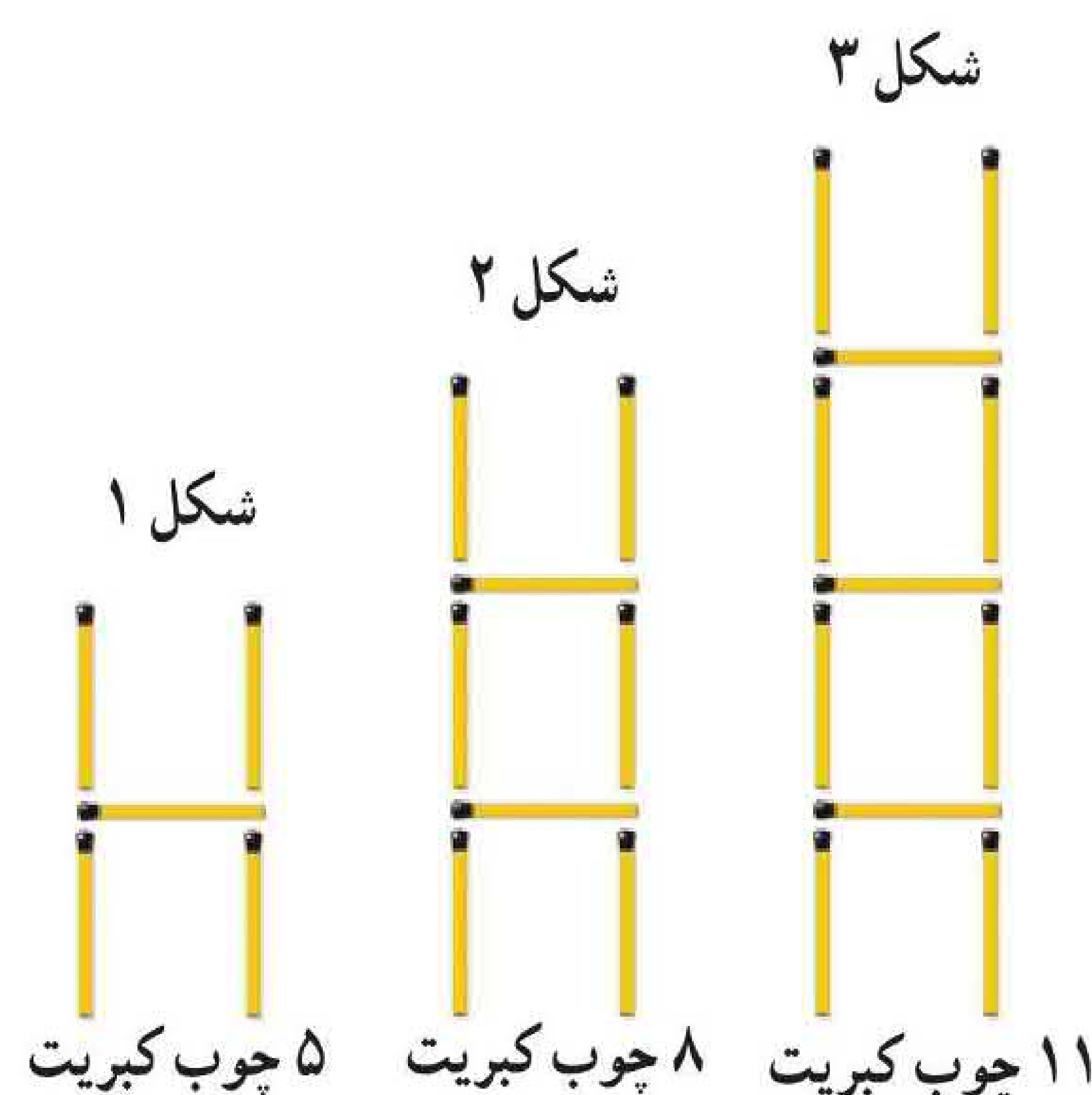


درس سوم: الگو و دنباله

الگو

مثال

به شکل های زیر و تعداد چوب کبریت های به کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید.



n: شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n	...
a_n : تعداد چوب کبریت ها	۵	۸	۱۱	...	...	...	...
رابطه بین a_n و n	$a_1=5$	$a_2=8$	$a_3=11$	...	...	$a_n=...$	...

به عنوان مثال ملاحظه می شود که، «تعداد چوب کبریت های شکل اول برابر ۵ است» که این مطلب را به طور خلاصه به صورت $a_1=5$ نشان داده ایم (می خوانیم: a اندیس ۱ برابر ۵). عبارت های a_1 ، a_2 و a_3 متغیرهای اندیس دار نامیده می شوند که مقادیر آنها به ترتیب ۵، ۸ و ۱۱ است. به این اعداد جملات الگو هم گفته می شود. پس در واقع، عدد ۵ جمله اول الگوست؛ ۸ جمله دوم آن و به همین ترتیب الی آخر.

