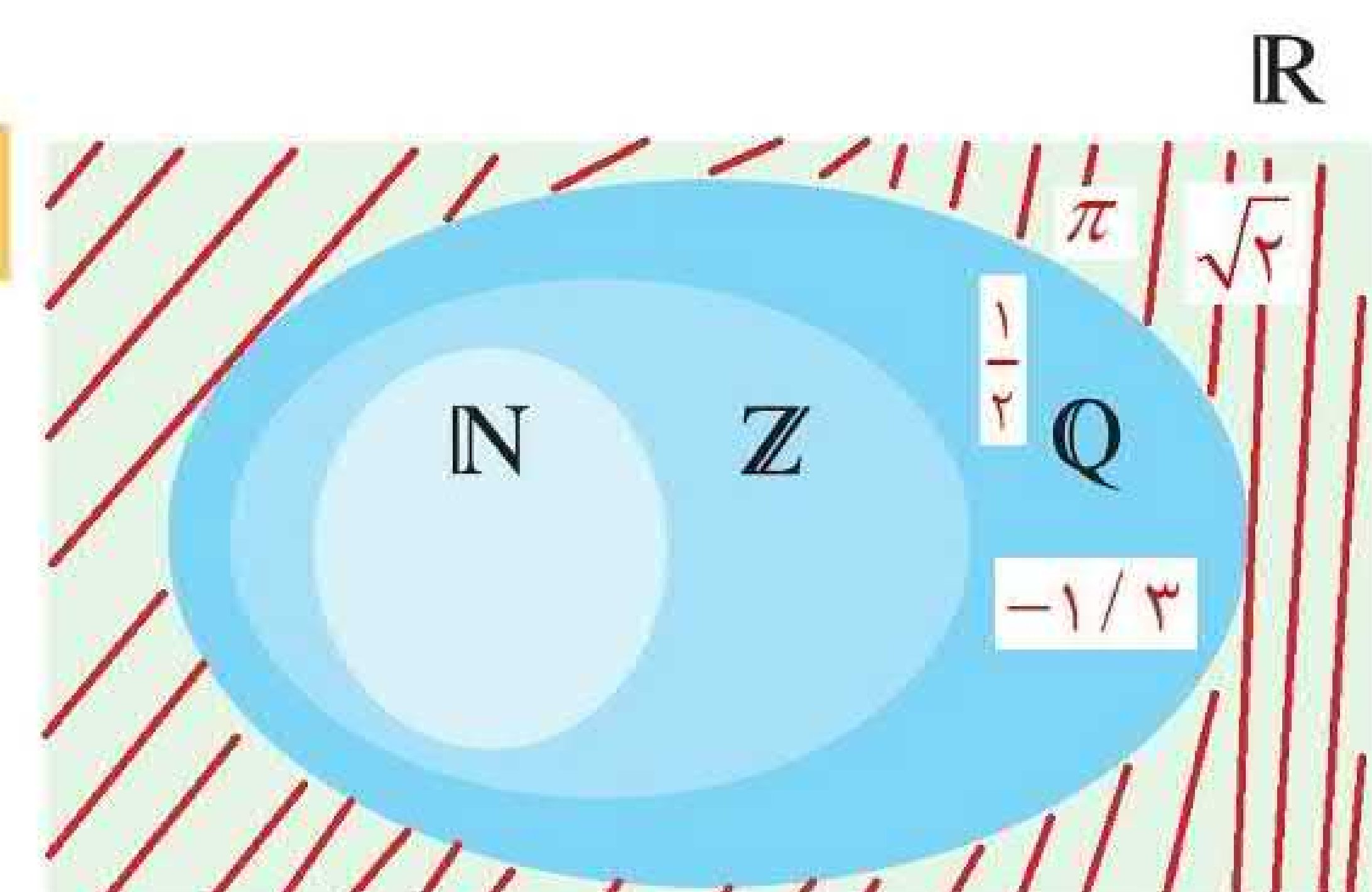
پ) اعداد زیر را روی شکل و در محل مناسب بنویسید.

