

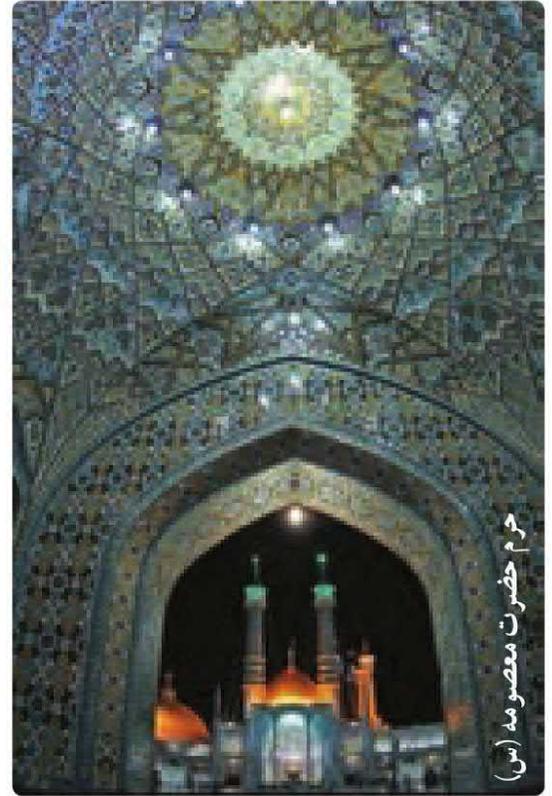
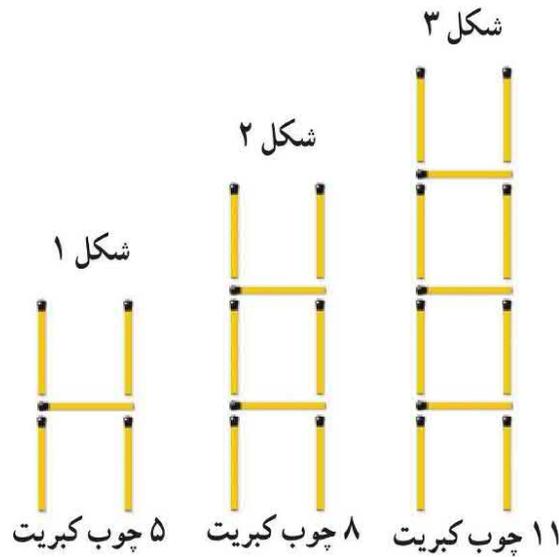
تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس سوم: الگو و دنباله

الگو

مثال

به شکل های زیر و تعداد چوب کبریت های به کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید.

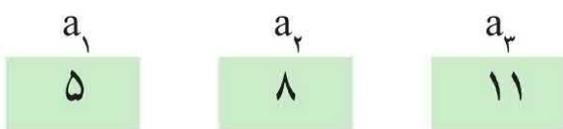


دنیای اطراف ما سرشار از الگوهای مختلفی است. به عنوان نمونه، پیدایش شبانه روز و تغییر فصول مختلف سال جلوه ای از الگوی حاکم بر طبیعت است. از سوی دیگر نظم و قانونمندی های موجود در یک الگو به خودی خود برای ما جذاب است. چه بسا ممکن است طرح های روی یک گل آفتابگردان، شکل های هندسی روی یک سطح کاشی کاری شده یا ماریچک های روی میوه آناناس توجه شما را به خود جلب کرده باشند. به طور کلی می توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است که ممکن است تکرار شوند یا رشد کننده یا ترکیبی از این دو باشد.

از طرف دیگر یکی از رسالت های مهم ریاضیات، مدل سازی کردن پدیده های طبیعی و پی بردن به الگوهای نهفته در آنهاست. اهمیت این موضوع به قدری است که برخی از ریاضیدانان معتقدند که ریاضی عبارت است از علم مطالعه الگوها.

n: شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n	...
a _n : تعداد چوب کبریت ها	۵	۸	۱۱
رابطه بین n و a _n	a _۱ =۵	a _۲ =۸	a _۳ =۱۱	a _n =...	...

به عنوان مثال ملاحظه می شود که، «تعداد چوب کبریت های شکل اول برابر ۵ است» که این مطلب را به طور خلاصه به صورت $a_1=5$ نشان داده ایم (می خوانیم: a اندیس ۱ برابر ۵). عبارت های a_1, a_2, a_3 متغیرهای اندیس دار نامیده می شوند که مقادیر آنها به ترتیب ۵، ۸ و ۱۱ است. به این اعداد جملات الگو هم گفته می شود. پس در واقع، عدد ۵ جمله اول الگوست؛ ۸ جمله دوم آن و به همین ترتیب الی آخر.



الف) با این نمادگذاری، a_n نشان دهنده چیست و مقدار آن چقدر است؟

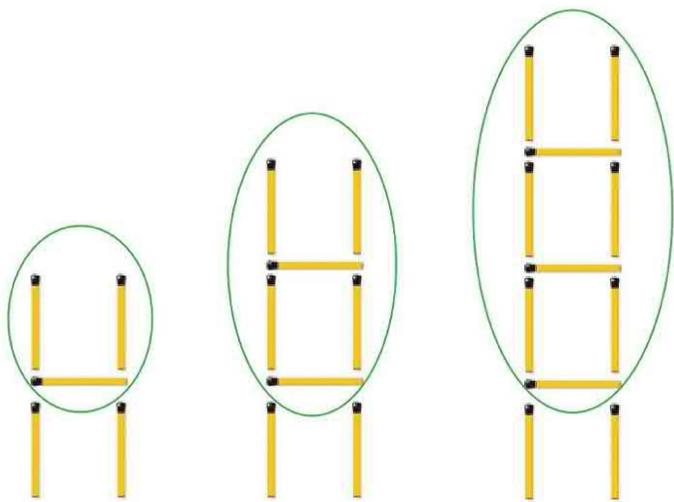
جمله ی چهارم الگو است که مقدار آن ۱۴ می باشد.

ب) a_n به چه معناست؟ جمله ی n ام الگو است.

پ) آیا می توانید حاصل a_n را بر حسب n به دست آورید؟ برای این کار فعالیت بعد را انجام دهید.

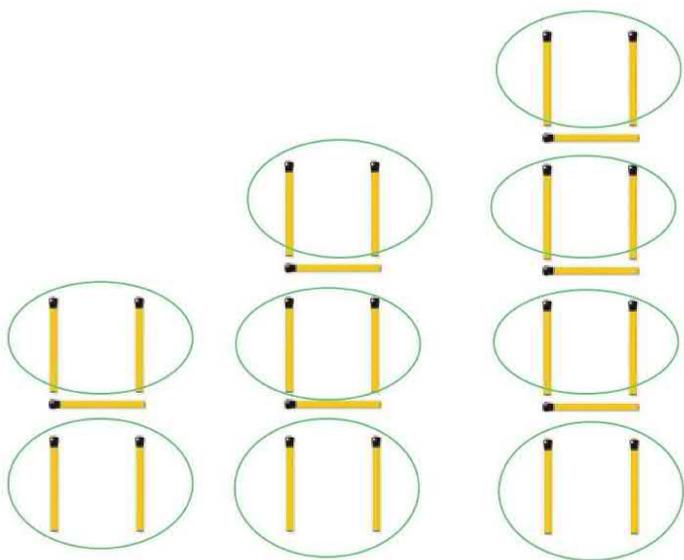
۱- در سال های گذشته با متغیرهایی مثل x, y, z سروکار داشتیم که اسم آنها تک حرفی بود؛ در حالی که نام متغیرهای اندیس دار که در اینجا به کار می بریم، دو بخشی است. پس تفاوت این دو نوع متغیر، تنها در شکل نام گذاری آنهاست و از نظر ماهیت، تفاوتی با هم ندارند.