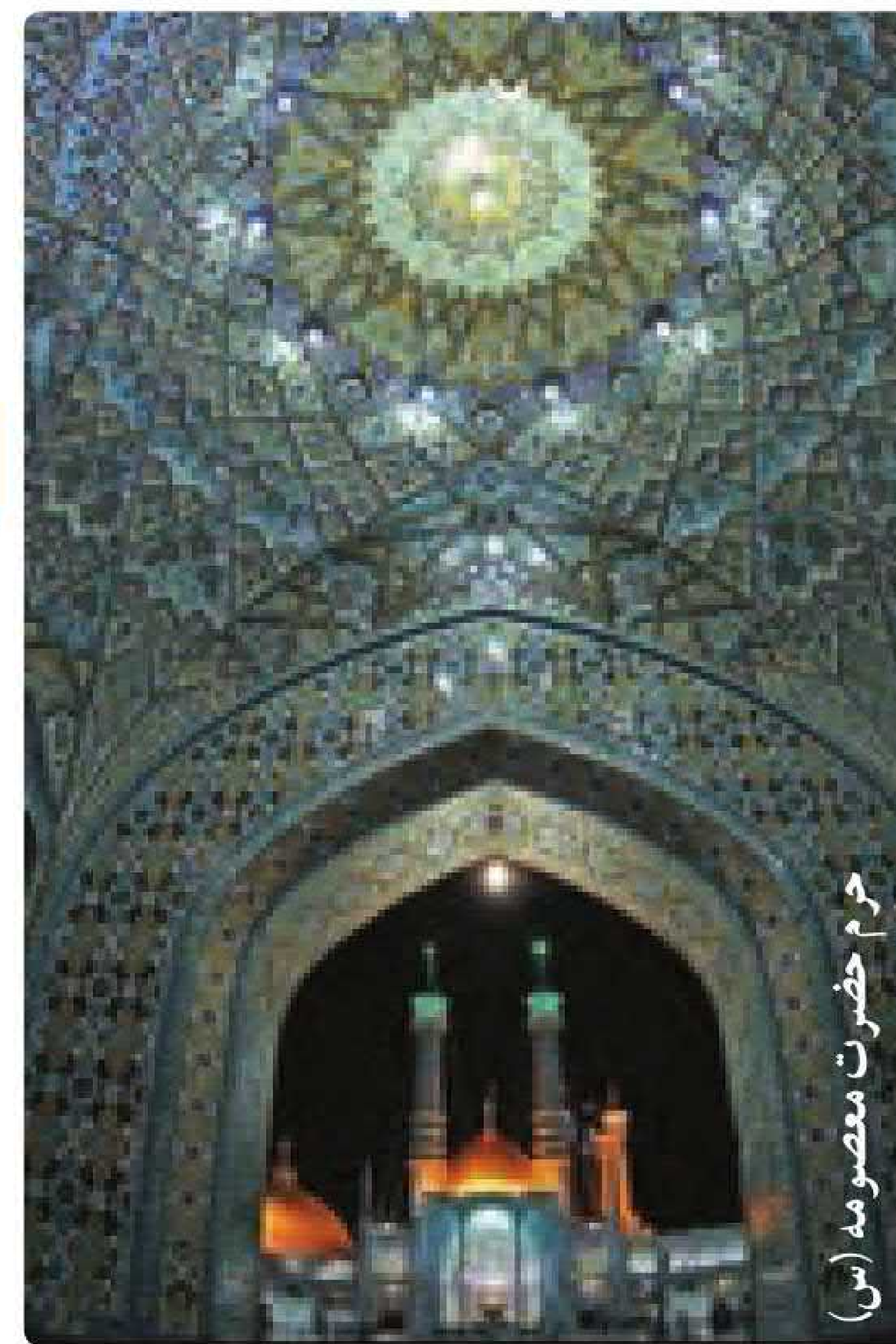
a_1	a_2	a_3
۵	۸	۱۱

الف با این نمادگذاری، a_4 نشان دهنده چیست و مقدار آن چقدر است؟

جمله ی چهارم الگو است که مقدار آن ۱۴ می باشد.

ب a_n به چه معناست؟ جمله ی n ام الگو است.

پ آیا می توانید حاصل a_n را بر حسب n به دست آورید؟ برای این کار فعالیت بعد را انجام دهید.

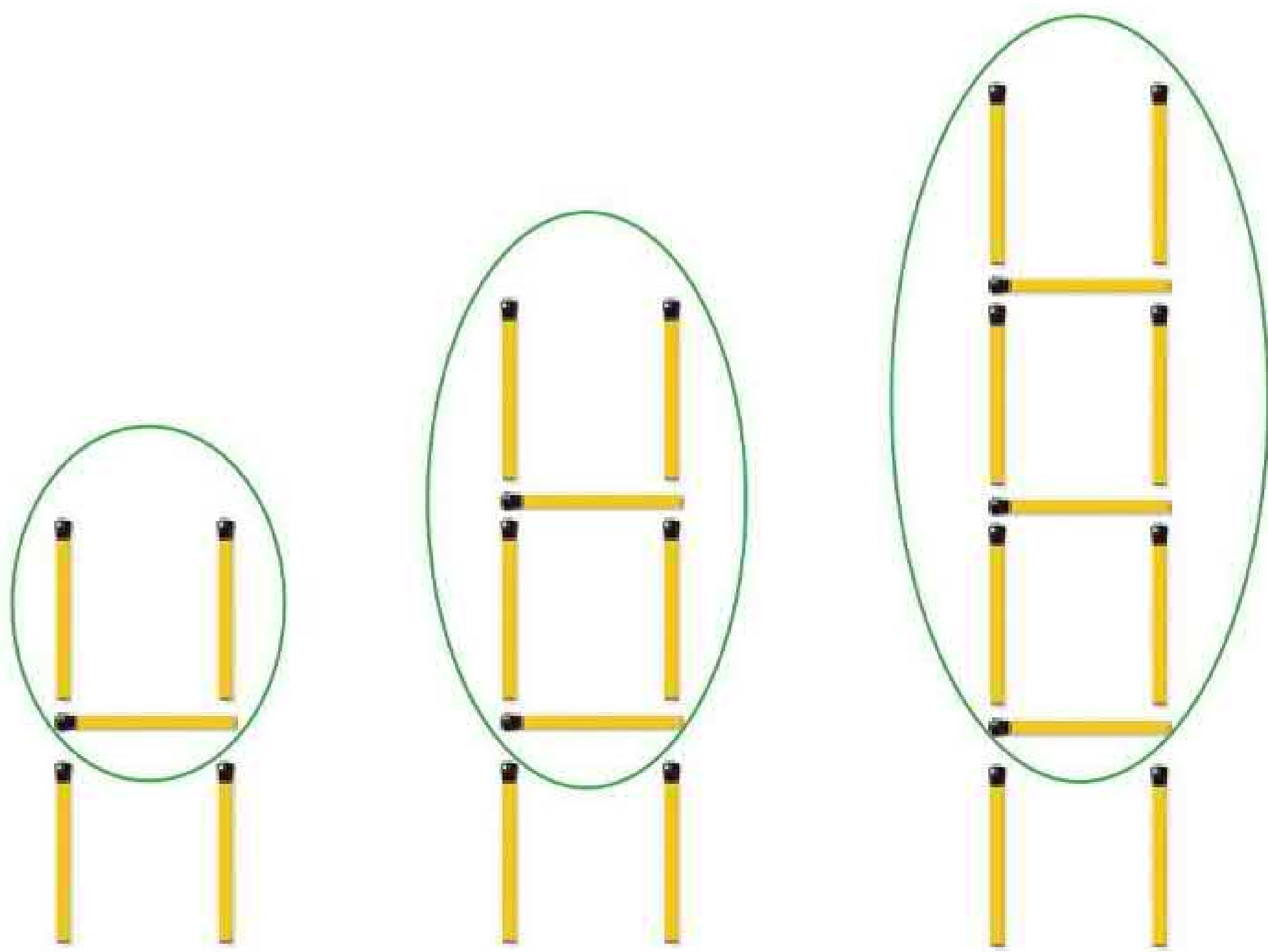


دنیای اطراف ما سرشار از الگوهای مختلفی است. به عنوان نمونه، پیدایش شبانه روز و تغییر فصول مختلف سال جلوه ای از الگوی حاکم بر طبیعت است. از سوی دیگر نظم و قانونمندی های موجود در یک الگو به خودی خود برای ما جذاب است. چه بسا ممکن است طرح های روی یک گل آفتابگردان، شکل های هندسی روی یک سطح کاشی کاری شده یا ماریچ های روی میوه آناناس توجه شما را به خود جلب کرده باشند. به طور کلی می توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است که ممکن است تکرار شوند یا رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشد.

از طرف دیگر یکی از رسالت های مهم ریاضیات، مدل سازی کردن پدیده های طبیعی و پی بردن به الگوهای نهفته در آنهاست. اهمیت این موضوع به قدری است که برخی از ریاضیدانان معتقدند که ریاضی عبارت است از علم مطالعه الگوها.

