

درس دوم: متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع

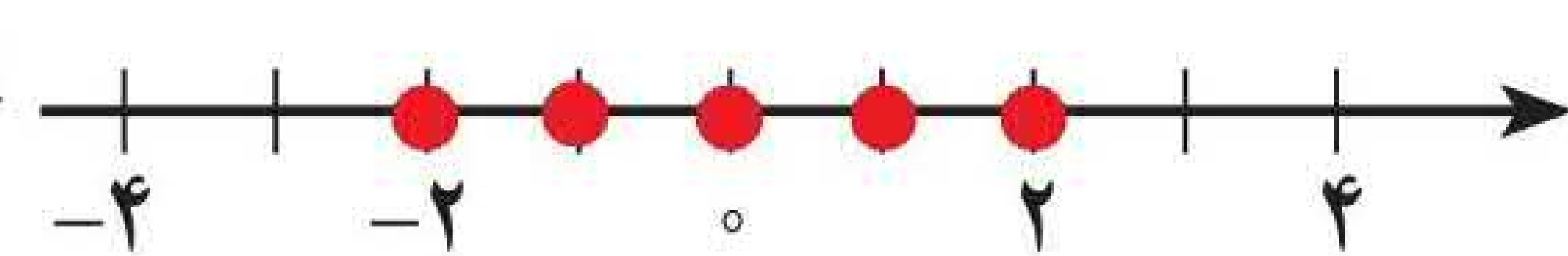
فرض کنیم U نشان دهنده مجموعه تمام کتاب‌های کتابخانه آیت الله العظمی مرعشی نجفی (ره) و A مجموعه کتاب‌های خطی آن باشد. اگر مجموعه‌ای را که شامل کتاب‌های چاپی این کتابخانه است، با A' نشان دهیم، آنگاه می‌توانیم نمودار پایین صفحه را درباره کتاب‌های این کتابخانه رسم کنیم. در این مثال U را که شامل تمام کتاب‌های کتابخانه می‌باشد، مجموعه مرجع و A' را متمم مجموعه A می‌نامیم.

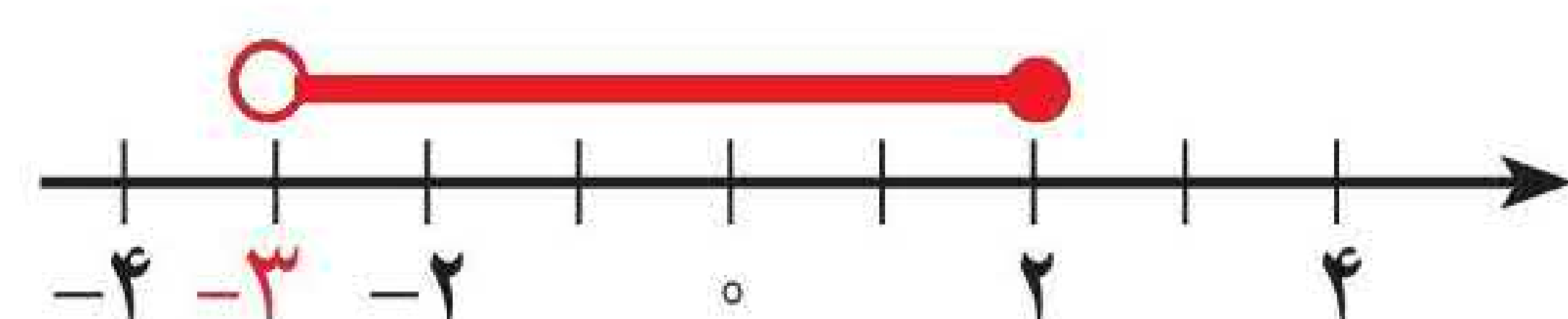
در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، **مجموعه مرجع** می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه $U - A$ را **متمم** A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

شعاعیت

الف دو مجموعه زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهید.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 2\}$$


$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$$


ب A را با نمایش اعضا و B را به صورت یک بازه بنویسید.

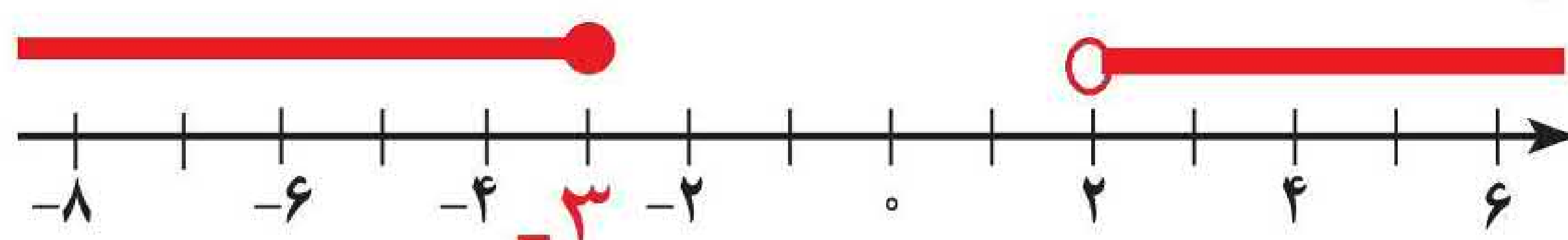
$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$B = (-3, 2]$$

پ در مورد A ، اگر مجموعه مرجع را \mathbb{Z} در نظر بگیریم، A' را مشخص کنید.

$$A' = \mathbb{Z} - A = \{\dots, -4, -3, 3, 4, \dots\} = \{\pm 3, \pm 4, \dots\}$$

ت در مورد B با فرض این که \mathbb{R} مجموعه مرجع باشد، B' را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید.