۱ آیدا برای به دست آوردن حاصل a_n در مثال بالا، شکل های الگو را به صورت روبه رو در نظر گرفت. به کمک این روش، مقدار a_1 و a_n را به دست آورید.



$$a_1 = 1(3) + 2 \quad a_2 = 2(3) + 2 \quad a_3 = 3(3) + 2 \quad a_4 = 4(3) + 2 \quad \dots \quad a_{10} = 10(3) + 2 \quad \dots \quad a_n = n(3) + 2 = 3n + 2$$

۲ آیساروش دیگری را به کار برد. او تعداد چوب کبریت های افقی و عمودی در هر شکل را به طور جداگانه مورد توجه قرار داد تا بتواند به مقدار a_n دست یابد. مقدار حاصل برای a_n از این روش را در جای مشخص شده بنویسید.



$$a_1 = 1 + 2(2) \quad a_2 = 2 + 3(2) \quad a_3 = 3 + 4(2) \quad a_4 = 4 + 5(2) \quad \dots \quad a_{10} = 10 + (10+1)2 \quad \dots \quad a_n = n + (n+1)2$$

چوب های عمودی چوب های افقی

$$\Rightarrow a_n = 3n + 2$$

۳ آیا شما راه دیگری را برای به دست آوردن حاصل a_n می دانید؟

$$a_1 = 5 + 0 \times 3 \quad a_2 = 5 + 1 \times 3 \quad a_3 = 5 + 2 \times 3 \quad a_n = 5 + (n-1) \times 3 = 3n + 2$$

۴ همان طور که در قسمت های (۱) و (۲) دیدیم، آیدا و آيسا مقدار a_n را به ترتیب به صورت های $a_n = 3n + 2$ و $a_n = n + (n+1)(2)$ به دست آوردند. جواب آيسا را ساده کنید تا به شکل جواب آیدا درآید.

همان جواب آیدا است $\rightarrow a_n = n + 2n + 2 = 3n + 2$ جواب آيسا

۵ به کمک رابطه $a_n = 3n + 2$ تعداد چوب کبریت های شکل بیستم را بیابید.

$$n = 20 \Rightarrow a_{20} = 3(20) + 2 = 62$$

۶ با استفاده از رابطه $a_n = 3n + 2$ مشخص کنید که چندمین شکل در الگوی بالا دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.

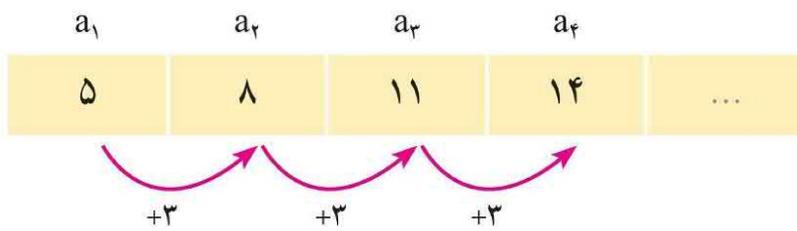
$$a_n = 77 \Rightarrow 3n + 2 = 77 \Rightarrow 3n = 75 \Rightarrow n = 25$$

۲۵ امین شکل دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.

تذکر: در مثال بالا دیدیم که a_n بیانگر تعداد چوب کبریت های شکل n ام است. $a_n = 3n + 2$ را جمله عمومی الگو می نامیم؛ چرا که این رابطه در واقع ساختار جملات الگو را مشخص می کند و به کمک آن می توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد. به عبارت دیگر، در اختیار داشتن جمله عمومی یک الگو به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگو است.

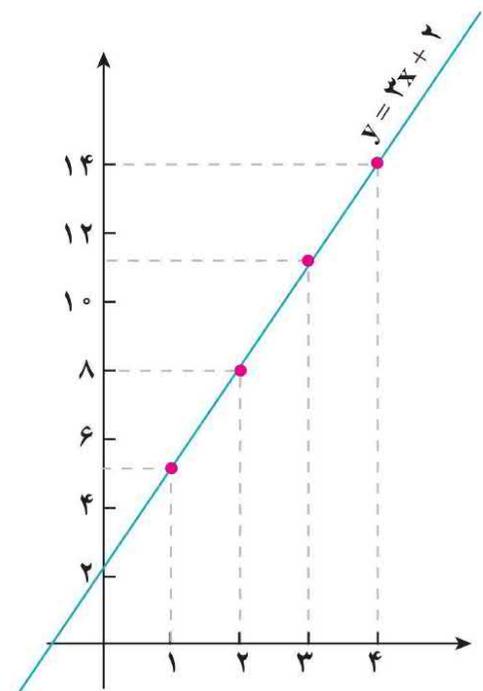
الگوی خطی

در الگوی مثال قبل دیدیم که هر جمله دقیقاً ۳ واحد بیش از جمله قبل از خودش بود.



n	a_n	(n, a_n)
۱	۵	(۱, ۵)
۲	۸	(۲, ۸)
۳	۱۱	(۳, ۱۱)
۴	۱۴	(۴, ۱۴)
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮

چنین الگوهایی را که در آنها اختلاف هر دو جمله متوالی عددی ثابت است، الگوهای خطی می‌نامیم. برای بی بردن به دلیل این نام‌گذاری، ستون سوم جدول مقابل را در نظر می‌گیریم. اگر این نقاط را در صفحه مختصات مشخص کنیم، همگی آنها روی خط $y=3x+2$ قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر مختصات تمام این نقاط در معادله خط گفته شده صدق می‌کند. شباهت بین معادله خط یعنی $y=3x+2$ و جمله عمومی الگو یعنی $a_n=3n+2$ اتفاقی نیست. عدد ۳ که در واقع اختلاف بین جملات متوالی الگو بود، در معادله خط به عنوان شیب خط ظاهر شده است که این مطلب همواره درست است.



به طور کلی الگوهایی را که جمله عمومی آنها به صورت $t_n=an+b$ است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

دیدیم که در یک الگوی خطی با جمله عمومی $t_n=an+b$ ، میزان تغییر جملات متوالی برابر a بود. به عبارت دیگر، اختلاف هر دو جمله متوالی در این الگوی خطی برابر ضریب n است. به عنوان مثال در یک الگوی خطی با جمله عمومی $t_n=-4n+15$ ، هر جمله نسبت به جمله قبل از خودش ۴ واحد کاهش می‌یابد:

۱۱, ۷, ۳, -۱, -۵, -۹, ...

مثال

در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشند. جمله عمومی الگو را بیابید.