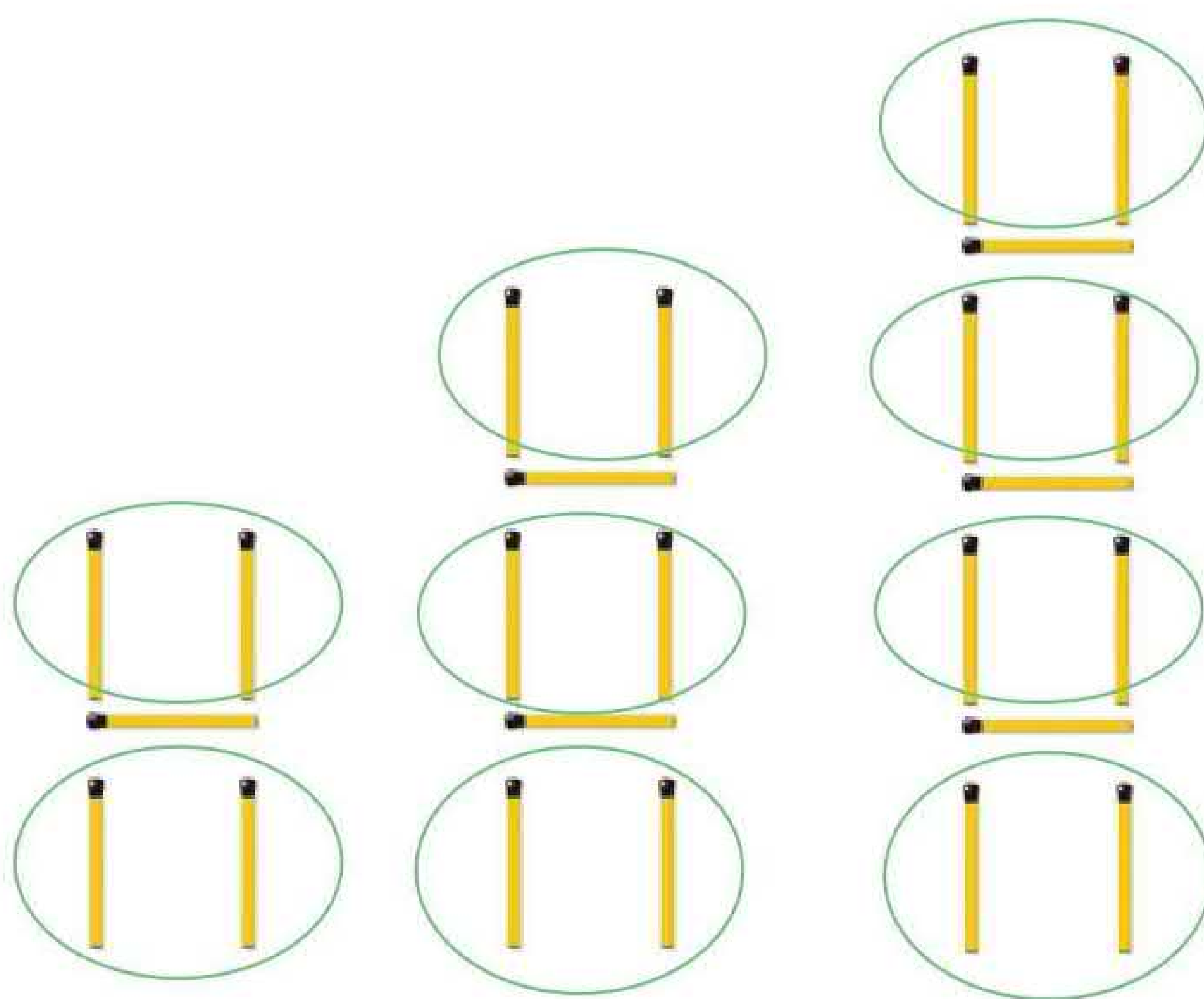
۱- در سال های گذشته با متغیرهایی مثل x ، y و z سروکار داشتیم که اسم آنها تک حرفی بود؛ در حالی که نام متغیرهای اندیس دار که در اینجا به کار می بریم، دو بخشی است. پس تفاوت این دو نوع متغیر، تنها در شکل نام گذاری آنهاست و از نظر ماهیت، تفاوتی با هم ندارند.

۱ آیدا برای به دست آوردن حاصل a_n در مثال بالا، شکل های الگو را به صورت روبه رو در نظر گرفت. به کمک این روش، مقدار a_1 و a_n را به دست آورید.



$$a_1 = 1(3) + 2 \quad a_2 = 2(3) + 2 \quad a_3 = 3(3) + 2 \quad a_4 = 4(3) + 2 \quad \dots \quad a_{10} = 10(3) + 2 \quad \dots \quad a_n = n(3) + 2 = 3n + 2$$

۲ آیساروش دیگری را به کار برد. او تعداد چوب کبریت های افقی و عمودی در هر شکل را به طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار a_n دست یابد. مقدار حاصل برای a_n از این روش را در جای مشخص شده بنویسید.



$$a_1 = 1 + 2(2) \quad a_2 = 2 + 3(2) \quad a_3 = 3 + 4(2) \quad a_4 = 4 + 5(2) \quad \dots \quad a_{10} = 10 + (10+1)2 \quad \dots \quad a_n = n + (n+1)2$$

چوب های عمودی چوب های افقی

$$\Rightarrow a_n = 3n + 2$$

۳ آیا شما راه دیگری را برای به دست آوردن حاصل a_n می دانید؟

$$a_1 = 5 + 0 \times 3 \quad a_2 = 5 + 1 \times 3 \quad a_3 = 5 + 2 \times 3 \quad a_n = 5 + (n-1) \times 3 = 3n + 2$$

۴ همان طور که در قسمت های (۱) و (۲) دیدیم، آیدا و آیساروش به ترتیب به صورت های $a_n = 3n + 2$ و $a_n = n + (n+1)(2)$ به دست آوردند. جواب آیساروش را ساده کنید تا به شکل جواب آیدا درآید.

$$\text{همان جواب آیدا است} \rightarrow a_n = n + 2n + 2 = 3n + 2$$

۵ به کمک رابطه $a_n = 3n + 2$ تعداد چوب کبریت های شکل بیستم را بیابید.

$$n = 20 \Rightarrow a_{20} = 3(20) + 2 = 62$$

۶ با استفاده از رابطه $a_n = 3n + 2$ مشخص کنید که چندمین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.

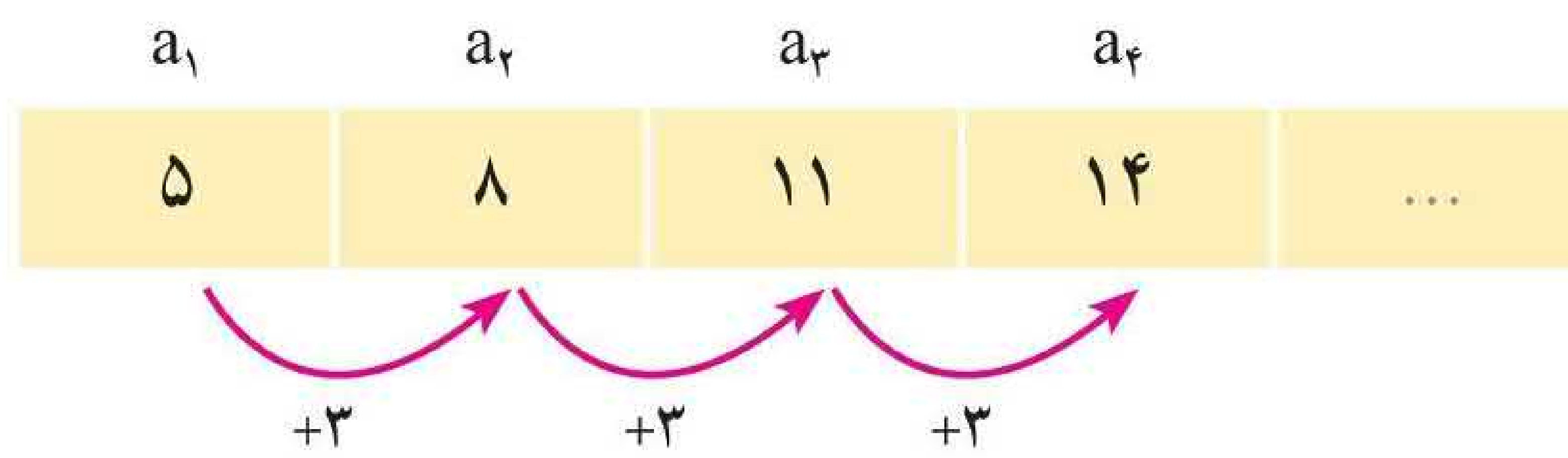
$$a_n = 77 \Rightarrow 3n + 2 = 77 \Rightarrow 3n = 75 \Rightarrow n = 25$$

۲۵ آمین شکل دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.

تذکر: در مثال بالا دیدیم که a_n بیانگر تعداد چوب کبریت های شکل n ام است. $a_n = 3n + 2$ را جمله عمومی الگو می نامیم؛ چرا که این رابطه در واقع ساختار جملات الگو را مشخص می کند و به کمک آن می توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد. به عبارت دیگر، در اختیار داشتن جمله عمومی یک الگو به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگو است.