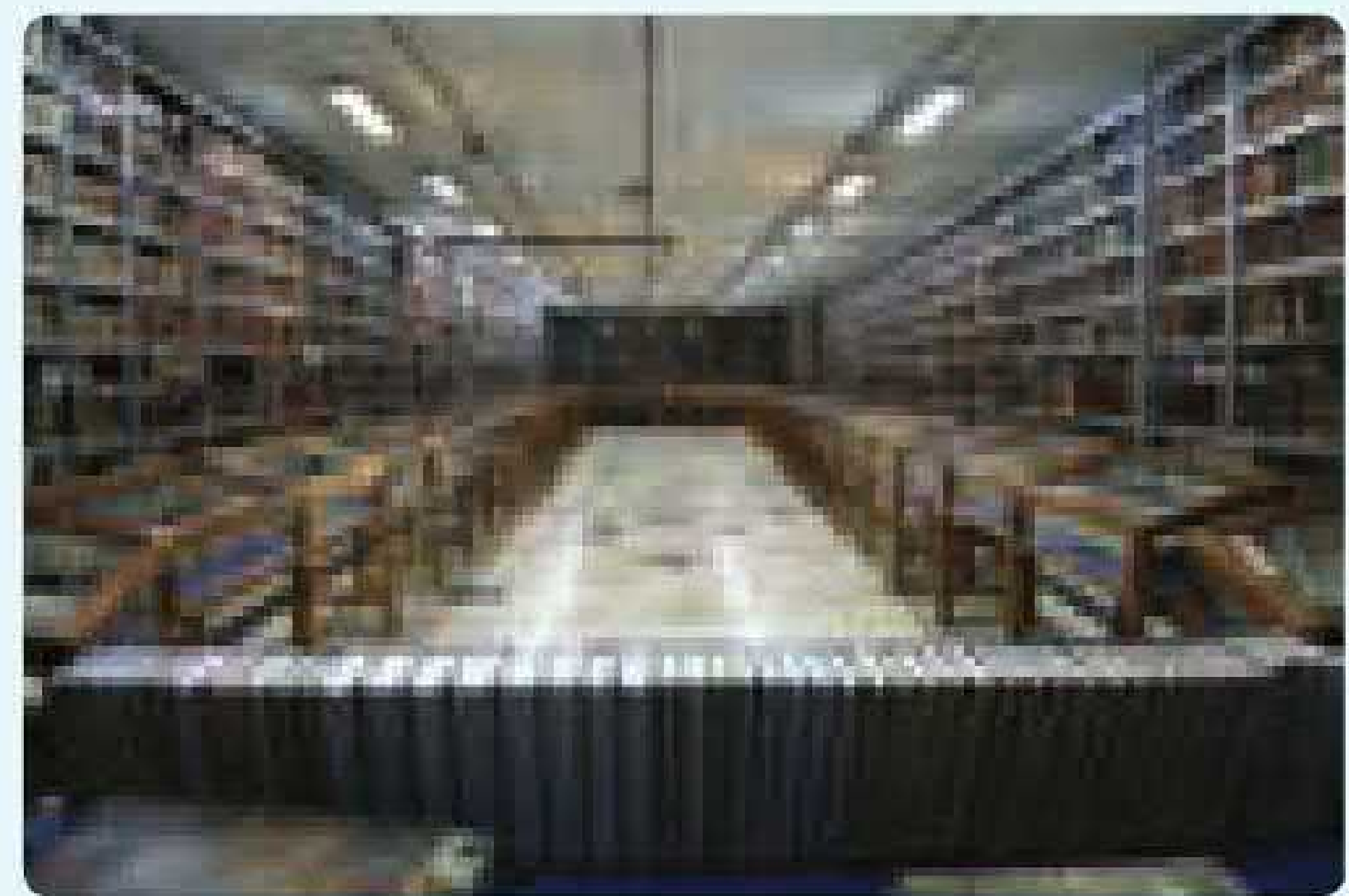


$$B' = \mathbb{R} - B = (-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$$



کتابخانه آیت الله العظمی مرعشی نجفی (ره)، در شهر مقدس قم یکی از بزرگ‌ترین کتابخانه‌های جهان اسلام است که کتاب‌های نفیس و قدیمی بسیاری را در موضوعات مختلف در خود جای داده است. این کتابخانه از نظر فراوانی نسخه‌های خطی، نخستین کتابخانه کشور و سومین کتابخانه جهان اسلام به‌شمار می‌رود. جدول زیر اطلاعات مختصری درباره تعداد کتاب‌های این کتابخانه در اختیار ما قرار می‌دهد.

تعداد	نوع کتاب
۴۲۰۰۰ جلد	کتاب‌های خطی
۱۰۰۰۰۰۰ جلد	کتاب‌های چاپی
۱۰۴۲۰۰۰ جلد	کل کتاب‌ها



U : مجموعه تمام کتاب‌های کتابخانه

A : کتاب‌های خطی

A' : کتاب‌های چاپی

درس دوم: متمم یک مجموعه



۱ اگر U مجموعه شامل تمام استان‌های کشورمان باشد و A مجموعه استان‌های غیر ساحلی، آنگاه A' را با نمایش اعضای آن بنویسید.

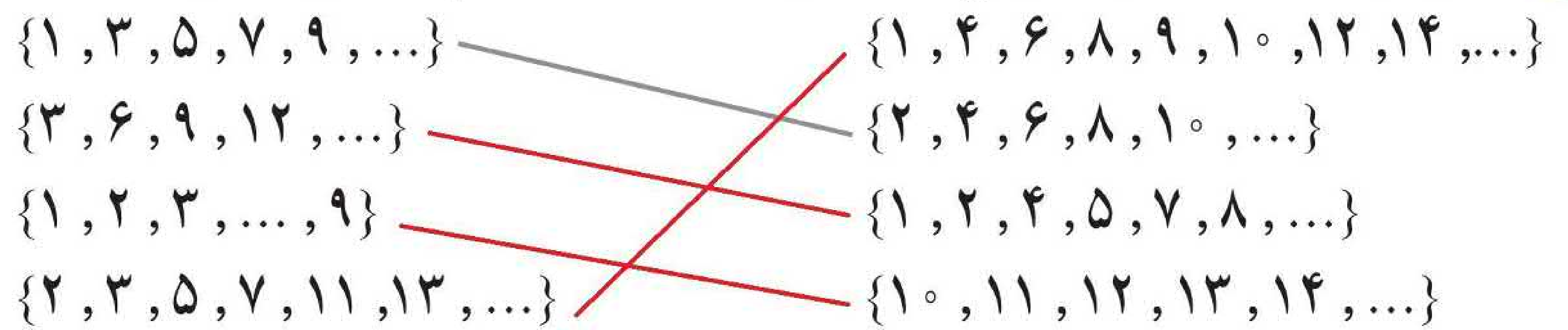
$$A' = U - A$$

= { سیستان و بلوچستان و هرمزگان و بوشهر و خوزستان و گلستان و مازندران و گیلان و اردبیل }

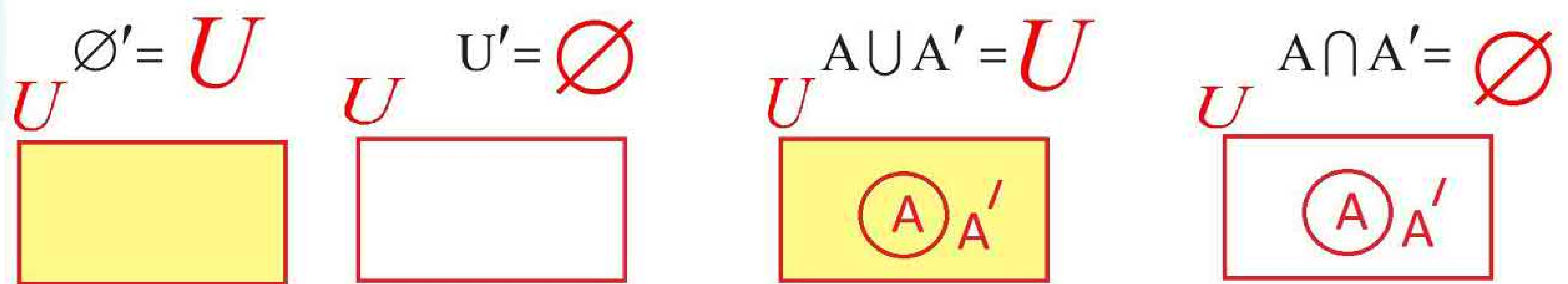
۲ فرض کنیم U مجموعه تمام اتومبیل‌های پلاک‌گذاری شده کشور و B مجموعه اتومبیل‌های با پلاک فرد باشد. در این صورت B' چه مجموعه‌ای خواهد بود؟

$$B' = U - B = \text{مجموعه ی اتومبیل های با پلاک زوج}$$

۳ با فرض آنکه \mathbb{N} مجموعه مرجع باشد، هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید.



