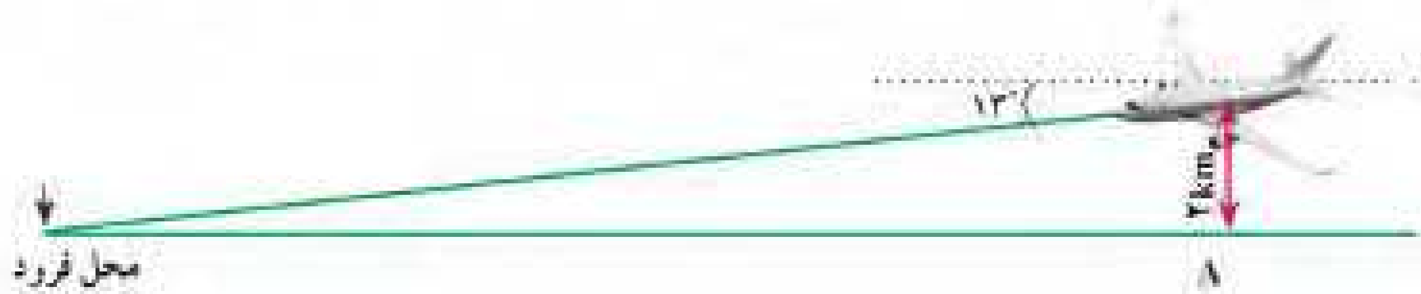
درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

برای اینکه اتومبیل‌ها در پیچ جاده‌ها بتوانند بدون خطر انحراف، حرکت کنند، در جاده شیب عرضی ایجاد می‌کنند، یعنی آن را طوری می‌سازند که قسمت بیرونی جاده نسبت به قسمت درونی، مرتفع‌تر باشد.

مثلثات شاخه‌ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می‌پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه‌گیری فاصله‌ها به‌صورت غیرمستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه‌برداری، دریانوردی، نجوم و غیره کاربرد دارد.

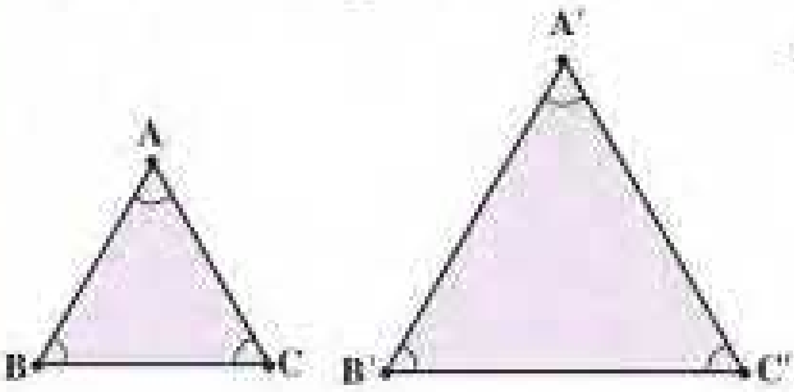
به‌عنوان مثال، فرض کنید یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است.



اگر زاویهٔ هواپیما با افق °۱۳ باشد، می‌خواهیم محل دقیق فرود هواپیما را بدانیم. این مسئله و مسائلی نظیر این با استفاده از روابط مثلثاتی حل می‌شوند.

در صفحات گرافن، هر اتم کربن با سه اتم کربن دیگر پیوند دارد که زوایای بین این پیوندها ۱۲۰ درجه است. در آینده‌ای نه‌چندان دور، بهترین میکروفن‌های جهان با استفاده از گرافن ساخته می‌شوند. این میکروفن‌ها، قابلیت ردیابی امواج صوتی فراتر از دامنهٔ شدت شنوایی انسان را دارند.

برای معرفی مفهوم مثلثات، به مفهوم تشابه نیاز داریم. در پایهٔ نهم با این مفهوم آشنا شدید و دیدید که دو مثلث با هم متشابه‌اند، هرگاه زوایای نظیر در آنها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشند. یعنی اگر $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ ، آنگاه داریم : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ و $\hat{A} = \hat{A'}, \hat{C} = \hat{C'}, \hat{B} = \hat{B'}$.