حل: فرض کنیم جمله عمومی به صورت $C_n=an+b$ باشد. پس داریم:

$$C_4 = 17 \Rightarrow a(4) + b = 17$$

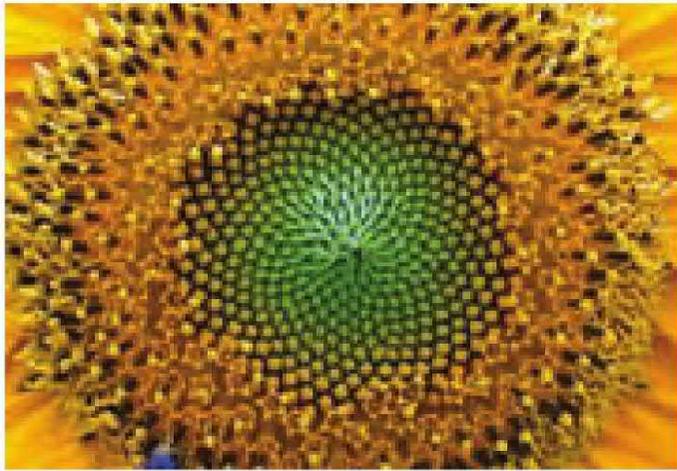
$$C_{10} = 41 \Rightarrow a(10) + b = 41$$

$$\underline{6a = 24} \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 1$$

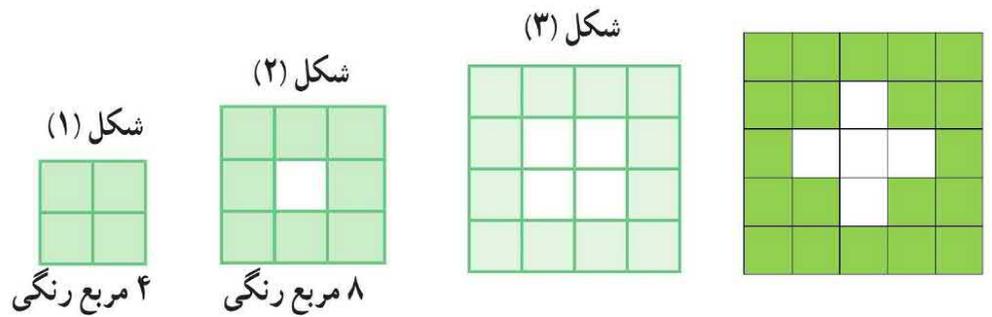
پس $C_n = 4n + 1$. بنابراین جملات الگو به صورت زیر خواهند بود:

۵, ۹, ۱۳, $\frac{17}{C_4}$, ۲۱, ۲۵, ۲۹, ۳۳, ۳۷, $\frac{41}{C_{10}}$, ۴۵, ...





۱ شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.



شماره شکل : n	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد مربع های رنگی : b_n	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
رابطه بین n و b_n	$b_1 = 4$	$b_2 = 8$	$b_3 = 12$	$b_4 = 16$	$b_5 = 20$

۲ توضیح دهید که چرا این الگو یک الگوی خطی محسوب می شود. چون اختلاف هر دو جمله ی متوالی در آن ، عددی ثابت است.

۳ با توجه به میزان افزایش جملات الگو، مقدار a در رابطه $b_n = an + h$ را بیابید و پس از حدس زدن مقدار h، حاصل b_n را به دست آورید.

اختلاف هر دو جمله ی متوالی برابر ۴ است پس $a=4$ و $h=0$ ، پس $b_n = 4n$

۴ شکل شماره ۲۵۰ دارای چند مربع رنگی است؟

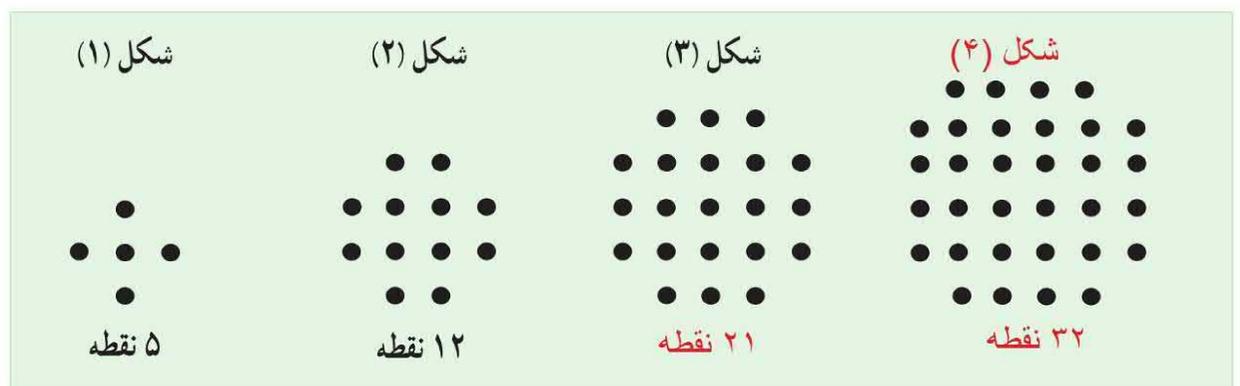
$$b_n = 4n \xrightarrow{n=250} b_{250} = 1000$$

۵ در چه مرحله ای از الگوی بالا، تعداد مربع های رنگی برابر ۱۴۴ است؟ $b_n = 144 \Rightarrow 4n = 144 \Rightarrow n = 36$ یعنی در مرحله ی ۳۶ ام ، ۱۴۴ مربع رنگی داریم .

الگوهای غیر خطی

فعالیت

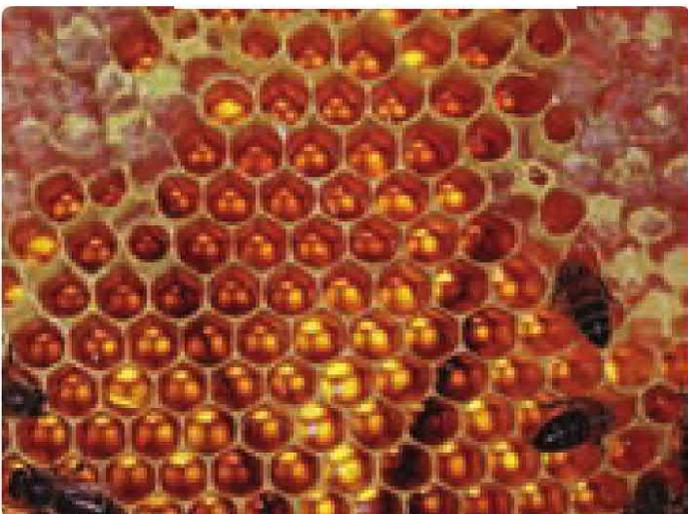
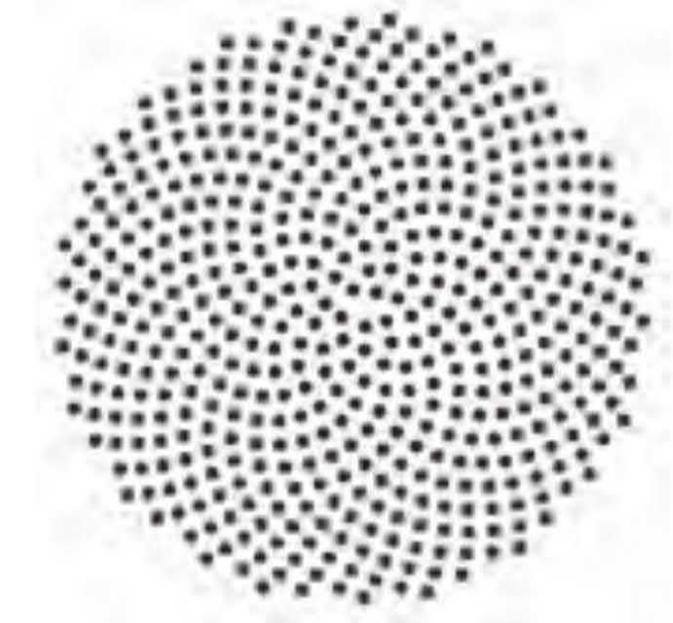
۱ در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کنید و جدول را کامل نمایید.