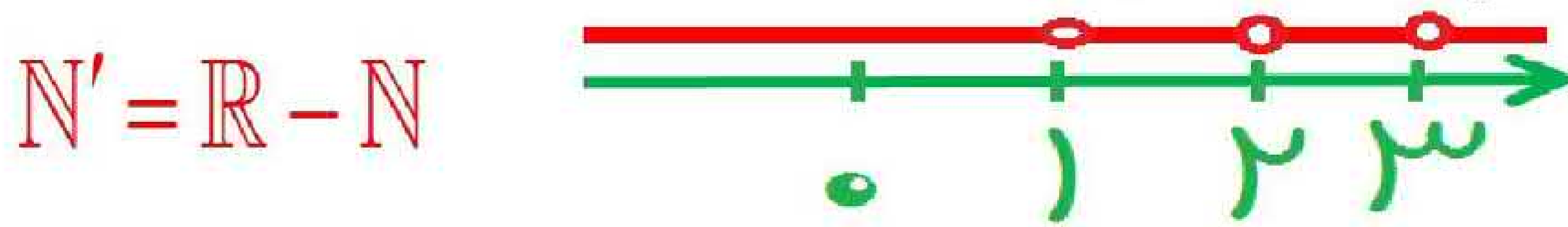
۴ U مجموعه مرجع و A زیرمجموعه دلخواهی از آن می باشد. با رسم نمودار، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.



۵ الف) اگر \mathbb{Z} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، آنگاه \mathbb{N}' را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

$$\mathbb{N}' = \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$

ب) اگر \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، در این صورت \mathbb{N}' را روی محور نمایش دهید.



۶ فرض کنیم $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4\}$. ابتدا A' و B' را بنویسید و سپس جدول‌های زیر را کامل کنید. از هر قسمت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

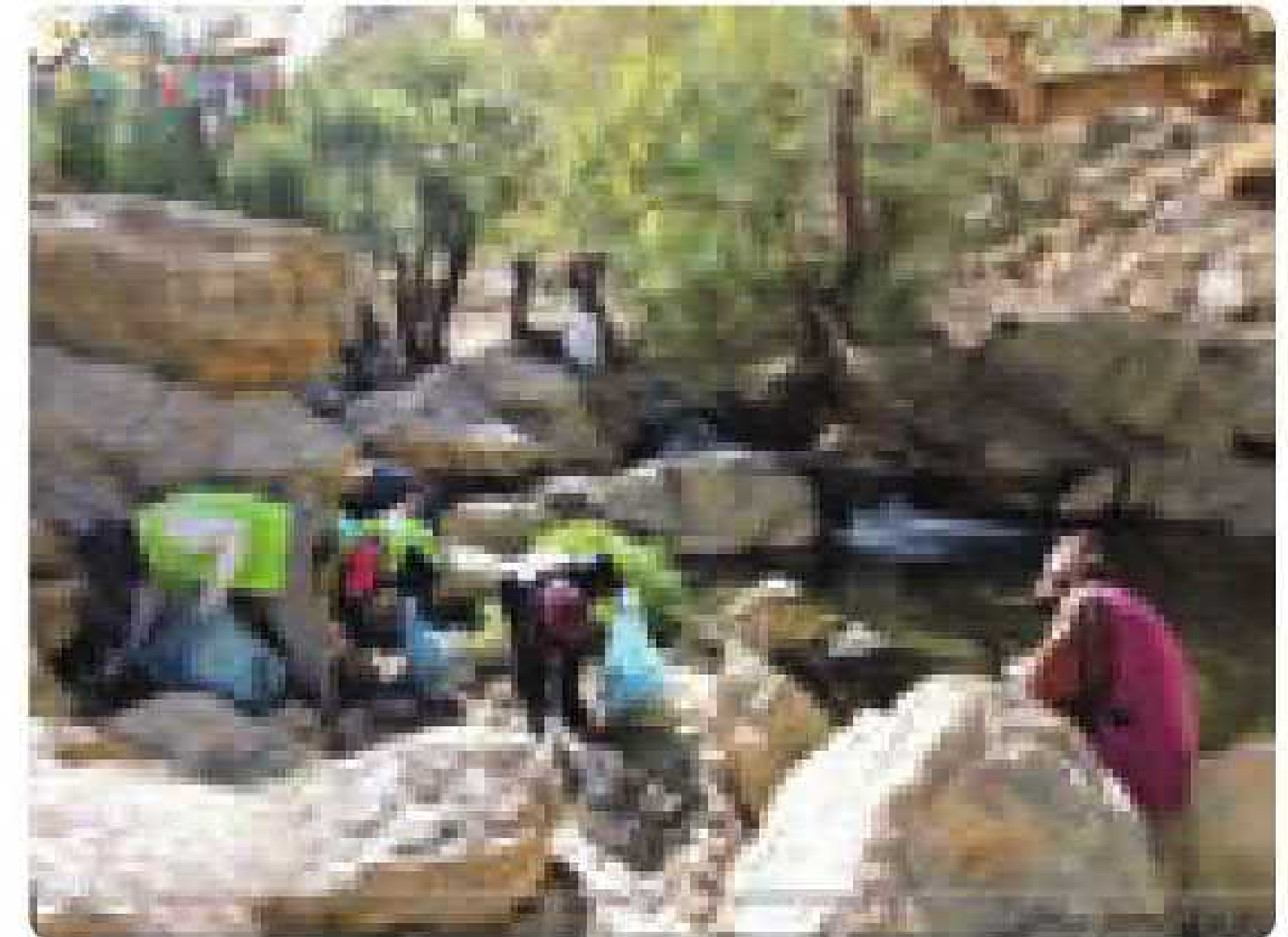
$(A)'$	$A' = \{4, 5\}$	$B' = \{1, 3, 5\}$
$\{1, 2, 3\}$		$\Rightarrow (A)'' = A$
$A \cup B$	$(A \cup B)'$	$A' \cap B'$
$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{5\}$	$\{5\}$
	$\Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$	
$A \cap B$	$(A \cap B)'$	$A' \cup B'$
$\{2\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$
	$\Rightarrow (A \cap B)' = A' \cup B'$	
$A - B$	$A - (A \cap B)$	
$\{1, 3\}$	$\{1, 3\}$	$\Rightarrow A - B = A - (A \cap B)$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

در سال گذشته دیدیم که اگر A یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه برای نشان دادن تعداد عضوهای آن از علامت $n(A)$ استفاده می‌شود. مثلاً اگر $G = \{2, 3, 5, 7\}$ در این صورت می‌توانیم بنویسیم $n(G) = 4$. در این بخش می‌خواهیم رابطه‌ای برای $n(A \cup B)$ به دست آوریم.

فعالیت

۱ یک تیم کوه‌نوردی متشکل از ۴ دانش‌آموز و ۳ دانشجوی عضو یک مؤسسه طرفدار محیط زیست است. اعضای این تیم به‌طور داوطلبانه در روزهای جمعه هر هفته کوه‌های اطراف شهر خود را از وجود زباله پاک‌سازی می‌کنند. اعضای دانش‌آموز این تیم مجموعه $A = \{\text{آنیتا، زهرا، الناز، الهام}\}$ و اعضای دانشجوی آن مجموعه $B = \{\text{فاطمه، معصومه، فرزانه}\}$ هستند. همان‌گونه که دیده می‌شود، این دو مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند؛ به عبارت دیگر $A \cap B = \emptyset$.