$$\sqrt{17}, 0, 200, \frac{\pi}{4}, 2/6, 2\sqrt{5}, -\frac{25}{3}, -9$$

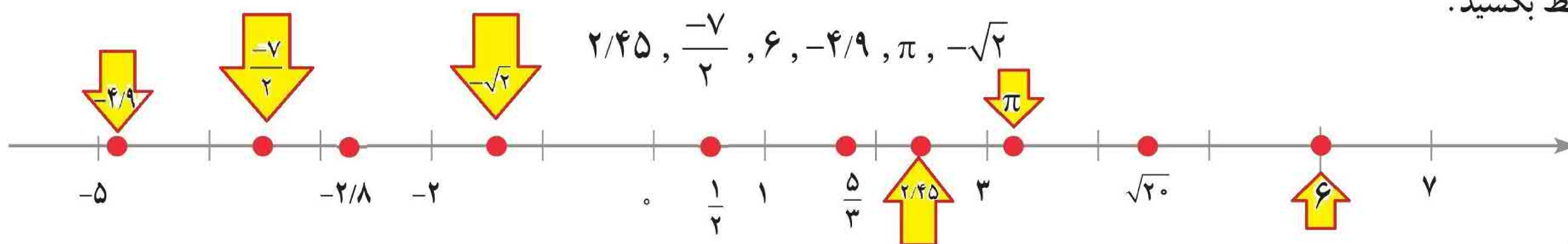
ت) مجموعه اعداد صحیح غیر حسابی را با نمایش اعضا بنویسید. $\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{-1, -2, -3, -4, -5, \dots\}$

ث) مجموعهٔ $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ چند عضو دارد؟ یک عضو دارد زیرا $W - N = \{0\}$

توجه داشته باشید که $N - W = \emptyset$



۲ هریک از اعداد داده شده را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید. کدام یک از این شش عدد گنگ اند؟ زیر آنها خط بکشید.



بازه‌ها

در اینجا گونه دیگری از زیرمجموعه‌های \mathbb{R} را در نظر می‌گیریم. فرض کنید A مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی بین -2 و 1 به همراه خود این دو عدد باشد؛ یعنی $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$. اعضای A را روی محور زیر، با رنگ کردن مشخص کنید. آیا می‌توان تمام اعضای



زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R} را که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص اند، «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم. بازه‌ها در ریاضیات از اهمیت نسبتاً زیادی برخوردارند و ما هم در برخی از فصل‌های بعدی این کتاب به دفعات با آنها سرو کار خواهیم داشت. از این رو شایسته است که برای نشان دادن آنها از نماد ساده‌تری استفاده شود. بنابراین A را با نماد $[-2, 1]$ نشان می‌دهیم و آن را **بازه بسته** از -2 تا 1 می‌نامیم. حال اگر نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه یعنی -2 و 1 را از A حذف کنیم، آنگاه مجموعه‌ای مانند $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$ به دست می‌آید که آن را **بازه باز** بین -2 و 1 می‌نامیم و با نماد $(-2, 1)$ نشان می‌دهیم. به طور خلاصه:

بازه بسته بین -2 و 1 : $A = [-2, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$

بازه باز بین -2 و 1 : $B = (-2, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$