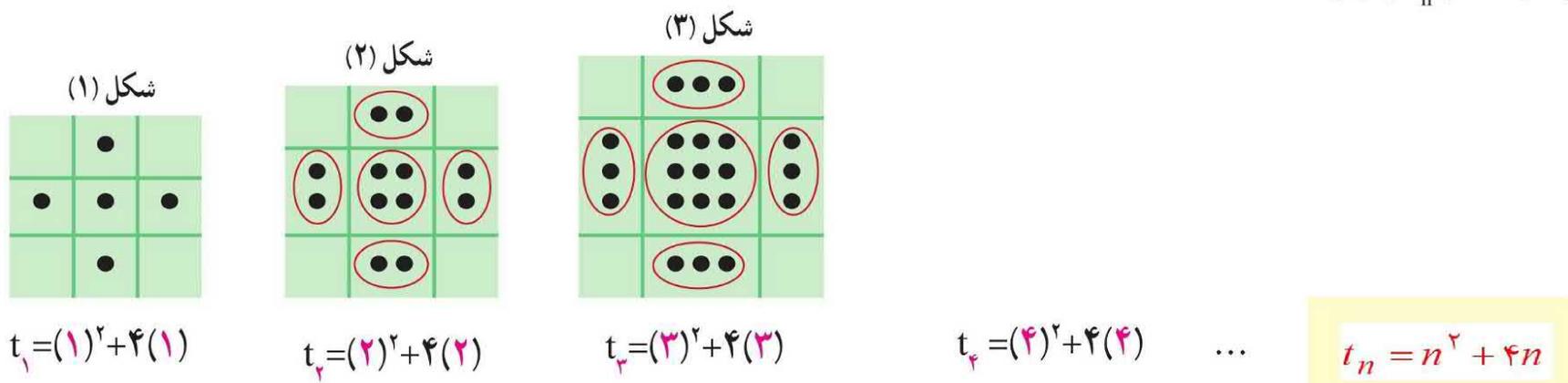
شماره شکل : n	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد نقطه ها : t_n	۵	۱۲	۲۱	۳۲	
رابطه بین n و t_n	$t_1 = 5$	$t_2 = 12$	$t_3 = 21$	$t_4 = 32$	

۲ آیا این الگو یک الگوی خطی است؟ چرا؟

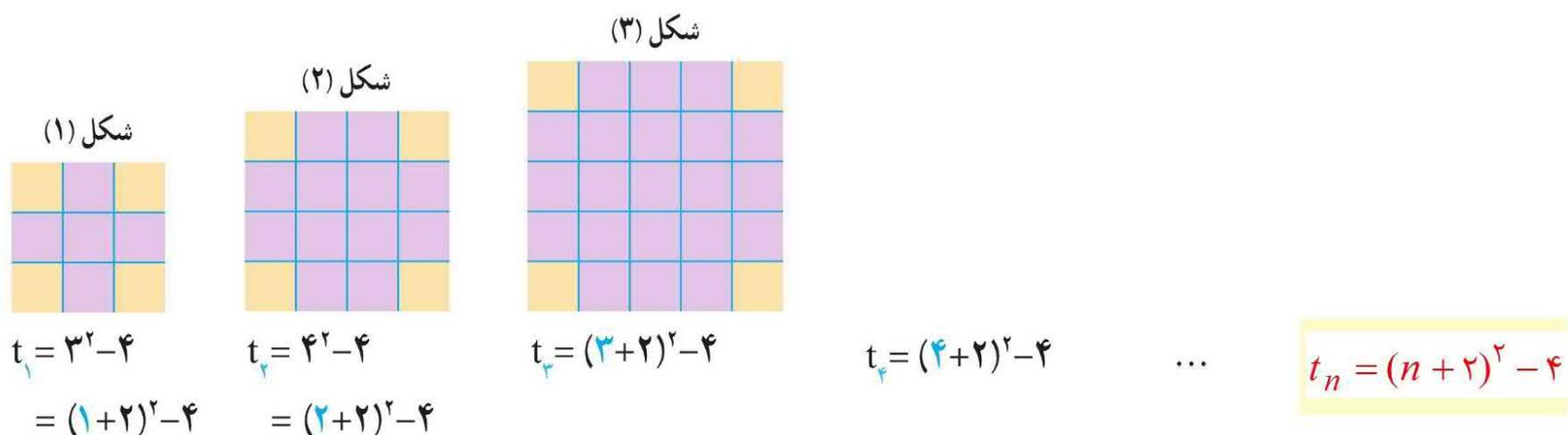
خیر ، زیرا اختلاف هر دو جمله ی متوالی ، عددی ثابت نیست .



۳ امیررضا برای یافتن جمله عمومی این الگو، مجموعه نقاط هر شکل را به صورت زیر دسته‌بندی کرد. از شکل‌های امیررضا کمک بگیرید و مقدار t_n را بیابید.



۴ امیرمحمد نگاه دیگری به مسئله داشت. او برای هر شکل این الگو، شکل دیگری را به صورت زیر نظیر کرد. با استفاده از این شکل‌ها مقدار t_n را بنویسید.



۵ نشان دهید که دو مقدار به دست آمده برای t_n در دو قسمت قبلی، برابرند.

جواب امیررضا $\Rightarrow t_n = (n+2)^2 - 4 = n^2 + 4n + 4 - 4 = n^2 + 4n$ جواب امیرمحمد

۶ آیا شما روش دیگری برای یافتن t_n می‌شناسید؟ پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

دنباله

در بخش قبل برای برخی الگوهای هندسی داده شده، یک الگوی عددی نظیر کردیم. به عنوان نمونه در فعالیت قبل، تعداد نقاط مربوط به شکل‌های متوالی الگو به صورت زیر بود:

۵, ۱۲, ۲۱, ۳۲, ۴۵,

این آرایش از اعداد، مثالی از یک دنباله است.

هر تعداد عدد را که پشت سرهم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

توجه داریم که ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند. مشابه صفحات قبل، جمله اول این دنباله را با t_1 ، جمله دوم را با t_2 و به همین ترتیب جمله n ام یا جمله عمومی آن را با t_n نمایش می‌دهیم. پس:

$$t_1 = 5, t_2 = 12, t_3 = 21, \dots, t_n = n^2 + 4n, \dots$$

گفتنی است که این دنباله یک دنباله درجه ۲ نامیده می‌شود؛ زیرا جمله عمومی آن یک چند جمله‌ای درجه دوم است.

کار در کلاس

۱ دو دنباله دلخواه مثال بزنید. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$: دنباله فیبوناچی

$2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$: دنباله اعداد طبیعی زوج

۲ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، جاهای خالی را پر کنید.

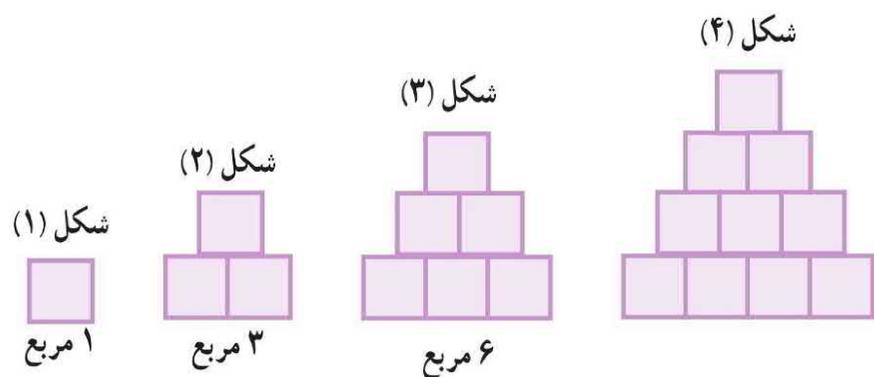
الف) $a_n = n^2 - 1$: $0, 3, 8, 15, 24$

ب) $b_n = -n + 4$: $3, 2, 1, 0, -1, -2$

ج) $c_n = -13 + 2n$: $-11, -9, -7, -5, -3$

۳ در هر سطر از جدول زیر یک دنباله آمده است. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید. همچنین در پنج مورد اول سعی کنید جمله عمومی دنباله را نیز حدس بزنید.