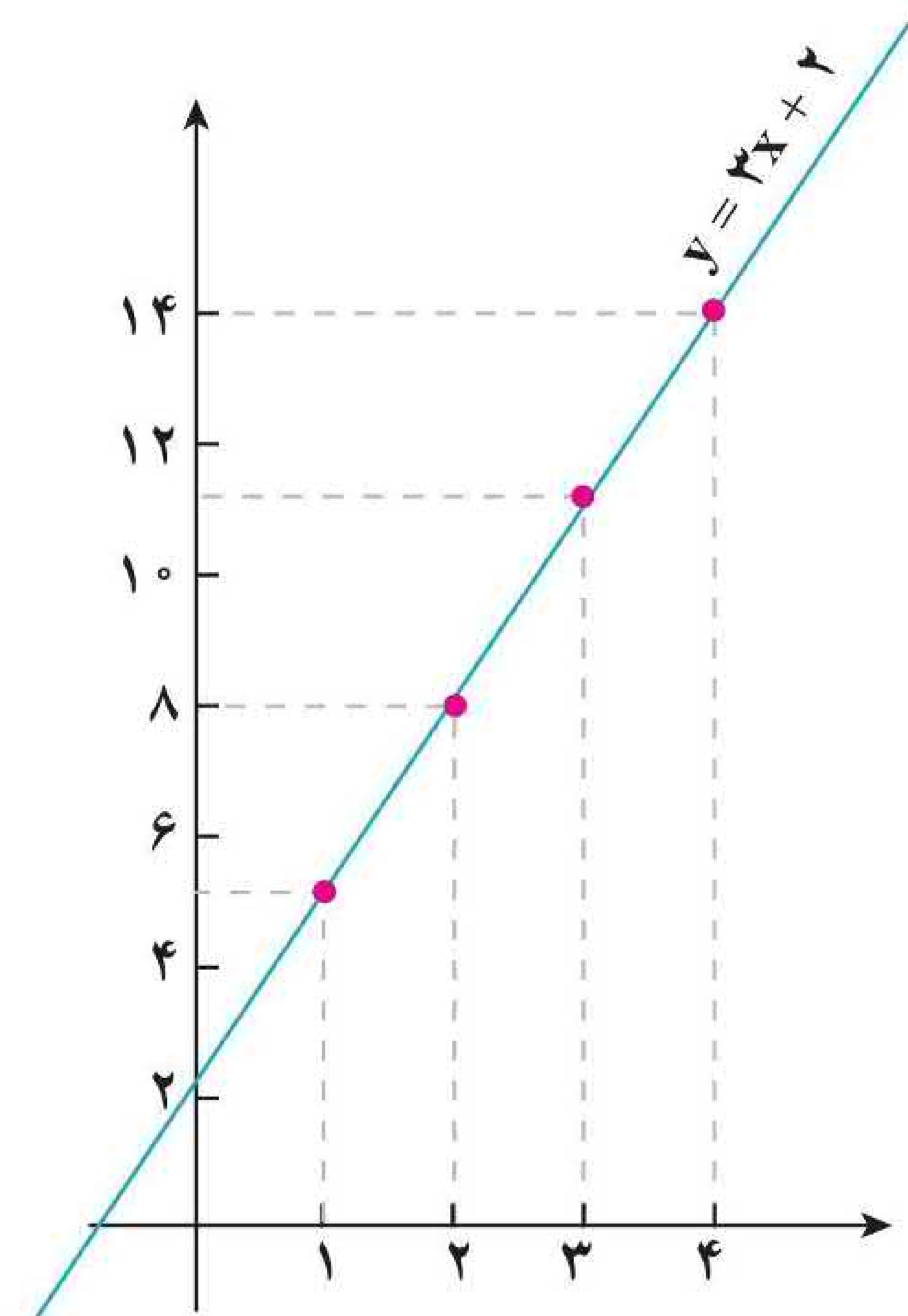
الگوی خطی

در الگوی مثال قبل دیدیم که هر جمله دقیقاً ۳ واحد بیش از جمله قبل از خودش بود.



n	a_n	(n, a_n)
۱	۵	(۱, ۵)
۲	۸	(۲, ۸)
۳	۱۱	(۳, ۱۱)
۴	۱۴	(۴, ۱۴)
...	...	...

چنین الگوهایی را که در آنها اختلاف هر دو جمله متوالی عددی ثابت است، الگوهای خطی می‌نامیم. برای پی بردن به دلیل این نام‌گذاری، ستون سوم جدول مقابل را در نظر می‌گیریم. اگر این نقاط را در صفحه مختصات مشخص کنیم، همگی آنها روی خط $y=3x+2$ قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر مختصات تمام این نقاط در معادله خط گفته شده صدق می‌کند. شباهت بین معادله خط یعنی $y=3x+2$ و جمله عمومی الگو یعنی $a_n=3n+2$ اتفاقی نیست. عدد ۳ که در واقع اختلاف بین جملات متوالی الگو بود، در معادله خط به عنوان شیب خط ظاهر شده است که این مطلب همواره درست است.



به طور کلی الگوهایی را که جمله عمومی آنها به صورت $t_n = an + b$ است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

دیدیم که در یک الگوی خطی با جمله عمومی $t_n = an + b$ ، میزان تغییر جملات متوالی برابر a بود. به عبارت دیگر، اختلاف هر دو جمله متوالی در این الگوی خطی برابر ضریب n است. به عنوان مثال در یک الگوی خطی با جمله عمومی $t_n = -4n + 15$ ، هر جمله نسبت به جمله قبل از خودش ۴ واحد کاهش می‌یابد:

$11, 7, 3, -1, -5, -9, \dots$

مثال

در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشند. جمله عمومی الگو را بیابید.

حل: فرض کنیم جمله عمومی به صورت $C_n = an + b$ باشد. پس داریم:

$$C_4 = 17 \Rightarrow a(4) + b = 17$$

$$C_{10} = 41 \Rightarrow a(10) + b = 41$$

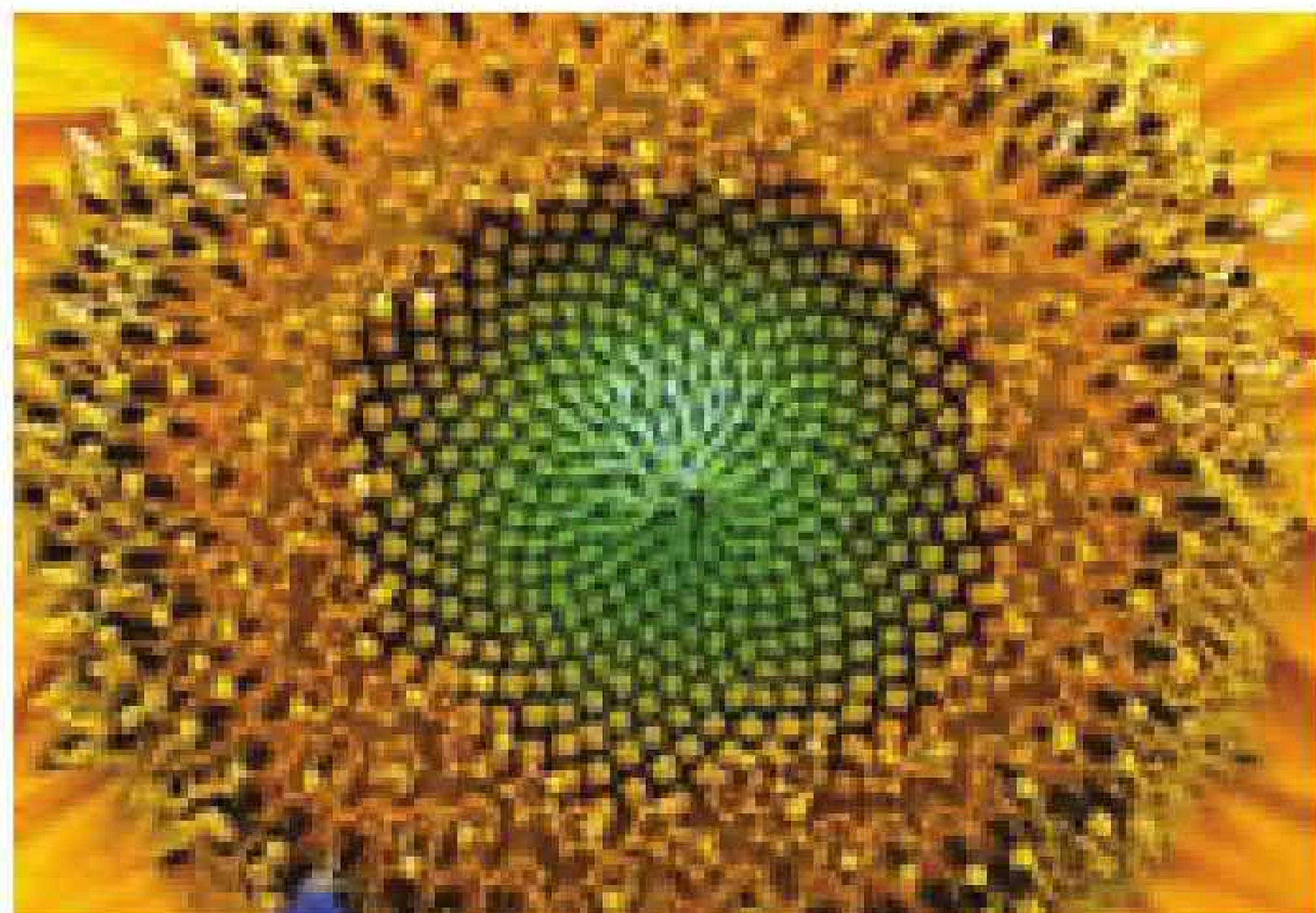
$$\underline{6a = 24} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 1$$

پس $C_n = 4n + 1$. بنابراین جملات الگو به صورت زیر خواهند بود:

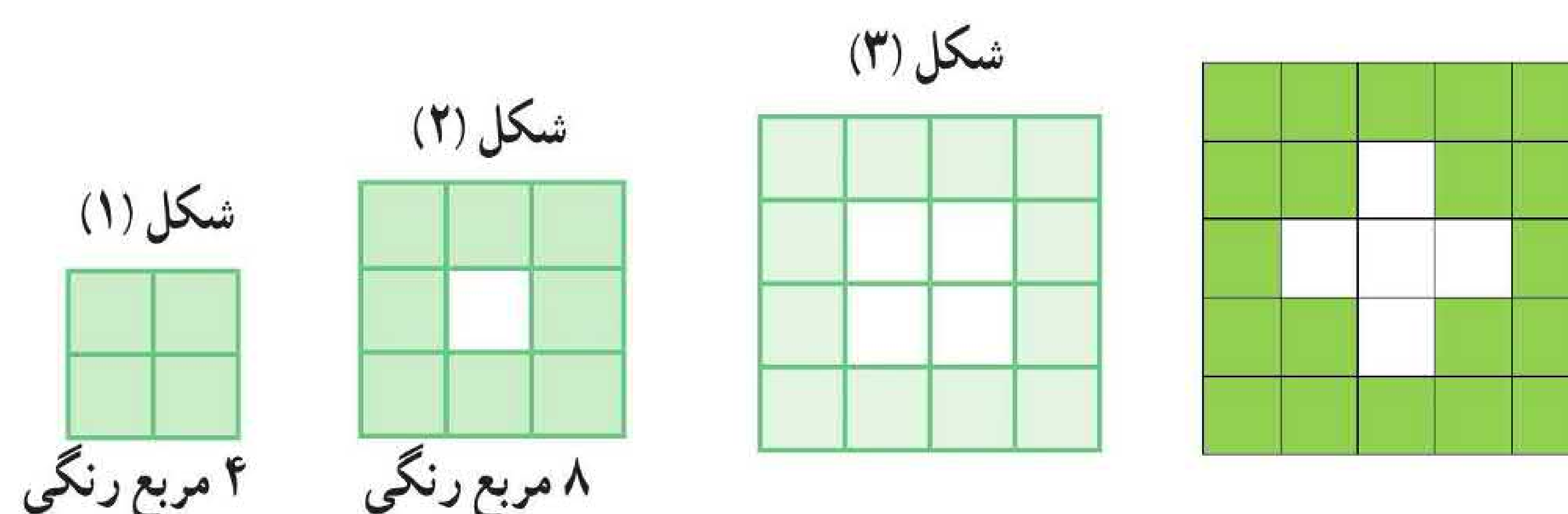
$5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, \dots$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{C_4} \qquad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{C_{10}}$





۱ شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.



n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
b_n : تعداد مربع های رنگی	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
رابطه بین n و b_n	$b_1 = 4$	$b_2 = 8$	$b_3 = 12$	$b_4 = 16$	$b_5 = 20$

۲ توضیح دهید که چرا این الگو یک الگوی خطی محسوب می شود.
چون اختلاف هر دو جمله ی متوالی در آن ، عددی ثابت است.

۳ با توجه به میزان افزایش جملات الگو، مقدار a در رابطه $b_n = an + h$ را بیابید و پس از حدس زدن مقدار h، حاصل b_n را به دست آورید.

اختلاف هر دو جمله ی متوالی برابر ۴ است پس $a=4$ و $h=0$ ، پس : $b_n = 4n$

۴ شکل شماره ۲۵۰ دارای چند مربع رنگی است؟

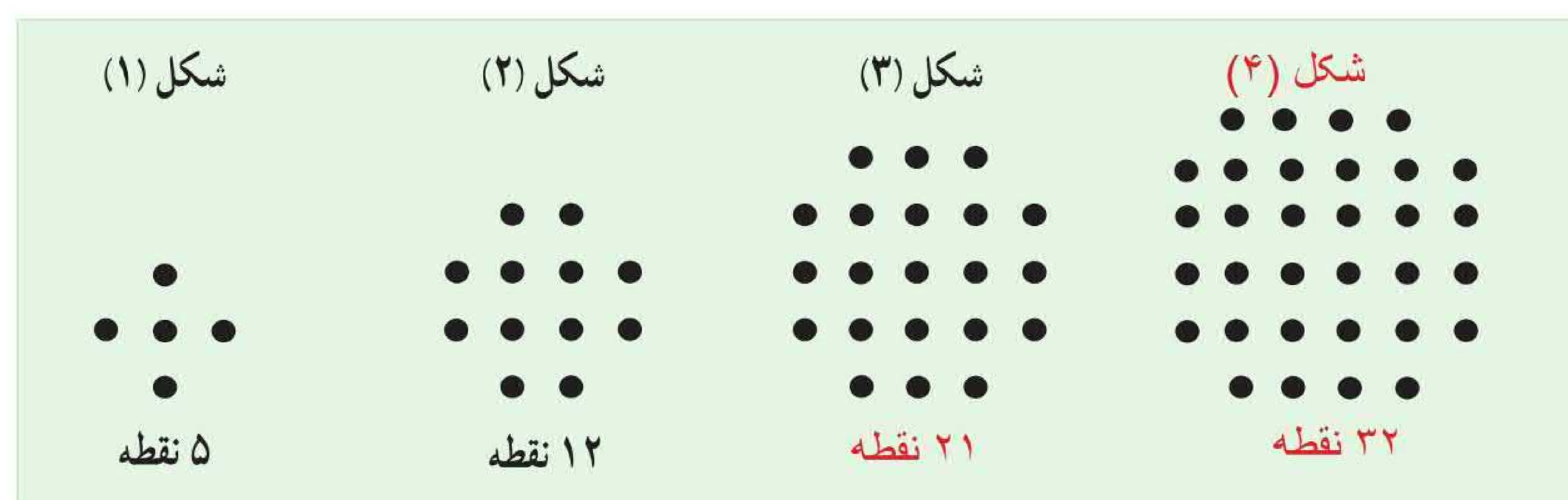
$$b_n = 4n \xrightarrow{n=250} b_{250} = 1000$$

۵ در چه مرحله ای از الگوی بالا، تعداد مربع های رنگی برابر ۱۴۴ است؟
 $b_n = 144 \Rightarrow 4n = 144 \Rightarrow n = 36$
یعنی در مرحله ی ۳۶ ام ، ۱۴۴ مربع رنگی داریم .