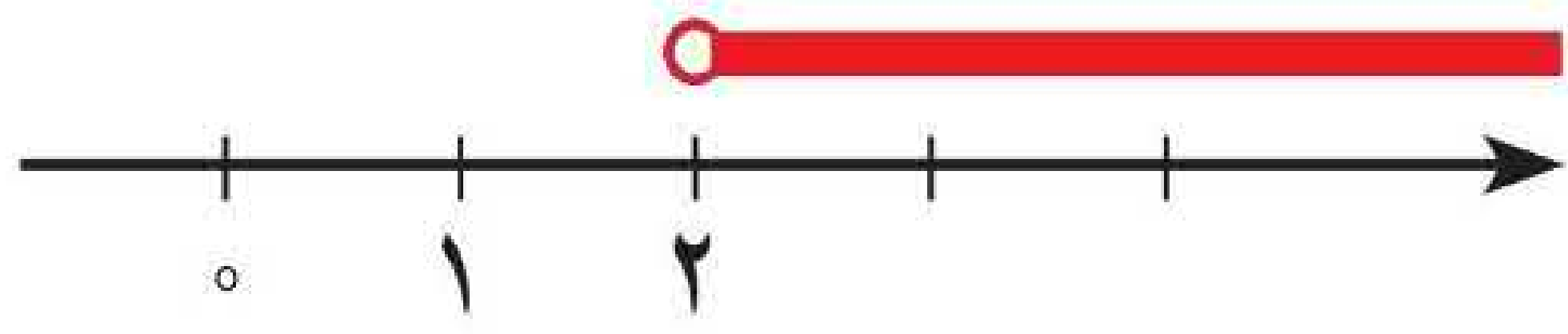
بازه‌های نیم باز هم به روش مشابه تعریف می‌شوند.

فعالیت

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که $a < b$ آنگاه جدول زیر را کامل کنید:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم باز	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
نیم باز	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
نیم باز	$(1, 5]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 5\}$	
نیم باز	$[-3, 2)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$	

گاهی تمام اعداد حقیقی مثلاً بزرگ‌تر از ۲ مورد نظر است. به عنوان مثال، می‌دانیم که مجموعه جواب نامعادله $2x > 4$ به صورت $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ است. اعضای C را روی محور زیر نشان دهید.



آیا می‌توانید C را به صورت یک بازه بنویسید؟ برای اینکه این مجموعه را به شکل بازه بنویسیم، از نماد $+\infty$ (بخوانید: مثبت بی‌نهایت) استفاده می‌کنیم. مجموعه C را در قالب بازه با نماد $(2, +\infty)$ نمایش می‌دهیم که یک بازه باز محسوب می‌شود. به همین ترتیب برای مجموعه‌ای مثل $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$ نمایش بازه‌ای به صورت $(-\infty, 1]$ خواهد بود که یک بازه نیم باز است. توجه داریم که $+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند. در سال‌های آینده با این دو نماد بیشتر آشنا خواهیم شد.

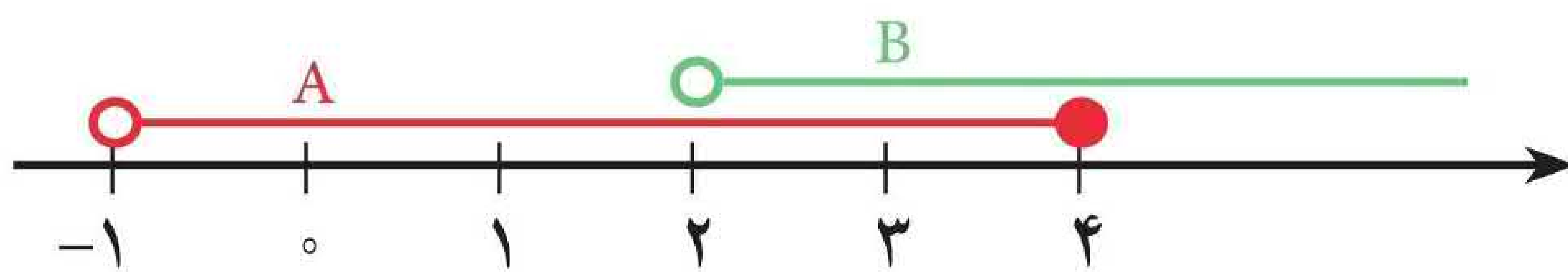
فعالیت

اگر a عدد حقیقی دلخواهی باشد، جدول زیر را کامل کنید.