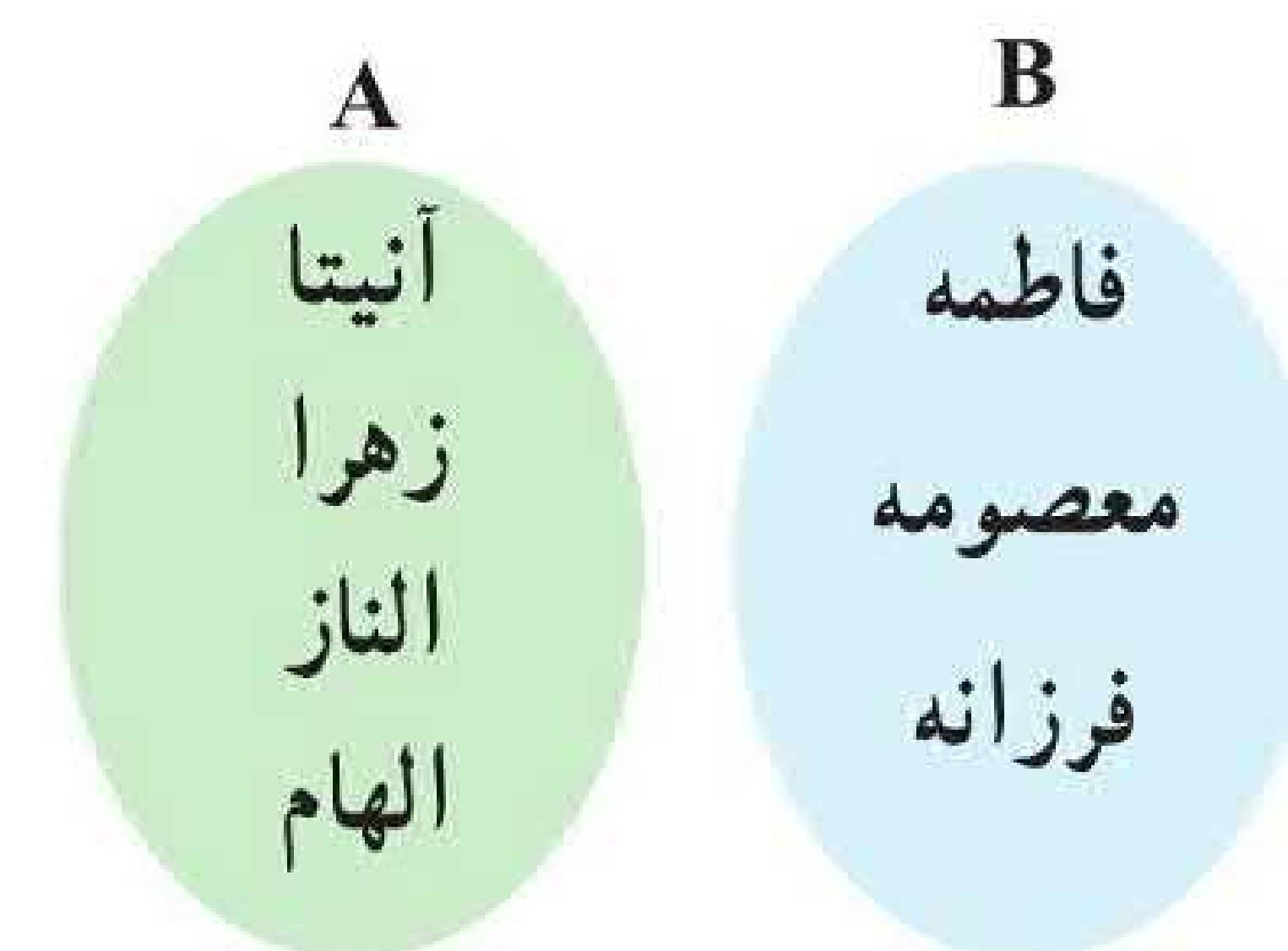


به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه **جدا از هم** یا **مجزا** می‌گوییم.

الف) اعضای $A \cup B$ را که بیانگر اعضای تیم کوه‌نوردی می‌باشد، بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید.

$A \cup B = \{\text{آنیتا و زهرا و الناز و الهام و فاطمه و معصومه و فرزانه}\}$

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$
۴	۳	۷	۰



ب) تعداد عضوهای $A \cup B$ چه رابطه‌ای با $n(A)$ و $n(B)$ دارد؟ این رابطه را به صورت یک فرمول بنویسید. جمع تعداد عضوهای A و B برابر با تعداد اعضای $A \cup B$ است.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

پ) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعه دلخواه A و B برقرار است؟

$$\text{با شرط این که دو مجموعه جدا از هم باشند } A \cap B = \emptyset$$

۲ الف) مجموعه شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب A و B می‌نامیم. موارد خواسته شده را بنویسید.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28\} \Rightarrow n(A) = 28$$

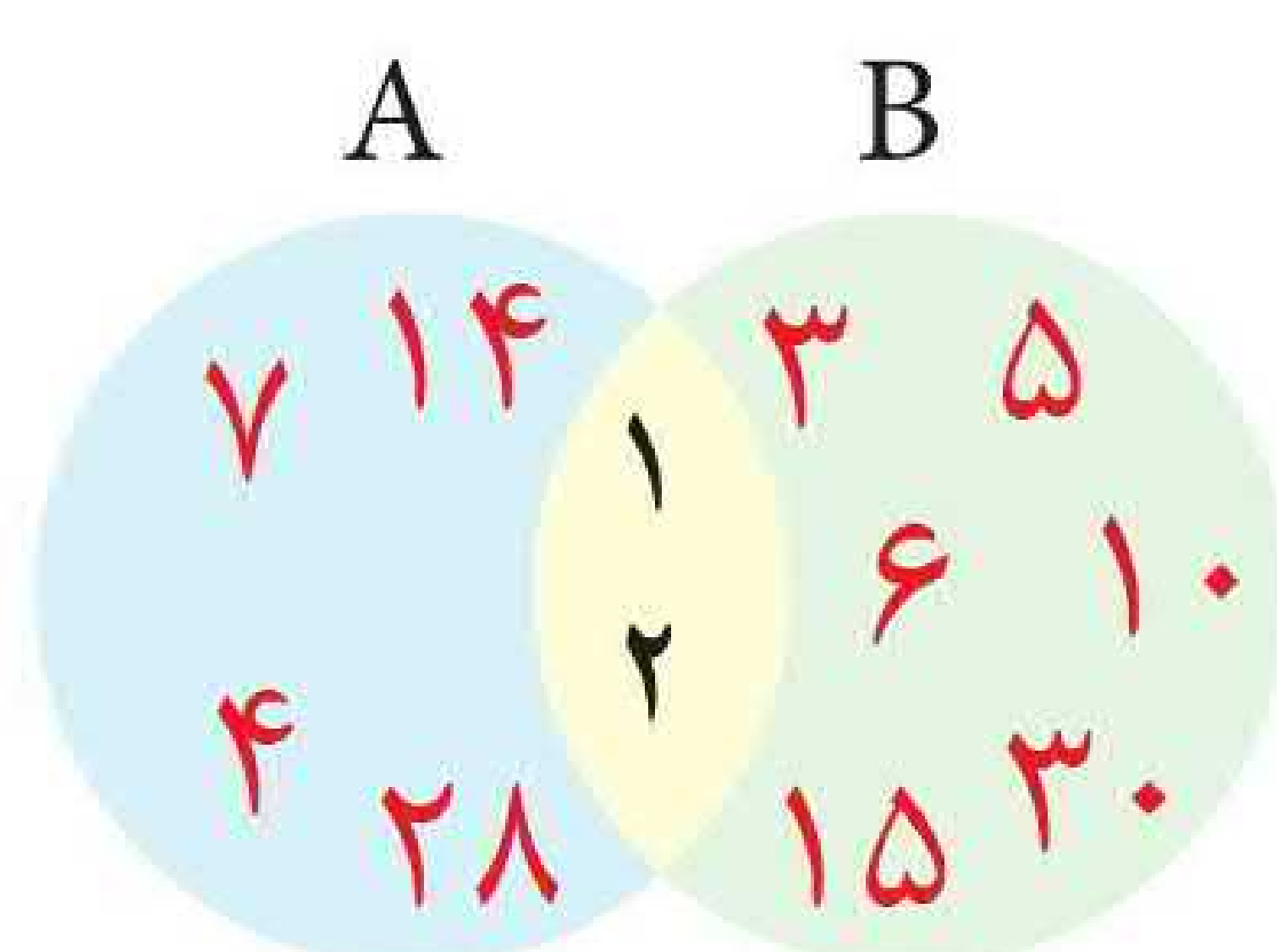
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\} \Rightarrow n(B) = 30$$

$$A \cap B = \{1, 2\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\} \Rightarrow n(A \cup B) = 30$$

ب) جدول زیر را کامل کنید.