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	...	t_n	...
-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	...	-n	...
1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{13}$...	$\sqrt{2n-1}$...
1	4	9	16	25	36	49	...	n^2	...
0/1	0/01	0/001	0/0001	0/00001	0/000001	0/0000001	...	$(0/1)^n$...
-1	8	-27	64	-125	216	-343	...	$(-1)^n n^3$...
5	18	31	44	57	70	83
-2	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{-1}{32}$
1	2	4	7	11	16	23
3	1	4	1	5	1	6
1	1	2	3	5	8	13
2	3	5	7	11	13	17



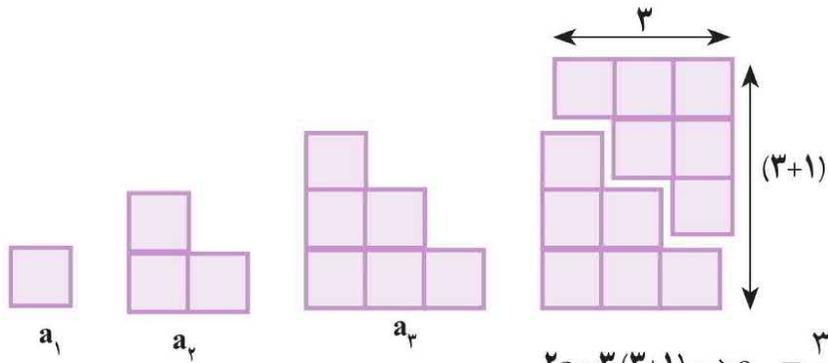
۴ الگوی مقابل را در نظر بگیرید.

الف) تعداد مربع‌ها در الگو را به صورت یک دنباله تا جمله ششم

آن بنویسید. $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \dots$ (دنباله مثلثی)

ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ **خیر** چرا؟

چون اختلاف هر دو جمله متوالی آن، عددی ثابت نیست.



$$2a_3 = 3(3+1) \Rightarrow a_3 = \frac{3(3+1)}{2} \Rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(پ) شکل های الگوی بالا را به صورت مقابل تبدیل می کنیم. با دقت در تصویر مقابل سعی کنید حاصل a_n را بر حسب n به دست آورید.

(ت) به کمک مرحله قبل حاصل عبارت زیر را بنویسید.

همان جمله ی n ام مرحله ی قبلی است. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

تمرین

۱ به الگوی زیر توجه کنید.



(الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی های تیره آن را مشخص کنید. ۱۲ کاشی تیره

(ب) تعداد کاشی های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله هفتم آن بنویسید. ۶، ۸، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ...

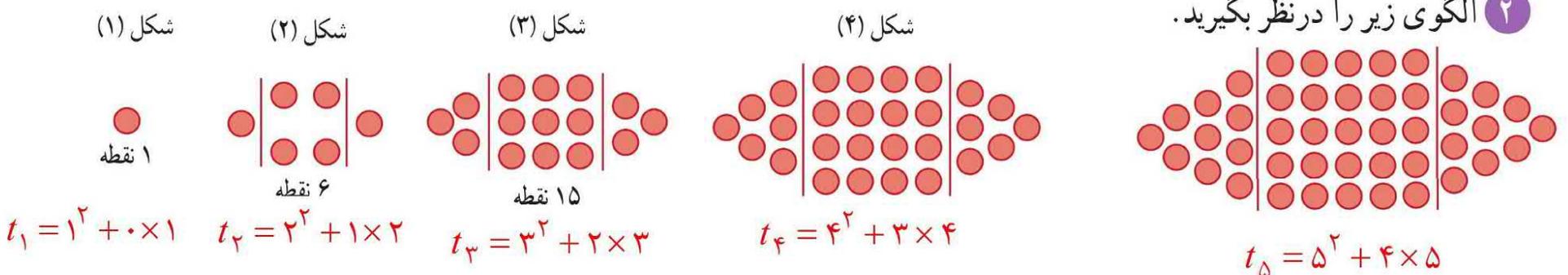
(پ) اگر n تعداد کاشی های سفید و t_n تعداد کاشی های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید. $t_n = 2(n+2) = 2n+4$

(ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟ $t_{100} = 2 \times 100 + 4 = 204$

(ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ بله اگر هست، تعداد کاشی های سفید آن چند است؟

تعداد کاشی های سفید ۲۳ است. $t_n = 50 \Rightarrow 2n + 4 = 50 \Rightarrow 2n = 46 \Rightarrow n = 23$

۲ الگوی زیر را در نظر بگیرید.



(الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله ششم آن بنویسید. ۱، ۶، ۱۵، ۲۴، ۳۵، ۴۶، ...

(ب) جمله عمومی الگو را بیابید. $t_n = n^2 + (n-1)n \Rightarrow t_n = 2n^2 - n$

(پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟ $t_{10} = 2 \times 10^2 - 10 = 190$

۳ جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی

نظیر کنید. (الف) $a_n = 4n$ (ب) $b_n = 3n+1$ (پ) $c_n = n^2+2$ (ت) $d_n = n^2+n$
 ... و ۱۲، ۱۶، ۲۰ و ۴، ۷، ۱۰، ۱۳ و ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰

۴ برای دنباله های درجه دو زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله عمومی هر دنباله را بیابید.

(الف) ۵، ۸، ۱۳، ۲۰، ۲۹، ...

(ب) ۵، ۱۲، ۲۲، ۳۵، ۵۱، ...