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
نیم باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
نیم باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
باز	$(-\infty, +\infty)$	\mathbb{R}	
نیم باز	$[3, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$	
باز	$(-\infty, 5)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$	

مثال

می‌خواهیم اجتماع و اشتراک دو بازه $A = (-1, 4]$ و $B = (2, +\infty)$ را به دست آوریم. نمایش هندسی هر دو بازه را مطابق شکل روی یک محور رسم می‌کنیم.



از روی شکل دیده می‌شود که $A \cup B$ برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بزرگ‌تر از (-1) یعنی:

$$(-1, 4] \cup (2, +\infty) = (-1, +\infty)$$

همچنین با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که $A \cap B$ برابر است با مجموعه تمام اعداد حقیقی بین ۲ و ۴ به همراه خود عدد ۴؛ یعنی:

$$(-1, 4] \cap (2, +\infty) = (2, 4]$$

توضیح دهید که چرا $2 \notin A \cap B$.

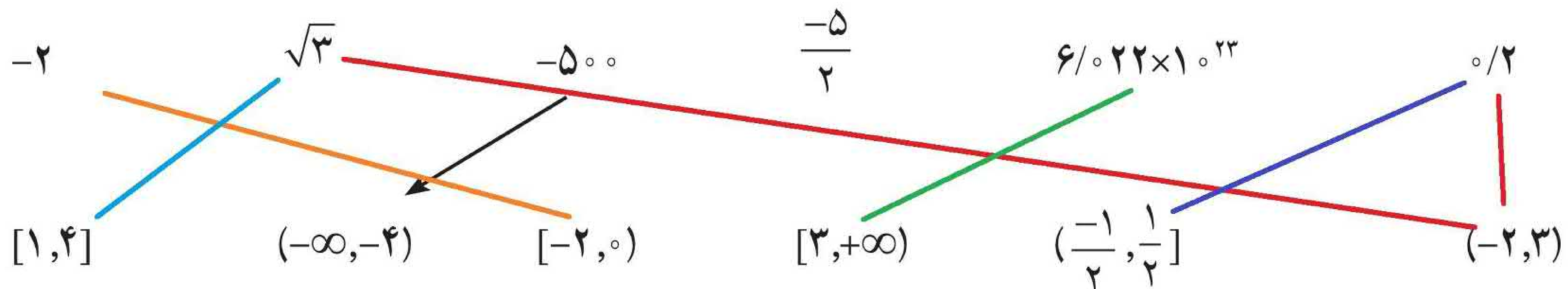
زیرا ۲ در بازه B نیست، پس در اشتراک وجود ندارد.

۱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

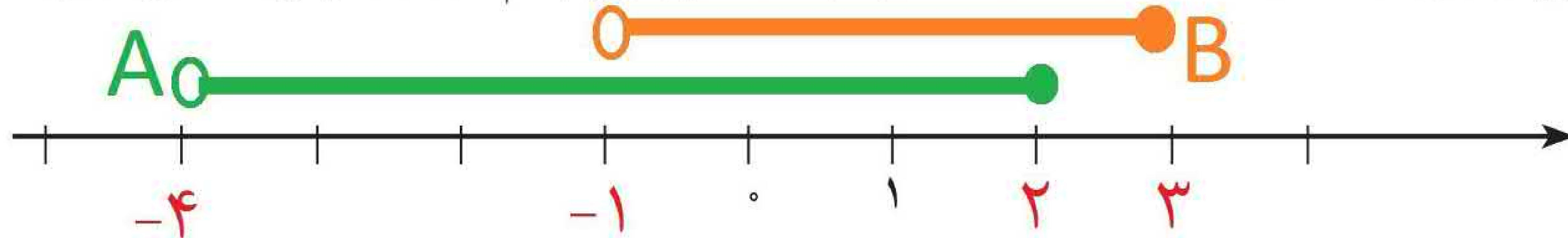
\checkmark الف) $\frac{4}{3} \in [\frac{1}{2}, 2)$ \times ب) $-2 \in (-2, 0]$ \checkmark پ) $0 \in (-2, 0]$ \checkmark ت) $-2 \in \{-2, 0\}$ \times ث) $-1 \in \{-2, 0\}$