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$
۶	۸	۲	۱۲



پ) چرا رابطه‌ای را که در فعالیت (۱) به دست آوردید؛ یعنی $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ در این مثال برقرار نیست؟ چون مجموعه های A و B عضوهای مشترک دارند یعنی $A \cap B \neq \emptyset$

ت) با تکمیل نمودار مقابل، سعی کنید رابطه درست برای $n(A \cup B)$ را حدس بزنید.

همان طور که دیدیم، اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

با توجه به نمودار روبه‌رو، در مورد علت درستی این رابطه با دوستان خود بحث کنید.

کاردر کلاس



۱) یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آنها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم‌هایی که:

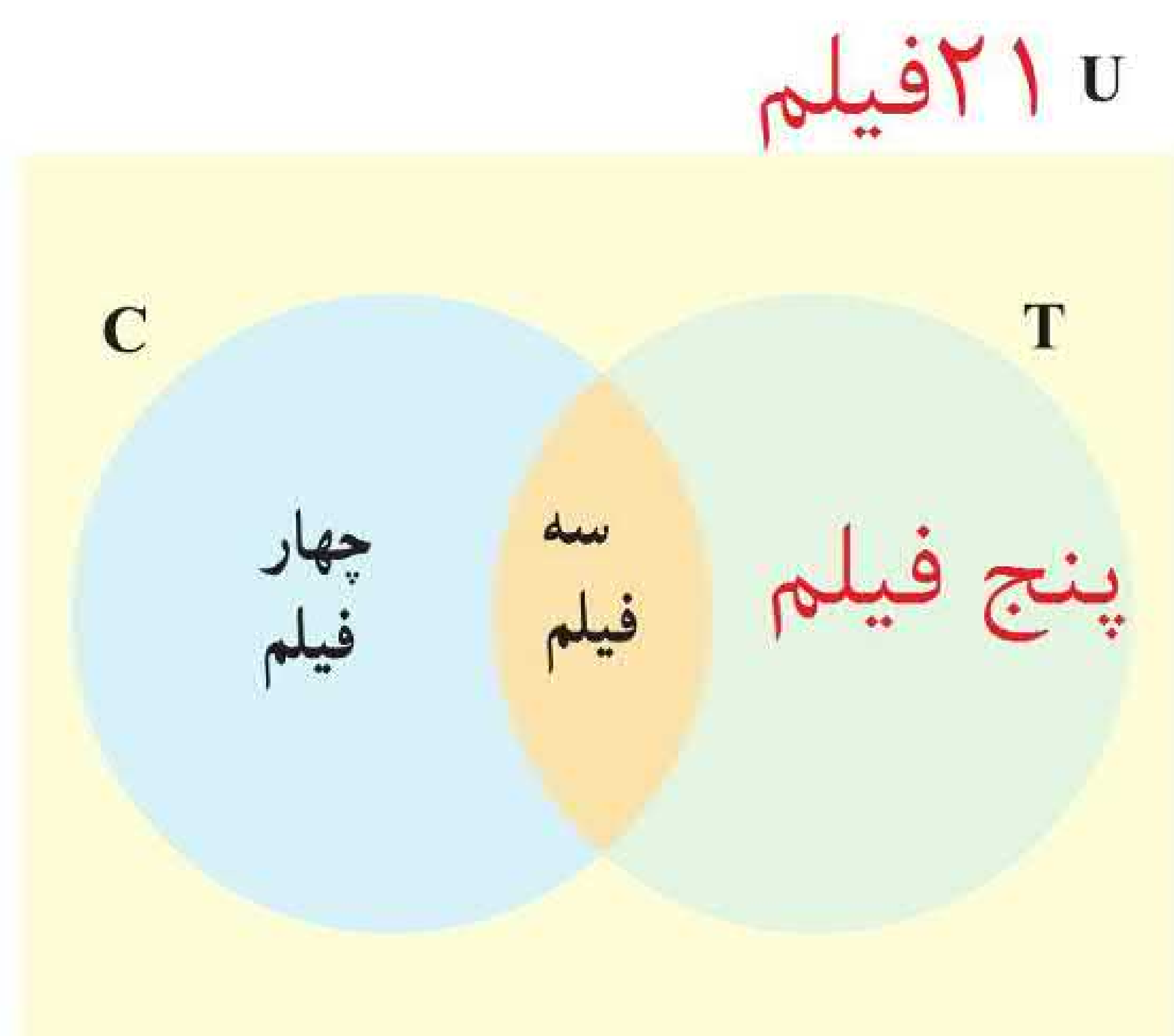
الف) پویانمایی یا طنزند.

ب) غیرپویانمایی و غیر طنزند.

روش اول حل: مجموعه شامل تمام فیلم‌ها را با U ، مجموعه فیلم‌های پویانمایی را با C و مجموعه فیلم‌های طنز را با T نشان می‌دهیم. جاهای خالی را پر کنید و جواب‌ها را بیابید.