الگوهای غیر خطی

فعالیت

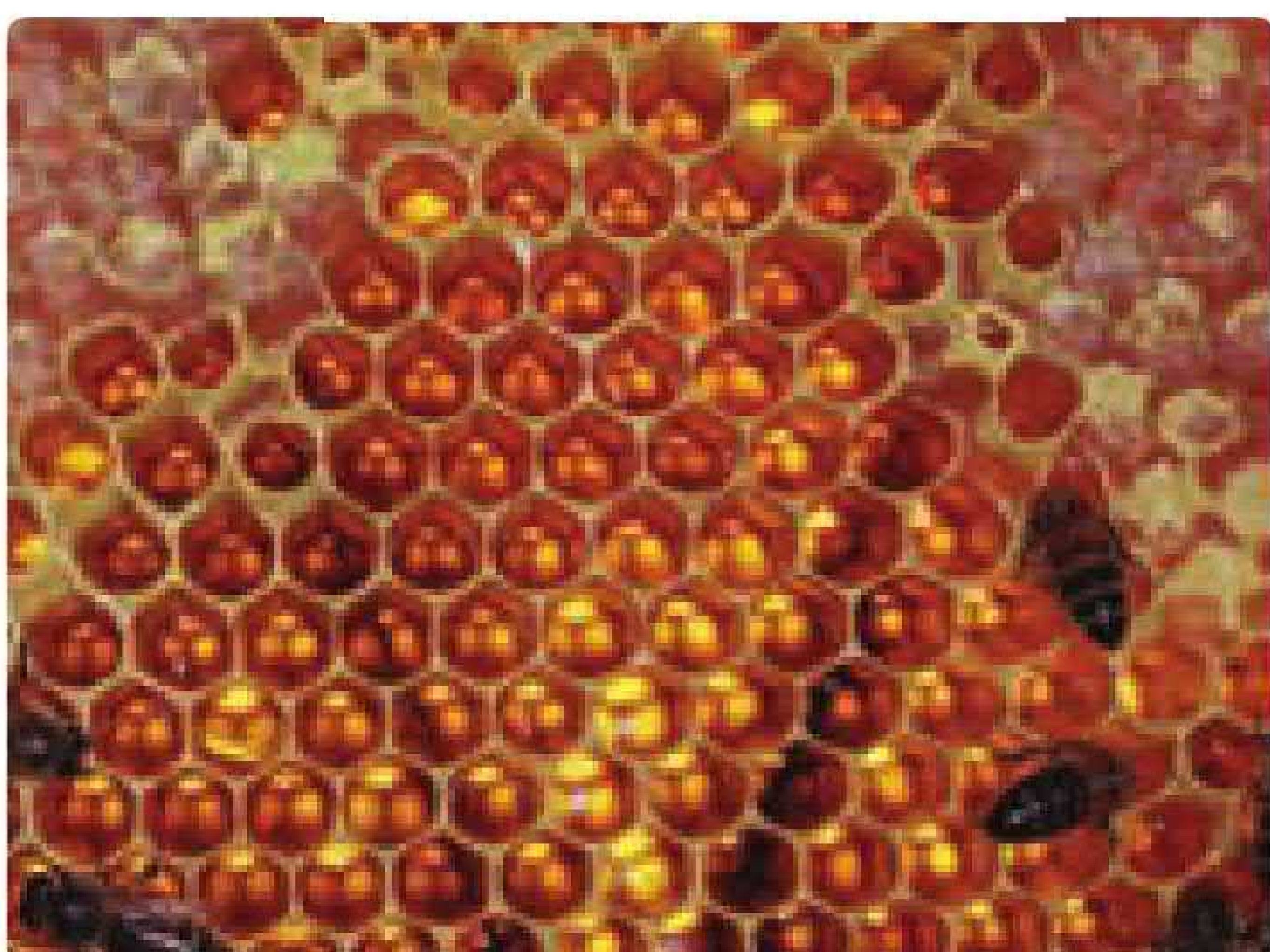
۱ در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید.



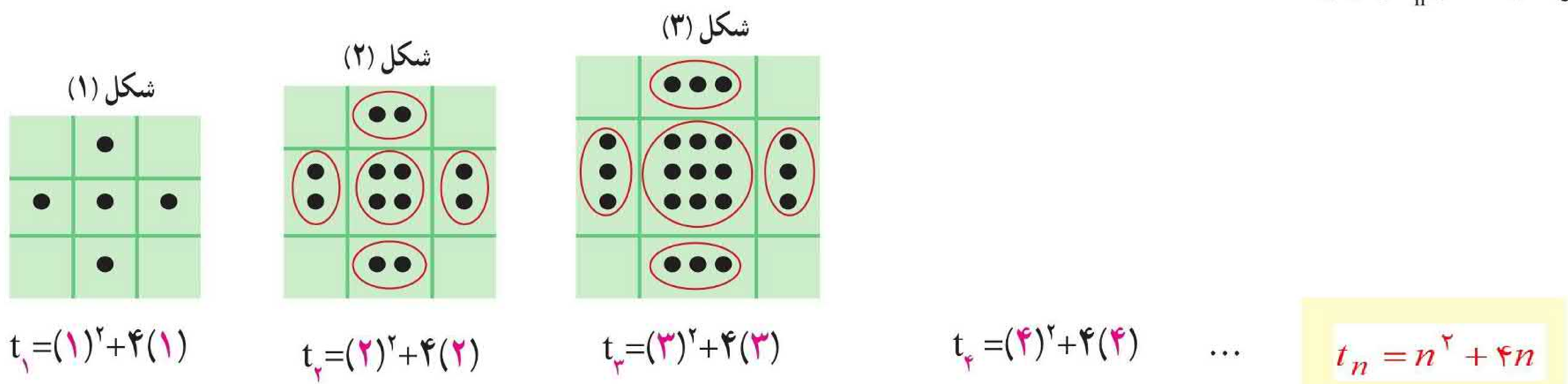
n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
t_n : تعداد نقطه ها	۵	۱۲	۲۱	۳۲	
رابطه بین n و t_n	$t_1 = 5$	$t_2 = 12$	$t_3 = 21$	$t_4 = 32$	