\times ج) $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$ \checkmark چ) $\{0, 1\} \subseteq [-1, 2)$ \checkmark ح) $\emptyset \subseteq (-17, 0]$ \times خ) $[2, 5) = (2, 5]$ \times د) $\sqrt{2} \in (0, 1)$

۲ هر یک از اعداد زیر عضو یک یا چند تا از بازه‌های داده شده هستند. هر عدد را به بازه یا بازه‌های نظیر آن وصل کنید.



۳ نمایش هندسی دو بازه $A = (-4, 2]$ و $B = (-1, 3]$ را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.



الف) $A \cap B = (-1, 2]$ ب) $A \cup B = (-4, 3]$ پ) $A - B = (-4, -1]$ ت) $B - A = (2, 3]$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

فعالیت

فرض کنید A مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ۴ و B مجموعه اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد.

$A = \{1, 2, 3\}$

الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید.

$B = \{3, 2, 1, 0, -1, -2, \dots\}$

ب) A چند عضو دارد؟ 3 عضو دارد

پ) درباره تعداد اعضای B چه می‌توان گفت؟ دارای بی شمار عضو است.

مجموعه‌هایی مانند A را که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است، **مجموعه‌های متناهی** می‌نامیم.

با توجه به مطلب فوق، B یک مجموعه متناهی نیست؛ زیرا نمی‌توان تعداد اعضای آن را با یک عدد بیان کرد. در واقع تعداد اعضای این مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است. چنین مجموعه‌هایی را **مجموعه‌های نامتناهی** می‌نامیم.

کار در کلاس

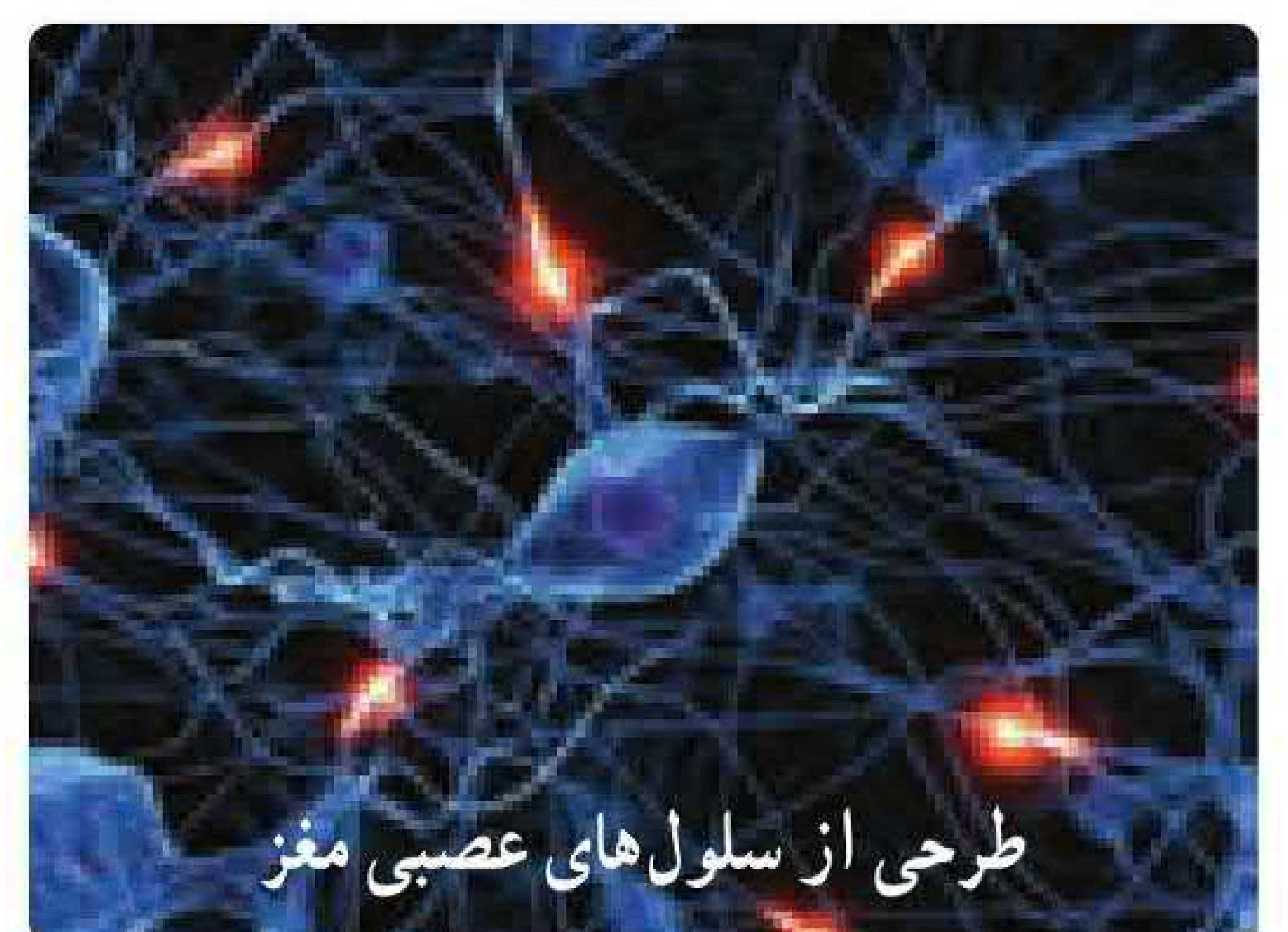
۱) متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. دربارهٔ مجموعه‌های متناهی سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید.

تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های متناهی)	متناهی	نامتناهی	مجموعه
{2, 3, 5, 7} ۴ عضو دارد	✓		مجموعه اعداد اول یک رقمی
۷۵۰۰۰۰۰۰۰۰	✓		مجموعه انسان‌های روی زمین
		✓	مجموعه اعداد طبیعی فرد
۵۳۰۰۰۰۰۰۰۰۰	✓		مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان
		✓	مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات
۱۸۰	✓		مجموعه دانش‌آموزان مدرسه شما
۱۰۹ - ۱۰۱۰	✓		مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی
۳۹۰۰۰۰۰۰۰۰۰	✓		مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون
		✓	مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک
		✓	مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰
		✓	بازه (۱, ۰)
۶ / ۰.۲ × ۱۰.۲۳	✓		مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول مشخص از آب



جنگل‌های آمازون

آمازون که به ریه‌های زمین مشهور است، جنگل بسیار بزرگی در شمال آمریکای جنوبی است و به دلیل همین وسعت، به آن **جنگل‌های آمازون** گفته می‌شود. حدود ۶۰ درصد این جنگل در خاک برزبل قرار دارد، همچنین بخش‌هایی از آن هم در کشورهای پرو، اکوادور، گویان، کلمبیا، ونزوئلا، بولیوی و سورینام واقع شده است. در واقع این جنگل بیش از سه برابر خاک کشور ما وسعت دارد. رودخانه آمازون با طول حدود ۶۵۰۰ کیلومتر به عنوان پرآب‌ترین رودخانه دنیا که ۵ درصد آب شیرین جهان را در خود جای می‌دهد، نیز از دل این جنگل عبور می‌کند. نتیجه یک مطالعه بزرگ که مدت ۱۰ سال به طول انجامید، نشان می‌دهد که ۳۹۰/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰ اصله درخت در ۱۶۰۰۰ گونه مختلف در جنگل‌های آمازون وجود دارد. با این حساب سهم هر فرد دنیا از این جنگل چند درخت می‌شود؟! با وجود این، مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون یک مجموعه متناهی محسوب می‌شود یا نامتناهی؟