یاد آوری: دنباله ... و ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ۲۱، ۲۸، ۳۶، ۴۵، ۵۵، ۶۶، ۷۸، ۹۱، ۱۰۵، ۱۲۰، ۱۳۶، ۱۵۳، ۱۷۱، ۱۹۰، ۲۱۰، ۲۳۱، ۲۵۳، ۲۷۶، ۳۰۰، ۳۲۵، ۳۵۱، ۳۷۸، ۴۰۶، ۴۳۵، ۴۶۵، ۴۹۶، ۵۲۸، ۵۶۱، ۵۹۵، ۶۳۰، ۶۶۶، ۷۰۳، ۷۴۱، ۷۸۰، ۸۲۰، ۸۶۱، ۹۰۳، ۹۴۶، ۹۹۰، ۱۰۳۵، ۱۰۸۱، ۱۱۲۸، ۱۱۷۶، ۱۲۲۵، ۱۲۷۵، ۱۳۲۶، ۱۳۷۸، ۱۴۳۱، ۱۴۸۵، ۱۵۴۰، ۱۵۹۶، ۱۶۵۳، ۱۷۱۱، ۱۷۷۰، ۱۸۳۰، ۱۸۹۱، ۱۹۵۳، ۲۰۱۶، ۲۰۸۰، ۲۱۴۵، ۲۲۱۱، ۲۲۷۸، ۲۳۴۶، ۲۴۱۵، ۲۴۸۵، ۲۵۵۶، ۲۶۲۸، ۲۷۰۱، ۲۷۷۵، ۲۸۵۰، ۲۹۲۶، ۳۰۰۳، ۳۰۸۱، ۳۱۶۰، ۳۲۴۰، ۳۳۲۱، ۳۴۰۳، ۳۴۸۵، ۳۵۶۸، ۳۶۵۱، ۳۷۳۵، ۳۸۲۰، ۳۹۰۵، ۳۹۹۱، ۴۰۷۸، ۴۱۶۵، ۴۲۵۳، ۴۳۴۱، ۴۴۳۰، ۴۵۲۰، ۴۶۱۱، ۴۷۰۳، ۴۷۹۵، ۴۸۸۸، ۴۹۸۱، ۵۰۷۵، ۵۱۷۰، ۵۲۶۵، ۵۳۶۱، ۵۴۵۸، ۵۵۵۵، ۵۶۵۳، ۵۷۵۱، ۵۸۵۰، ۵۹۵۰، ۶۰۵۱، ۶۱۵۳، ۶۲۵۵، ۶۳۵۸، ۶۴۶۱، ۶۵۶۵، ۶۶۷۰، ۶۷۷۵، ۶۸۸۱، ۶۹۸۸، ۷۰۹۵، ۷۲۰۳، ۷۳۱۱، ۷۴۲۰، ۷۵۳۰، ۷۶۴۱، ۷۷۵۳، ۷۸۶۵، ۷۹۷۸، ۸۰۹۱، ۸۲۰۵، ۸۳۲۰، ۸۴۳۵، ۸۵۵۱، ۸۶۶۸، ۸۷۸۵، ۸۹۰۳، ۹۰۲۱، ۹۱۴۰، ۹۲۶۰، ۹۳۸۱، ۹۵۰۳، ۹۶۲۵، ۹۷۴۸، ۹۸۷۱، ۹۹۹۵، ۱۰۱۱۹، ۱۰۲۴۰، ۱۰۳۶۱، ۱۰۴۸۳، ۱۰۶۰۵، ۱۰۷۲۸، ۱۰۸۵۱، ۱۰۹۷۵، ۱۱۰۹۸، ۱۱۲۲۱، ۱۱۳۴۵، ۱۱۴۶۹، ۱۱۵۹۳، ۱۱۷۱۷، ۱۱۸۴۱، ۱۱۹۶۵، ۱۲۰۹۰، ۱۲۲۱۵، ۱۲۳۴۰، ۱۲۴۶۵، ۱۲۵۹۰، ۱۲۷۱۵، ۱۲۸۴۰، ۱۲۹۶۵، ۱۳۰۹۰، ۱۳۲۱۵، ۱۳۳۴۰، ۱۳۴۶۵، ۱۳۵۹۰، ۱۳۷۱۵، ۱۳۸۴۰، ۱۳۹۶۵، ۱۴۰۹۰، ۱۴۲۱۵، ۱۴۳۴۰، ۱۴۴۶۵، ۱۴۵۹۰، ۱۴۷۱۵، ۱۴۸۴۰، ۱۴۹۶۵، ۱۵۰۹۰، ۱۵۲۱۵، ۱۵۳۴۰، ۱۵۴۶۵، ۱۵۵۹۰، ۱۵۷۱۵، ۱۵۸۴۰، ۱۵۹۶۵، ۱۶۰۹۰، ۱۶۲۱۵، ۱۶۳۴۰، ۱۶۴۶۵، ۱۶۵۹۰، ۱۶۷۱۵، ۱۶۸۴۰، ۱۶۹۶۵، ۱۷۰۹۰، ۱۷۲۱۵، ۱۷۳۴۰، ۱۷۴۶۵، ۱۷۵۹۰، ۱۷۷۱۵، ۱۷۸۴۰، ۱۷۹۶۵، ۱۸۰۹۰، ۱۸۲۱۵، ۱۸۳۴۰، ۱۸۴۶۵، ۱۸۵۹۰، ۱۸۷۱۵، ۱۸۸۴۰، ۱۸۹۶۵، ۱۹۰۹۰، ۱۹۲۱۵، ۱۹۳۴۰، ۱۹۴۶۵، ۱۹۵۹۰، ۱۹۷۱۵، ۱۹۸۴۰، ۱۹۹۶۵، ۲۰۰۹۰، ۲۰۲۱۵، ۲۰۳۴۰، ۲۰۴۶۵، ۲۰۵۹۰، ۲۰۷۱۵، ۲۰۸۴۰، ۲۰۹۶۵، ۲۱۰۹۰، ۲۱۲۱۵، ۲۱۳۴۰، ۲۱۴۶۵، ۲۱۵۹۰، ۲۱۷۱۵، ۲۱۸۴۰، ۲۱۹۶۵، ۲۲۰۹۰، ۲۲۲۱۵، ۲۲۳۴۰، ۲۲۴۶۵، ۲۲۵۹۰، ۲۲۷۱۵، ۲۲۸۴۰، ۲۲۹۶۵، ۲۳۰۹۰، ۲۳۲۱۵، ۲۳۳۴۰، ۲۳۴۶۵، ۲۳۵۹۰، ۲۳۷۱۵، ۲۳۸۴۰، ۲۳۹۶۵، ۲۴۰۹۰، ۲۴۲۱۵، ۲۴۳۴۰، ۲۴۴۶۵، ۲۴۵۹۰، ۲۴۷۱۵، ۲۴۸۴۰، ۲۴۹۶۵، ۲۵۰۹۰، ۲۵۲۱۵، ۲۵۳۴۰، ۲۵۴۶۵، ۲۵۵۹۰، ۲۵۷۱۵، ۲۵۸۴۰، ۲۵۹۶۵، ۲۶۰۹۰، ۲۶۲۱۵، ۲۶۳۴۰، ۲۶۴۶۵، ۲۶۵۹۰، ۲۶۷۱۵، ۲۶۸۴۰، ۲۶۹۶۵، ۲۷۰۹۰، ۲۷۲۱۵، ۲۷۳۴۰، ۲۷۴۶۵، ۲۷۵۹۰، ۲۷۷۱۵، ۲۷۸۴۰، ۲۷۹۶۵، ۲۸۰۹۰، ۲۸۲۱۵، ۲۸۳۴۰، ۲۸۴۶۵، ۲۸۵۹