۲ آیا این الگو یک الگوی خطی است؟ چرا؟

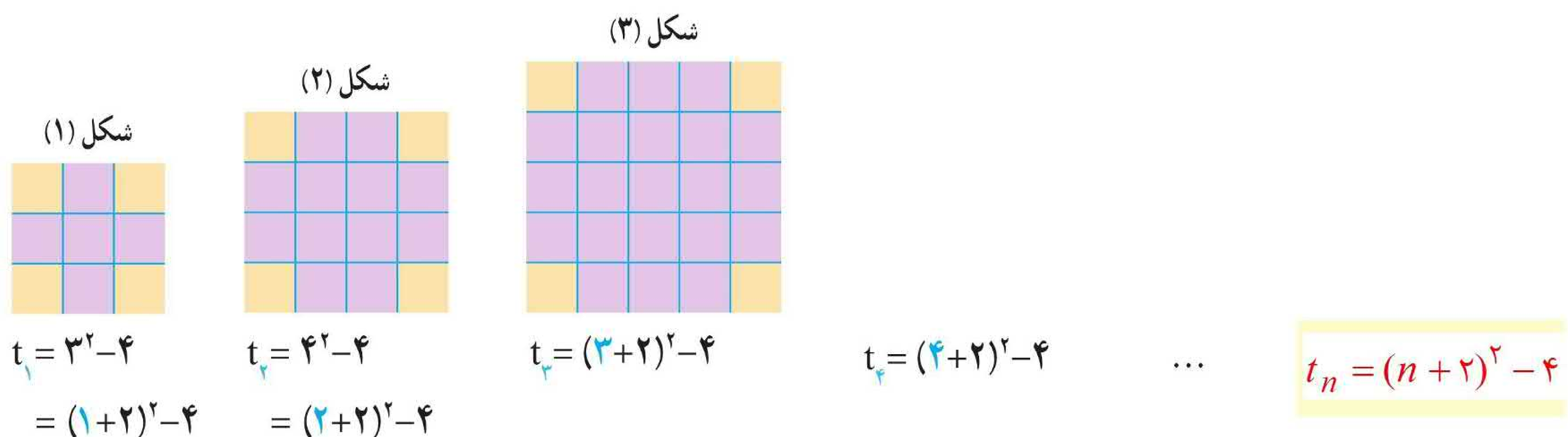
خیر ، زیرا اختلاف هر دو جمله ی متوالی ، عددی ثابت نیست .



۳. امیررضا برای یافتن جمله عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را به صورت زیر دسته‌بندی کرد. از شکل‌های امیررضا کمک بگیرید و مقدار t_n را بیابید.



۴. امیرمحمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را به صورت زیر نظیر کرد. با استفاده از این شکل‌ها مقدار t_n را بنویسید.



۵. نشان دهید که دو مقدار به دست آمده برای t_n در دو قسمت قبلی، برابرند.

جواب امیررضا: $t_n = (n+2)^2 - 4 = n^2 + 4n + 4 - 4 = n^2 + 4n \Rightarrow$ جواب امیرمحمد

۶. آیا شما روش دیگری برای یافتن t_n می‌شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

دنباله

در بخش قبل برای برخی الگوهای هندسی داده شده، یک الگوی عددی نظیر کردیم. به عنوان نمونه در فعالیت قبل، تعداد نقاط مربوط به شکل‌های متوالی الگو به صورت زیر بود:

۵, ۱۲, ۲۱, ۳۲, ۴۵,

این آرایش از اعداد، مثالی از یک دنباله است.

هر تعداد عدد را که پشت سرهم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

توجه داریم که ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند. مشابه صفحات قبل، جمله اول این دنباله را با t_1 ، جمله دوم را با t_2 و به همین ترتیب جمله n ام یا جمله عمومی آن را با t_n نمایش می‌دهیم. پس:

$$t_1 = 5, t_2 = 12, t_3 = 21, \dots, t_n = n^2 + 4n, \dots$$

گفتنی است که این دنباله یک دنباله درجه ۲ نامیده می‌شود؛ زیرا جمله عمومی آن یک چند جمله‌ای درجه دوم است.

کار در کلاس

۱ دو دنباله دلخواه مثال بنویسید. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$: دنباله فیبوناچی

$2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$: دنباله اعداد طبیعی زوج

۲ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

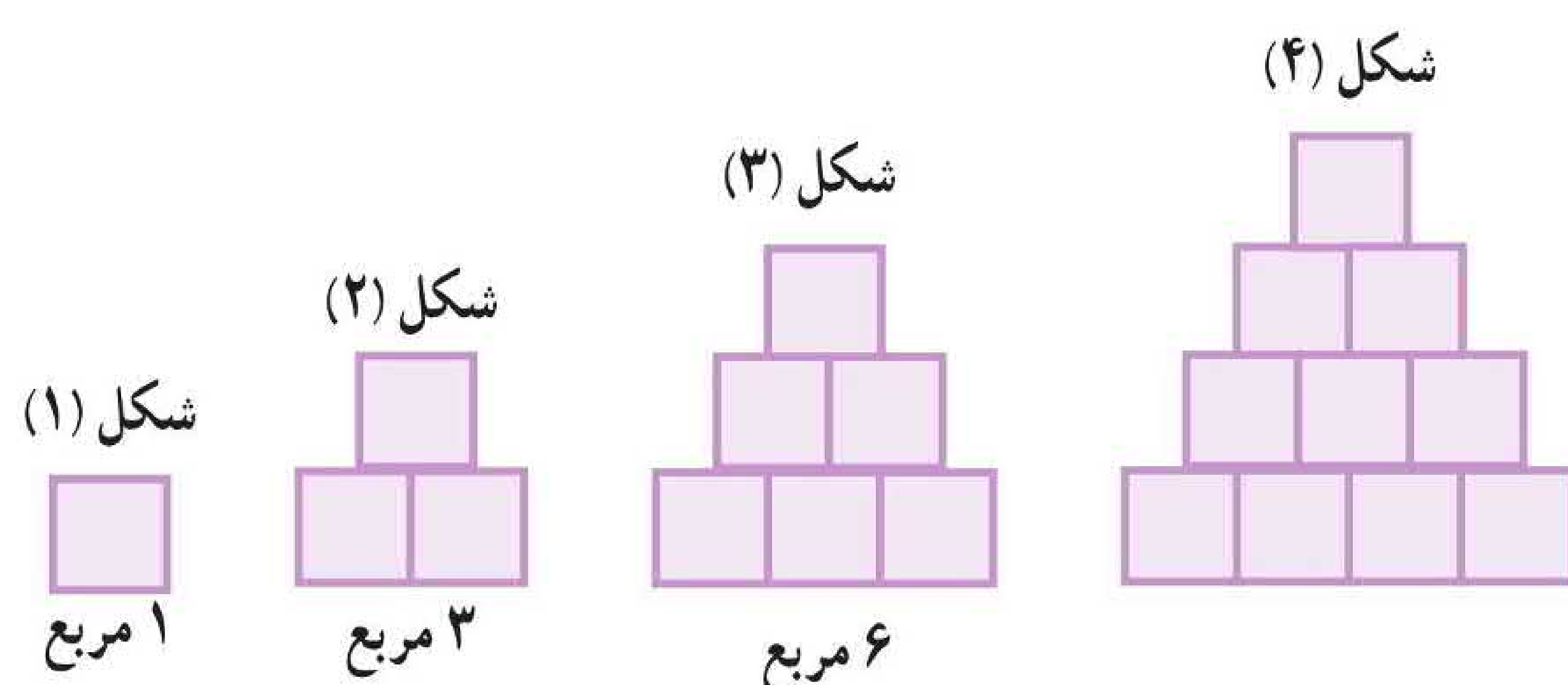
الف) $a_n = n^2 - 1$: $0, 3, 8, 15, 24$

ب) $b_n = -n + 4$: $3, 2, 1, 0, -1, -2$

ج) $c_n = -13 + 2n$: $-11, -9, -7, -5, -3$

۳ در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید جمله عمومی دنباله را نیز حدس بنویسید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	...	t_n	...
-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	...	-n	...
1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{13}$	...	$\sqrt{2n-1}$	...
1	4	9	16	25	36	49	...	n^2	...
0/1	0/01	0/001	0/0001	0/00001	0/000001	0/0000001	...	$(0/1)^n$	...
-1	8	-27	64	-125	216	-343	...	$(-1)^n n^3$	...
5	18	31	44	57	70	83	...	...	...
-2	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{32}$	...	...	...
1	2	4	7	11	16	23	...	...	...
3	1	4	1	5	1	6	...	...	...
1	1	2	3	5	8	13	...	...	...
2	3	5	7	11	13	17	...	...	...