الف) $n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T) = 7 + 8 - 3 = 12$

ب) $n(C \cup T)' = n(U) - n(C \cup T) = 21 - 12 = 9$

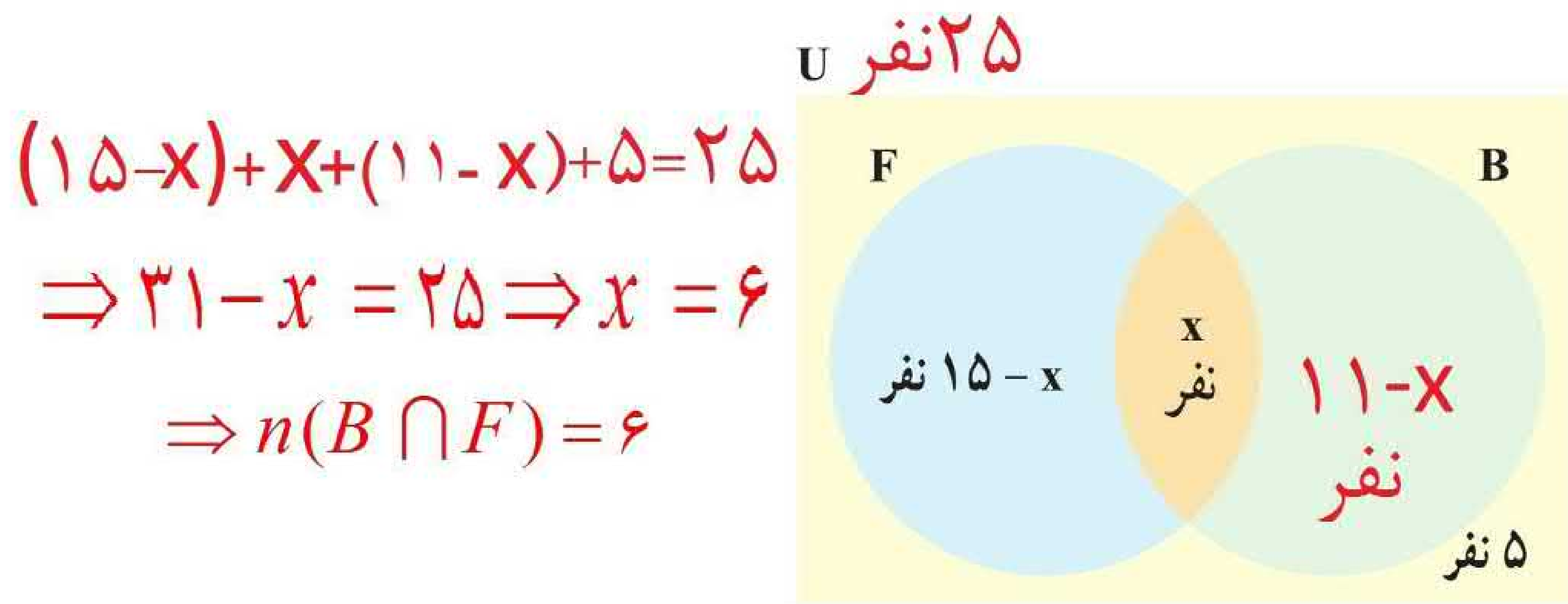


روش دوم حل: در نمودار وین مقابل، دو مجموعه C و T سطح درون U را به چهار ناحیه جداگانه تقسیم کرده‌اند که عدد مربوط به دوتا از نواحی نوشته شده است. با نوشتن اعداد مربوط به دو قسمت دیگر، جواب قسمت‌های (الف) و (ب) را بیابید.

الف) $12 = 4 + 3 + 5 =$ پویانمایی یا طنز (الف)

ب) $9 = 21 - 12 =$ غیر پویانمایی و غیر طنز (ب)

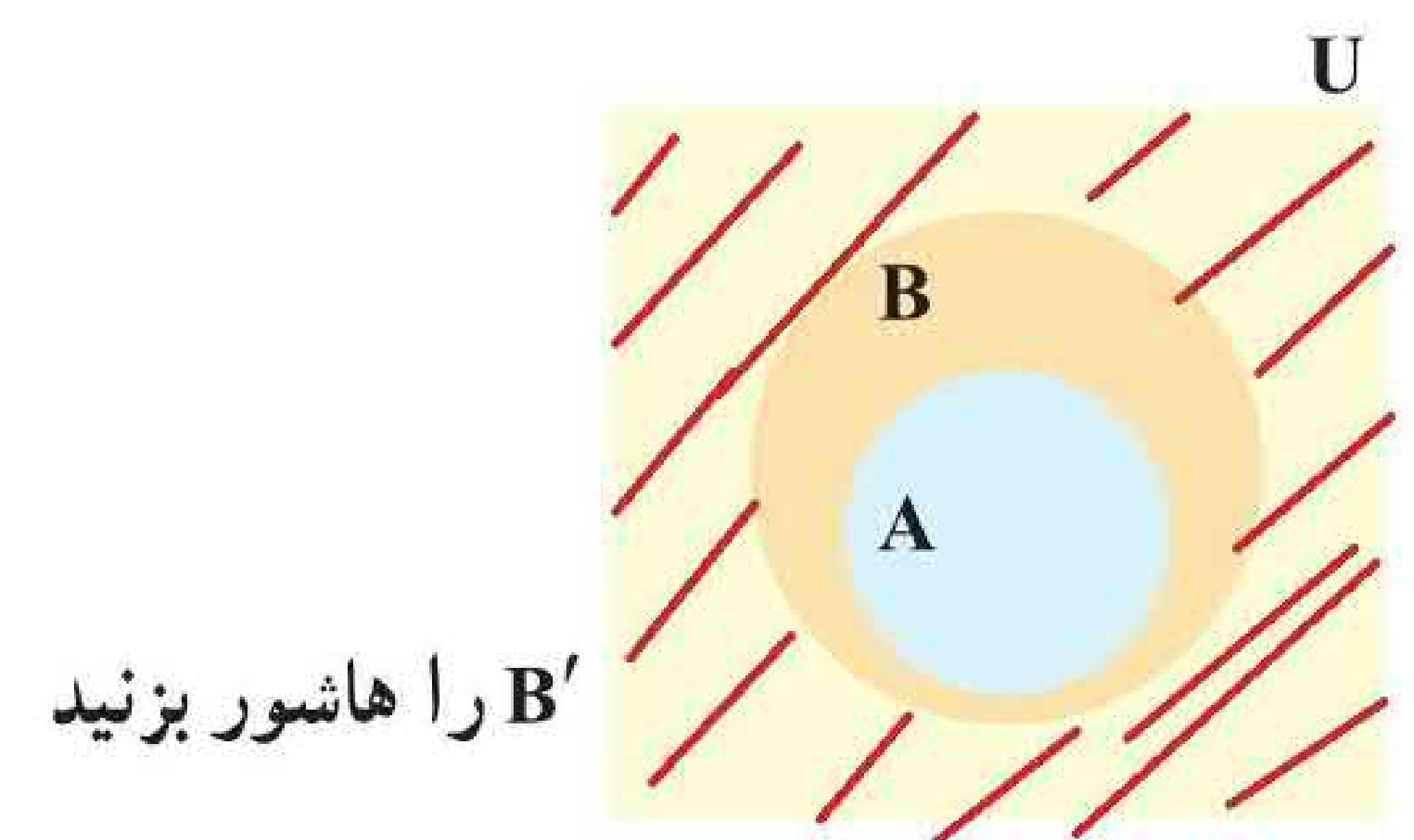
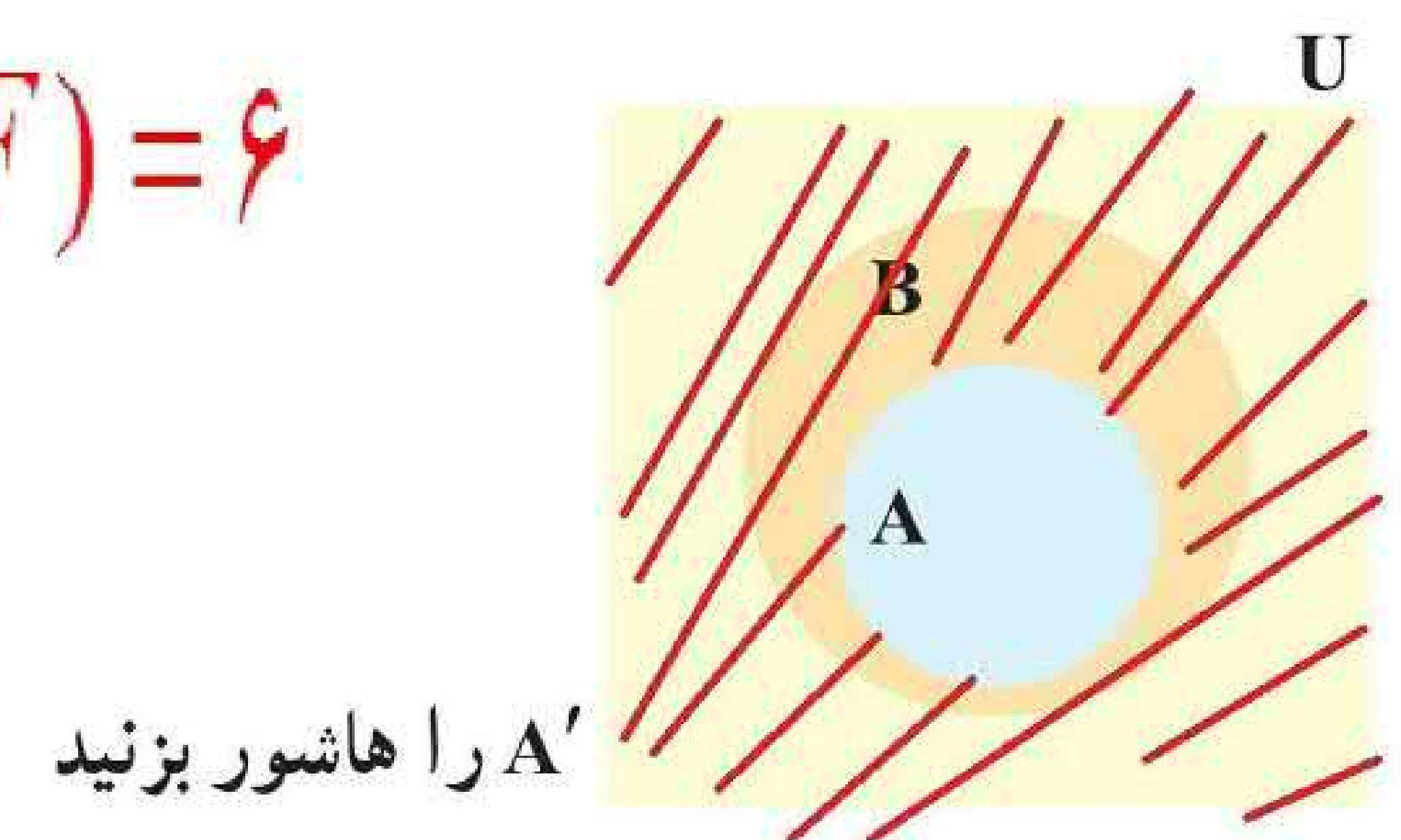
۲ در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هیچ یک از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو هر دو تیم هستند.
روش اول حل: با تکمیل نمودار زیر مقدار x را بیابید.