۰، ۲۸۷۱۵، ۲۸۸۴۰، ۲۸۹۶۵، ۲۹۰۹۰، ۲۹۲۱۵، ۲۹۳۴۰، ۲۹۴۶۵، ۲۹۵۹۰، ۲۹۷۱۵، ۲۹۸۴۰، ۲۹۹۶۵، ۳۰۰۹۰، ۳۰۲۱۵، ۳۰۳۴۰، ۳۰۴۶۵، ۳۰۵۹۰، ۳۰۷۱۵، ۳۰۸۴۰، ۳۰۹۶۵، ۳۱۰۹۰، ۳۱۲۱۵، ۳۱۳۴۰، ۳۱۴۶۵، ۳۱۵۹۰، ۳۱۷۱۵، ۳۱۸۴۰، ۳۱۹۶۵، ۳۲۰۹۰، ۳۲۲۱۵، ۳۲۳۴۰، ۳۲۴۶۵، ۳۲۵۹۰، ۳۲۷۱۵، ۳۲۸۴۰، ۳۲۹۶۵، ۳۳۰۹۰، ۳۳۲۱۵، ۳۳۳۴۰، ۳۳۴۶۵، ۳۳۵۹۰، ۳۳۷۱۵، ۳۳۸۴۰، ۳۳۹۶۵، ۳۴۰۹۰، ۳۴۲۱۵، ۳۴۳۴۰، ۳۴۴۶۵، ۳۴۵۹۰، ۳۴۷۱۵، ۳۴۸۴۰، ۳۴۹۶۵، ۳۵۰۹۰، ۳۵۲۱۵، ۳۵۳۴۰، ۳۵۴۶۵، ۳۵۵۹۰، ۳۵۷۱۵، ۳۵۸۴۰، ۳۵۹۶۵، ۳۶۰۹۰، ۳۶۲۱۵، ۳۶۳۴۰، ۳۶۴۶۵، ۳۶۵۹۰، ۳۶۷۱۵، ۳۶۸۴۰، ۳۶۹۶۵، ۳۷۰۹۰، ۳۷۲۱۵، ۳۷۳۴۰، ۳۷۴۶۵، ۳۷۵۹۰، ۳۷۷۱۵، ۳۷۸۴۰، ۳۷۹۶۵، ۳۸۰۹۰، ۳۸۲۱۵، ۳۸۳۴۰، ۳۸۴۶۵، ۳۸۵۹۰، ۳۸۷۱۵، ۳۸۸۴۰، ۳۸۹۶۵، ۳۹۰۹۰، ۳۹۲۱۵، ۳۹۳۴۰، ۳۹۴۶۵، ۳۹۵۹۰، ۳۹۷۱۵، ۳۹۸۴۰، ۳۹۹۶۵، ۴۰۰۹۰، ۴۰۲۱۵، ۴۰۳۴۰، ۴۰۴۶۵، ۴۰۵۹۰، ۴۰۷۱۵، ۴۰۸۴۰، ۴۰۹۶۵، ۴۱۰۹۰، ۴۱۲۱۵، ۴۱۳۴۰، ۴۱۴۶۵، ۴۱۵۹۰، ۴۱۷۱۵، ۴۱۸۴۰، ۴۱۹۶۵، ۴۲۰۹۰، ۴۲۲۱۵، ۴۲۳۴۰، ۴۲۴۶۵، ۴۲۵۹۰، ۴۲۷۱۵، ۴۲۸۴۰، ۴۲۹۶۵، ۴۳۰۹۰، ۴۳۲۱۵، ۴۳۳۴۰، ۴۳۴۶۵، ۴۳۵۹۰، ۴۳۷۱۵، ۴۳۸۴۰، ۴۳۹۶۵، ۴۴۰۹۰، ۴۴۲۱۵، ۴۴۳۴۰، ۴۴۴۶۵، ۴۴۵۹۰، ۴۴۷۱۵، ۴۴۸۴۰، ۴۴۹۶۵، ۴۵۰۹۰، ۴۵۲۱۵، ۴۵۳۴۰، ۴۵۴۶۵، ۴۵۵۹۰، ۴۵۷۱۵، ۴۵۸۴۰، ۴۵۹۶۵، ۴۶۰۹۰، ۴۶۲۱۵، ۴۶۳۴۰، ۴۶۴۶۵، ۴۶۵۹۰، ۴۶۷۱۵، ۴۶۸۴۰، ۴۶۹۶۵، ۴۷۰۹۰، ۴۷۲۱۵، ۴۷۳۴۰، ۴۷۴۶۵، ۴۷۵۹۰، ۴۷۷۱۵، ۴۷۸۴۰، ۴۷۹۶۵، ۴۸۰۹۰، ۴۸۲۱۵، ۴۸۳۴۰، ۴۸۴۶۵، ۴۸۵۹۰، ۴۸۷۱۵، ۴۸۸۴۰، ۴۸۹۶۵، ۴۹۰۹۰، ۴۹۲۱۵، ۴۹۳۴۰، ۴۹۴۶۵، ۴۹۵۹۰، ۴۹۷۱۵، ۴۹۸۴۰، ۴۹۹۶۵، ۵۰۰۹۰، ۵۰۲۱۵، ۵۰۳۴۰، ۵۰۴۶۵، ۵۰۵۹۰، ۵۰۷۱۵، ۵۰۸۴۰، ۵۰۹۶۵، ۵۱۰۹۰، ۵۱۲۱۵، ۵۱۳۴۰، ۵۱۴۶۵، ۵۱۵۹۰، ۵۱۷۱۵، ۵۱۸۴۰، ۵۱۹۶۵، ۵۲۰۹۰، ۵۲۲۱۵، ۵۲۳۴۰، ۵۲۴۶۵، ۵۲۵۹۰، ۵۲۷۱۵، ۵۲۸۴۰، ۵۲۹۶۵، ۵۳۰۹۰، ۵۳۲۱۵، ۵۳۳۴۰، ۵۳۴۶۵، ۵۳۵۹۰، ۵۳۷۱۵، ۵۳۸۴۰، ۵۳۹۶۵، ۵۴۰۹۰، ۵۴۲۱۵، ۵۴۳۴۰، ۵۴۴۶۵، ۵۴۵۹۰، ۵۴۷۱۵، ۵۴۸۴۰، ۵۴۹۶۵، ۵۵۰۹۰، ۵۵۲۱۵، ۵۵۳۴۰، ۵۵۴۶۵، ۵۵۵۹۰، ۵۵۷۱۵، ۵۵۸۴۰، ۵۵۹۶۵، ۵۶۰۹۰، ۵۶۲۱۵، ۵۶۳۴۰، ۵۶۴۶۵، ۵۶۵۹۰، ۵۶۷۱۵، ۵۶۸۴۰، ۵۶۹۶۵، ۵۷۰۹۰، ۵۷۲۱۵، ۵۷۳۴۰، ۵۷۴۶۵، ۵۷۵۹۰، ۵۷۷۱۵، ۵۷۸۴۰، ۵۷۹۶۵، ۵۸۰۹۰، ۵۸۲۱۵، ۵۸۳۴۰، ۵۸۴۶۵، ۵۸۵۹۰، ۵۸۷۱۵، ۵۸۸۴۰، ۵۸۹۶۵، ۵۹۰۹۰، ۵۹۲۱۵، ۵۹۳۴۰، ۵۹۴۶۵، ۵۹۵۹۰، ۵۹۷۱۵، ۵۹۸۴۰، ۵۹۹۶۵، ۶۰۰۹۰، ۶۰۲۱۵، ۶۰۳۴۰، ۶۰۴۶۵، ۶۰۵۹۰، ۶۰۷۱۵، ۶۰۸۴۰، ۶۰۹۶۵، ۶۱۰۹۰، ۶۱۲۱۵، ۶۱۳۴۰، ۶۱۴۶۵، ۶۱۵۹۰، ۶۱۷۱۵، ۶۱۸۴۰، ۶۱۹۶۵، ۶۲۰۹۰، ۶۲۲۱۵، ۶۲۳۴۰، ۶۲۴۶۵، ۶۲۵۹۰، ۶۲۷۱۵، ۶