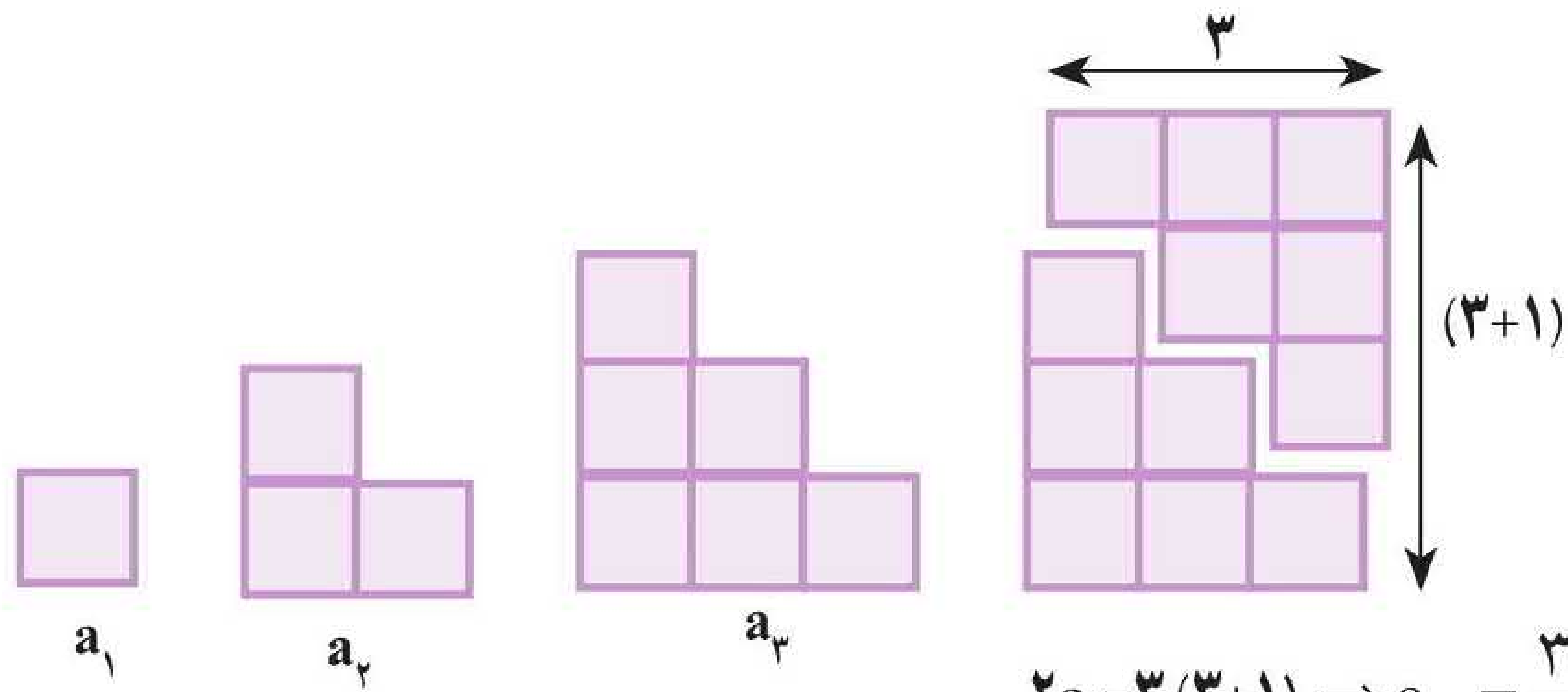
۴ الگوی مقابل را در نظر بگیرید.

الف) تعداد مربع‌ها در الگو را به صورت یک دنباله تا جمله ششم

آن بنویسید. $1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$ (دنباله مثلثی)

ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ **خیر** چرا؟

چون اختلاف هر دو جمله ی متوالی آن، عددی ثابت نیست.



$$2a_3 = 3(3+1) \Rightarrow a_3 = \frac{3(3+1)}{2} \Rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(پ) شکل های الگوی بالا را به صورت مقابل تبدیل می کنیم.
با دقت در تصویر مقابل سعی کنید حاصل a_n را بر حسب n به دست آورید.

(ت) به کمک مرحله قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.

همان جمله ی n ام مرحله ی قبلی است. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

تمرین

۱ به الگوی زیر توجه کنید.



(الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی های تیره آن را مشخص کنید. ۱۲ کاشی تیره

(ب) تعداد کاشی های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید. $6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots$

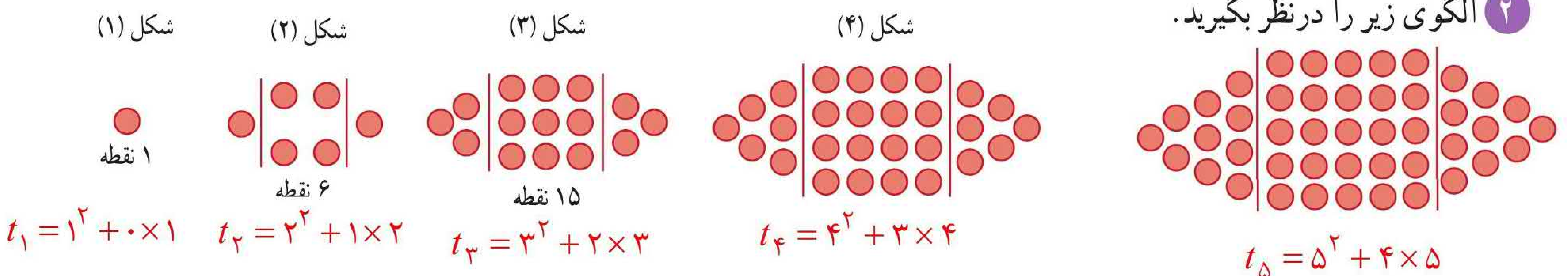
(پ) اگر n تعداد کاشی های سفید و t_n تعداد کاشی های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید. $t_n = 2(n+2) = 2n+4$

(ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟ $t_{100} = 2 \times 100 + 4 = 204$

(ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ بله اگر هست، تعداد کاشی های سفید آن چند است؟

تعداد کاشی های سفید ۲۳ است. $t_n = 50 \Rightarrow 2n + 4 = 50 \Rightarrow 2n = 46 \Rightarrow n = 23$

۲ الگوی زیر را در نظر بگیرید.



(الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید. $1, 6, 15, 24, 35, 46, \dots$

(ب) جمله عمومی الگو را بیابید. $t_n = n^2 + (n-1)n \Rightarrow t_n = 2n^2 - n$

(پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟ $t_{10} = 2 \times 10^2 - 10 = 190$

۳ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی

نظیر کنید. (الف) $a_n = 4n$ (ب) $b_n = 3n+1$ (پ) $c_n = n^2+2$ (ت) $d_n = n^2+n$
... و ۱۶ و ۱۲ و ۸ و ۴ ... و ۱۰ و ۷ و ۴ ... و ۱۸ و ۱۱ و ۶ و ۳ ... و ۲۰ و ۱۲ و ۶ و ۲

۴ برای دنباله های درجه دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله عمومی هر دنباله را بیابید.

(الف) $5, 8, 13, 20, 29, \dots$

(ب) $5, 12, 22, 35, 51, \dots$

یاد آوری: دنباله $1, 3, 6, 10, \dots$ مثلثی

با جمله عمومی $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ است.

بنابراین $t_n = (n+1)^2 + a_n$ و در نتیجه:

$$t_n = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)}{2}$$