روش دوم حل: چون ۵ نفر عضو هیچ یک از این دو تیم نیستند، پس $n(B \cup F) = 20$. حال با نوشتن فرمول $n(B \cup F)$ می‌توان $n(B \cap F)$ را به دست آورد.

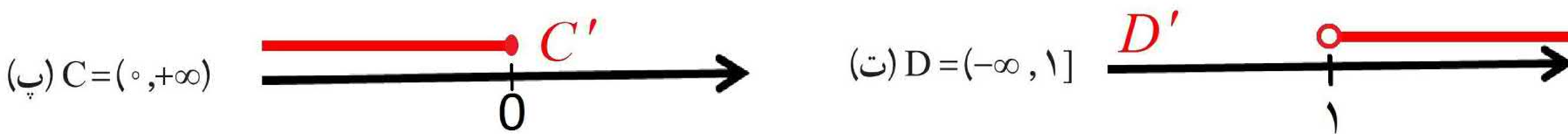
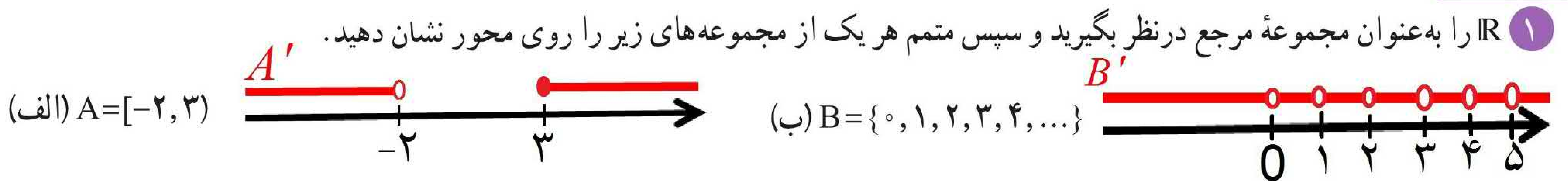
$$n(B \cup F) = n(B) + n(F) - n(B \cap F) \Rightarrow 20 = 11 + 15 - n(B \cap F) \Rightarrow n(B \cap F) = 6$$

۳ الف) فرض کنیم $A \subseteq B \subseteq U$ که در آن U مجموعه مرجع است. در نمودارهای مقابل A' و B' را مشخص کنید و سپس تعیین کنید که آیا بین A' و B' هم رابطه زیر مجموعه بودن برقرار است؟ چگونه؟
 $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$



ب) اگر $U = \{a, b, c, d, e\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, b, c\}$ ، در این صورت $A \subseteq B$ می‌باشد. با به دست آوردن A' و B' نشان دهید که بین A' و B' هم رابطه زیرمجموعه بودن برقرار است.
 $A' = \{c, d, e\}$, $B' = \{d, e\} \Rightarrow B' \subset A'$

تمرین



۲ \mathbb{N} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزینید که A' هم نامتناهی باشد.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد A' = مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج A =

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزینید که B' متناهی باشد.

$B = \{5, 6, 7, \dots\}$ $B' = \{1, 2, 3, 4\}$

پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزینید و C' را به دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

نامتناهی $C = \{2, 3, 5, 7\}$ $C' = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$

۳ اگر $n(A) = 15$ ، $n(A \cap B) = 5$ و $n(A \cup B) = 30$ ، آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 30 = 15 + n(B) - 5 \Rightarrow n(B) = 20$$

۴ فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند، به طوری که $n(U) = 100$ ، $n(A) = 60$ ، $n(B) = 40$ و $n(A \cap B) = 20$ مطلوب است:

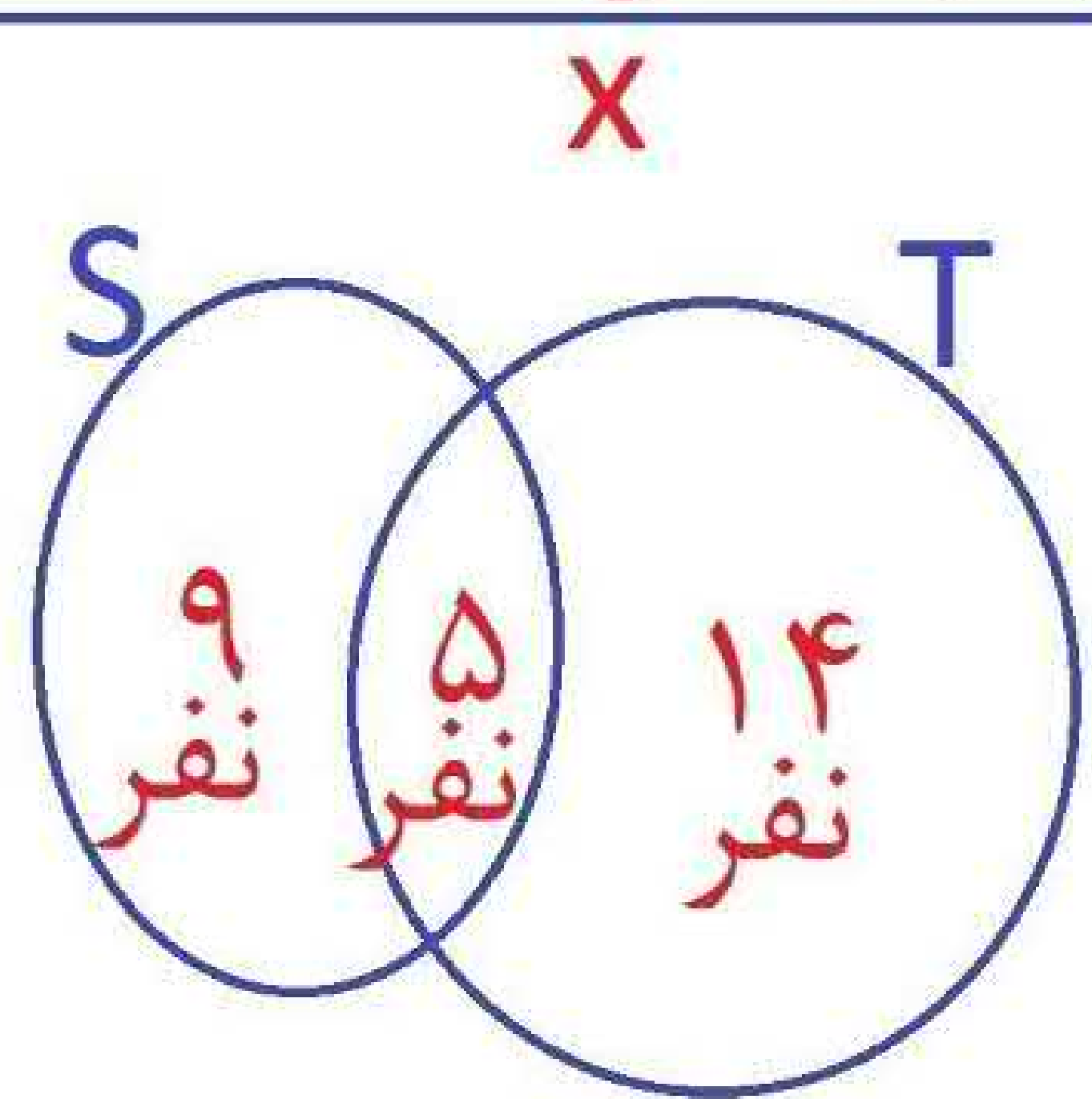
(الف) $n(A \cup B)$ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B) = 60 + 40 - 20 = 80$

(ب) $n(A \cap B')$ $n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 60 - 20 = 40$

(پ) $n(A' \cap B)$ $n(A' \cap B) = n(B \cap A') = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 40 - 20 = 20$

(ت) $n(A' \cap B')$ $n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 80 = 20$

۳۱ نفر U



۵ در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو

گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

(الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند. ۹

(ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند. $x + 14 + 5 + 9 = 31 \Rightarrow x = 3$

۶ در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از

محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند

که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

(الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

حداقل =

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 70 + 57 - 32 = 95$$

به معنای اجتماع

(ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند. $70 - 32 = 38$

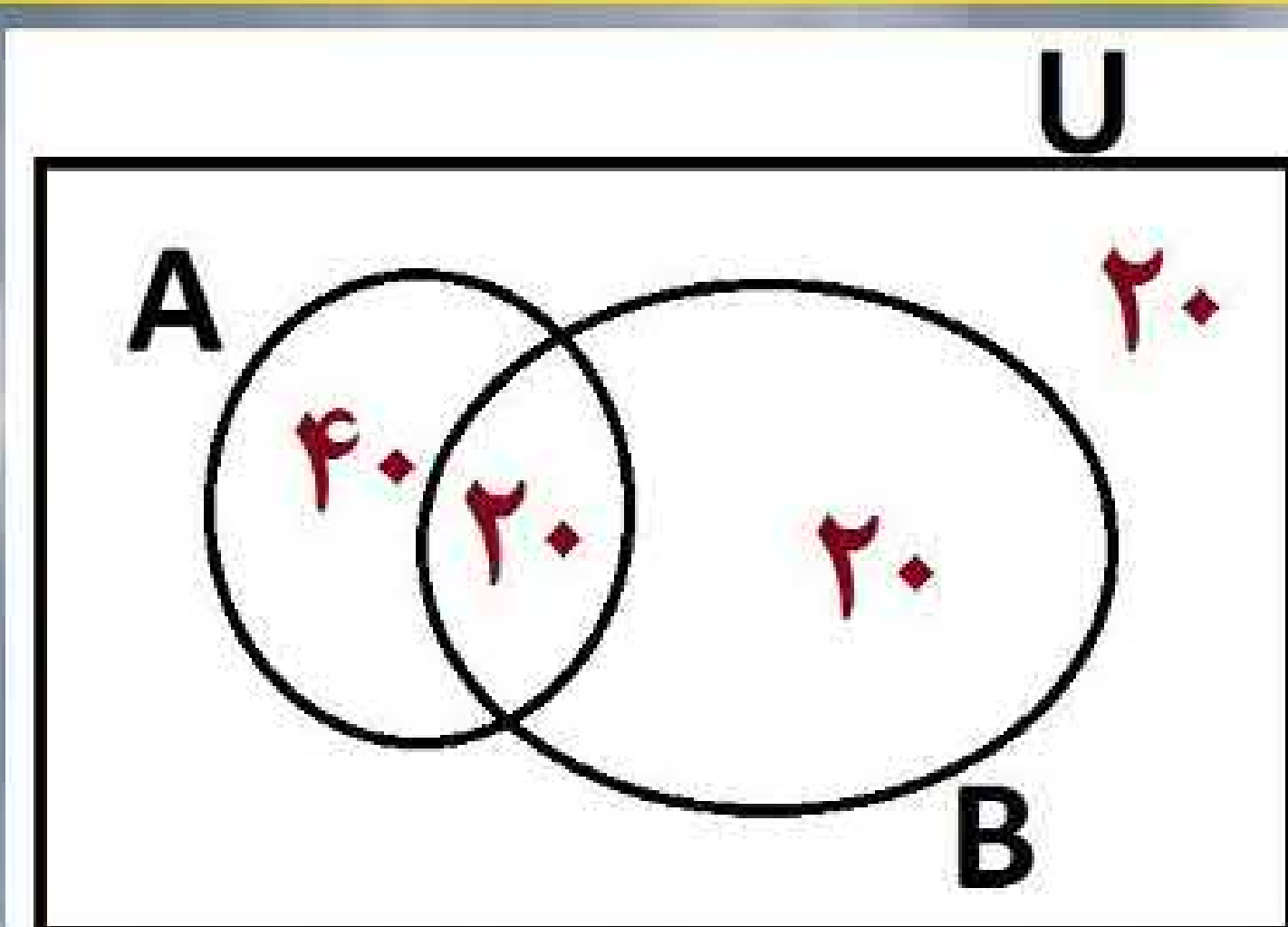
(پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

فقط شرکت B + فقط شرکت A $= (70 - 32) + (57 - 32) = 38 + 25 = 63$

(ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند. $n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = 110 - 95 = 15$



توجه: مسائلی فوق را با شکل راحت‌تر می‌توان پاسخ داد به عنوان نمونه سوال ۴ را مشاهده فرمایید



الف = 20 + 20 + 40
ب = 40
پ = 20
ت = 20