۲۸۴۰، ۶۲۹۶۵، ۶۳۰۹۰، ۶۳۲۱۵، ۶۳۳۴۰، ۶۳۴۶۵، ۶۳۵۹۰، ۶۳۷۱۵، ۶۳۸۴۰، ۶۳۹۶۵، ۶۴۰۹۰، ۶۴۲۱۵، ۶۴۳۴۰، ۶۴۴۶۵، ۶۴۵۹۰، ۶۴۷۱۵، ۶۴۸۴۰، ۶۴۹۶۵، ۶۵۰۹۰، ۶۵۲۱۵، ۶۵۳۴۰، ۶۵۴۶۵، ۶۵۵۹۰، ۶۵۷۱۵، ۶۵۸۴۰، ۶۵۹۶۵، ۶۶۰۹۰، ۶۶۲۱۵، ۶۶۳۴۰، ۶۶۴۶۵، ۶۶۵۹۰، ۶۶۷۱۵، ۶۶۸۴۰، ۶۶۹۶۵، ۶۷۰۹۰، ۶۷۲۱۵، ۶۷۳۴۰، ۶۷۴۶۵، ۶۷۵۹۰، ۶۷۷۱۵، ۶۷۸۴۰، ۶۷۹۶۵، ۶۸۰۹۰، ۶۸۲۱۵، ۶۸۳۴۰، ۶۸۴۶۵، ۶۸۵۹۰، ۶۸۷۱۵، ۶۸۸۴۰، ۶۸۹۶۵، ۶۹۰۹۰، ۶۹۲۱۵، ۶۹۳۴۰، ۶۹۴۶۵، ۶۹۵۹۰، ۶۹۷۱۵، ۶۹۸۴۰، ۶۹۹۶۵، ۷۰۰۹۰، ۷۰۲۱۵، ۷۰۳۴۰، ۷۰۴۶۵، ۷۰۵۹۰، ۷۰۷۱۵، ۷۰۸۴۰، ۷۰۹۶۵، ۷۱۰۹۰، ۷۱۲۱۵، ۷۱۳۴۰، ۷۱۴۶۵، ۷۱۵۹۰، ۷۱۷۱۵، ۷۱۸۴۰، ۷۱۹۶۵، ۷۲۰۹۰، ۷۲۲۱۵، ۷۲۳۴۰، ۷۲۴۶۵، ۷۲۵۹۰، ۷۲۷۱۵، ۷۲۸۴۰، ۷۲۹۶۵، ۷۳۰۹۰، ۷۳۲۱۵، ۷۳۳۴۰، ۷۳۴۶۵، ۷۳۵۹۰، ۷۳۷۱۵، ۷۳۸۴۰، ۷۳۹۶۵، ۷۴۰۹۰، ۷۴۲۱۵، ۷۴۳۴۰، ۷۴۴۶۵، ۷۴۵۹۰، ۷۴۷۱۵، ۷۴۸۴۰، ۷۴۹۶۵، ۷۵۰۹۰، ۷۵۲۱۵، ۷۵۳۴۰، ۷۵۴۶۵، ۷۵۵۹۰، ۷۵۷۱۵، ۷۵۸۴۰، ۷۵۹۶۵، ۷۶۰۹۰، ۷۶۲۱۵، ۷۶۳۴۰، ۷۶۴۶۵، ۷۶۵۹۰، ۷۶۷۱۵، ۷۶۸۴۰، ۷۶۹۶۵، ۷۷۰۹۰، ۷۷۲۱۵، ۷۷۳۴۰، ۷۷۴۶۵، ۷۷۵۹۰، ۷۷۷۱۵، ۷۷۸۴۰، ۷۷۹۶۵، ۷۸۰۹۰، ۷۸۲۱۵، ۷۸۳۴۰، ۷۸۴۶۵، ۷۸۵۹۰، ۷۸۷۱۵، ۷۸۸۴۰، ۷۸۹۶۵، ۷۹۰۹۰، ۷۹۲۱۵، ۷۹۳۴۰، ۷۹۴۶۵، ۷۹۵۹۰، ۷۹۷۱۵، ۷۹۸۴۰، ۷۹۹۶۵، ۸۰۰۹۰، ۸۰۲۱۵، ۸۰۳۴۰، ۸۰۴۶۵، ۸۰۵۹۰، ۸۰۷۱۵، ۸۰۸۴۰، ۸۰۹۶۵، ۸۱۰۹۰، ۸۱۲۱۵، ۸۱۳۴۰، ۸۱۴۶۵، ۸۱۵۹۰، ۸۱۷۱۵، ۸۱۸۴۰، ۸۱۹۶۵، ۸۲۰۹۰، ۸۲۲۱۵، ۸۲۳۴۰، ۸۲۴۶۵، ۸۲۵۹۰، ۸۲۷۱۵، ۸۲۸۴۰، ۸۲۹۶۵، ۸۳۰۹۰، ۸۳۲۱۵، ۸۳۳۴۰، ۸۳۴۶۵، ۸۳۵۹۰، ۸۳۷۱۵، ۸۳۸۴۰، ۸۳۹۶۵، ۸۴۰۹۰، ۸۴۲۱۵، ۸۴۳۴۰، ۸۴۴۶۵، ۸۴۵۹۰، ۸۴۷۱۵، ۸۴۸۴۰، ۸۴۹۶۵، ۸۵۰۹۰، ۸۵۲۱۵، ۸۵۳۴۰، ۸۵۴۶۵، ۸۵۵۹۰، ۸۵۷۱۵، ۸۵۸۴۰، ۸۵۹۶۵، ۸۶۰۹۰، ۸۶۲۱۵، ۸۶۳۴۰، ۸۶۴۶۵، ۸۶۵۹۰، ۸۶۷۱۵، ۸۶۸۴۰، ۸۶۹۶۵، ۸۷۰۹۰، ۸۷۲۱۵، ۸۷۳۴۰، ۸۷۴۶۵، ۸۷۵۹۰، ۸۷۷۱۵، ۸۷۸۴۰، ۸۷۹۶۵، ۸۸۰۹۰، ۸۸۲۱۵، ۸۸۳۴۰، ۸۸۴۶۵، ۸۸۵۹۰، ۸۸۷۱۵، ۸۸۸۴۰، ۸۸۹۶۵، ۸۹۰۹۰، ۸۹۲۱۵، ۸۹۳۴۰، ۸۹۴۶۵، ۸۹۵۹۰، ۸۹۷۱۵، ۸۹۸۴۰، ۸۹۹۶۵، ۹۰۰۹۰، ۹۰۲۱۵، ۹۰۳۴۰، ۹۰۴۶۵، ۹۰۵۹۰، ۹۰۷۱۵، ۹۰۸۴۰، ۹۰۹۶۵، ۹۱۰۹۰، ۹۱۲۱۵، ۹۱۳۴۰، ۹۱۴۶۵، ۹۱۵۹۰، ۹۱۷۱۵، ۹۱۸۴۰، ۹۱۹۶۵، ۹۲۰۹۰، ۹۲۲۱۵، ۹۲۳۴۰، ۹۲۴۶۵، ۹۲۵۹۰، ۹۲۷۱۵، ۹۲۸۴۰، ۹۲۹۶۵، ۹۳۰۹۰، ۹۳۲۱۵، ۹۳۳۴۰، ۹۳۴۶۵، ۹۳۵۹۰، ۹۳۷۱۵، ۹۳۸۴۰، ۹۳۹۶۵، ۹۴۰۹۰، ۹۴۲۱۵، ۹۴۳۴۰، ۹۴۴۶۵، ۹۴۵۹۰، ۹۴۷۱۵، ۹۴۸۴۰، ۹۴۹۶۵، ۹۵۰۹۰، ۹۵۲۱۵، ۹۵۳۴۰، ۹۵۴۶۵، ۹۵۵۹۰، ۹۵۷۱۵، ۹۵۸۴۰، ۹۵۹۶۵، ۹۶۰۹۰، ۹۶۲۱۵، ۹۶۳۴۰، ۹۶۴۶۵، ۹۶۵۹۰، ۹۶۷۱۵، ۹۶۸۴۰، ۹۶۹۶۵