طرحی از سلول‌های عصبی مغز

۲) دو مجموعه متناهی نام ببرید. ۱- مجموعه ی دبیران ریاضی آبادان ۲- مجموعه ی ماشین های پلاک آبادان

۳) دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها زیرمجموعه دیگری باشد. مجموعه ی اعداد طبیعی که زیر مجموعه ی اعداد حسابی است.

۴) دو مجموعه نامتناهی مثل A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ بوده و $B - A$ تک عضوی باشد.

$$B = [1, 2] \quad A = [1, 2) \Rightarrow \begin{cases} A \subseteq B \\ B - A = \{2\} \end{cases}$$

تذکر: تعداد اعضای برخی از مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد؛ با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آنها را به دست آورد.

الف $\frac{1}{3}$ عددی بین 0 و 1 است. چهار عدد گویای دیگر از بازه $(0, 1)$ بنویسید و جواب خود را با جواب‌های دوستانتان مقایسه کنید. $\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 0.2, 0.0001$

ب آیا می‌توان بین 0 و 1 به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟ **بله**

پ در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه $(0, 1)$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ **نامتناهی اند**

ت در مورد متناهی یا نامتناهی بودن Q چه می‌توان گفت؟ **نامتناهی است.**

ث اگر A دارای یک زیر مجموعه نامتناهی باشد، آنگاه A یک مجموعه **نامتناهی** خواهد بود.

تمرین

۱ فرض کنید U مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی عدد 5 باشد.

الف U را با نمایش اعضای آن بنویسید. $U = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, \dots\}$

ب U متناهی است یا نامتناهی؟ **نامتناهی**

پ یک زیر مجموعه متناهی از U بنویسید. $A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$

ت دو زیر مجموعه نامتناهی مانند C و D از U بنویسید؛ به طوری که $C \subseteq D$.

$$D = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad C = \{2, 4, 6, \dots\}$$

۲ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف مجموعه اعداد طبیعی. **نامتناهی**

ب مجموعه شماره‌های طبیعی عدد 36 . **متناهی**

پ بازه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$. **نامتناهی**

ت $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$. **متناهی زیرا $A = \emptyset$**

ث مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد 100 . **نامتناهی**

۳ دو مجموعه نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه‌ای متناهی باشد. $\{2\} \rightarrow \bigcap (2, +\infty), [0, 2]$

۴ حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به دست آورید:

ب) $(2, 6] = (-\infty, 6] \cap (2, 9)$

الف) $(-3, 5] = (-3, 0) \cup (-2, 5]$

ت) $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) = (-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$

پ) $(6, 10] = (3, +\infty) \cap (6, 10)$

ج) $[2, 3] = [2, 4) - (3, +\infty)$

ث) $[4, +\infty) = (3, +\infty) - [2, 4)$

۵ مجموعه $\mathbb{R} - \{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه

بنویسید. $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

۶ اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟ **متناهی**

عدد آووگادرو

در شیمی تعداد 6.022×10^{23} عدد از هر ذره (مولکول یا اتم) را یک مول از آن ذره می‌نامند. برای درک میزان بزرگی این عدد، فرض کنیم تعداد مولکول‌های موجود در یک مول آب را که 18 گرم است، بتوانیم مولکول به مولکول بشماریم و کار شمردن هر مولکول آن هم یک ثانیه زمان ببرد. در این صورت کار شمارش نزدیک به 20 میلیون میلیارد سال به طول خواهد انجامید که این زمان حدود یک میلیون برابر عمر جهان است! به نظر شما، مجموعه مولکول‌های یک مول مشخص از آب، یک مجموعه متناهی است یا نامتناهی؟