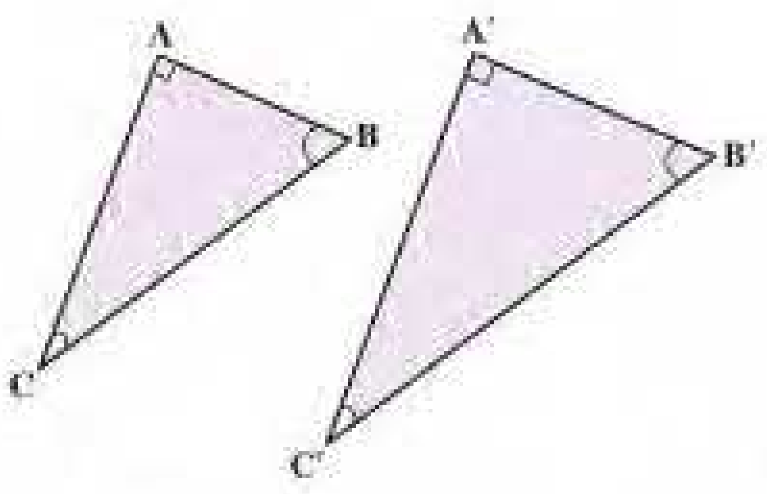


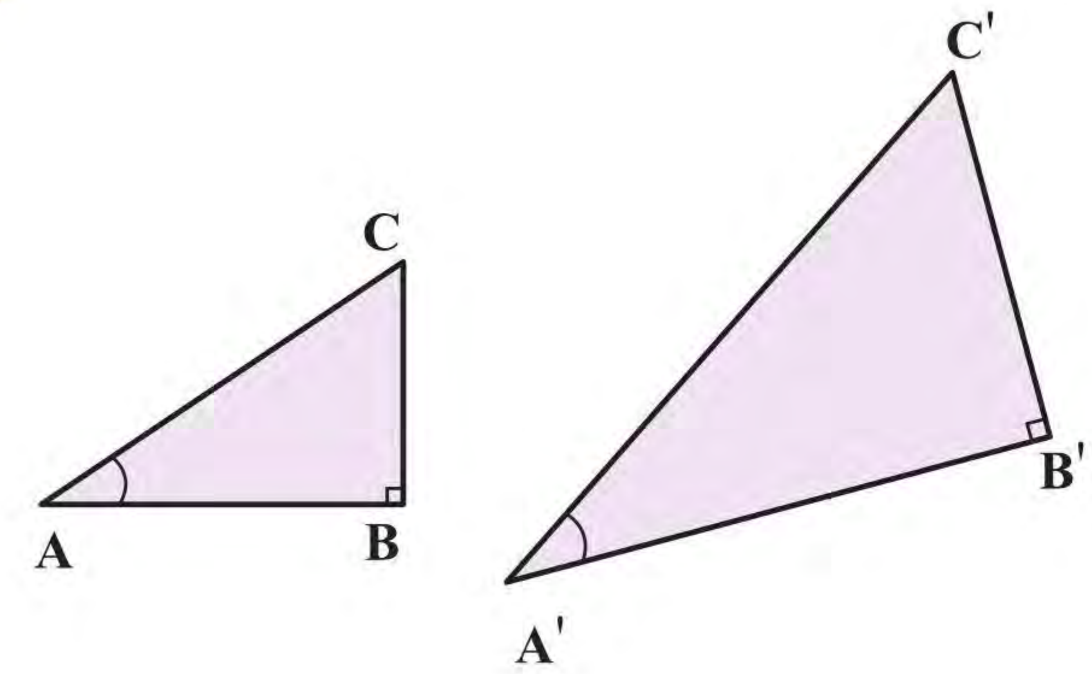
در هندسه ثابت می‌شود :

> هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث، متشابه‌اند.

به‌عنوان یک نتیجه از مطلب بالا می‌توان دید :

> اگر $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ در شکل مقابل قائم الزاویه باشند و داشته باشیم $\hat{C} = \hat{C'}$، آنگاه
>
> $$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$$





کار در کلاس

۱ در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABC و A'B'C'، $\hat{A}=\hat{A}'$. جاهای خالی را کامل کنید.

$$\overset{\Delta}{ABC} \ \square \ \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$$

۲ از تساوی $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$، می‌توان نتیجه گرفت $\frac{A'B'}{A'C'}=\frac{AB}{AC}$ (چرا؟). با توجه به این نکته، جاهای خالی را کامل کنید :

طبق خواص تناسب

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'} \quad \text{و} \quad \frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{A'C'}$$

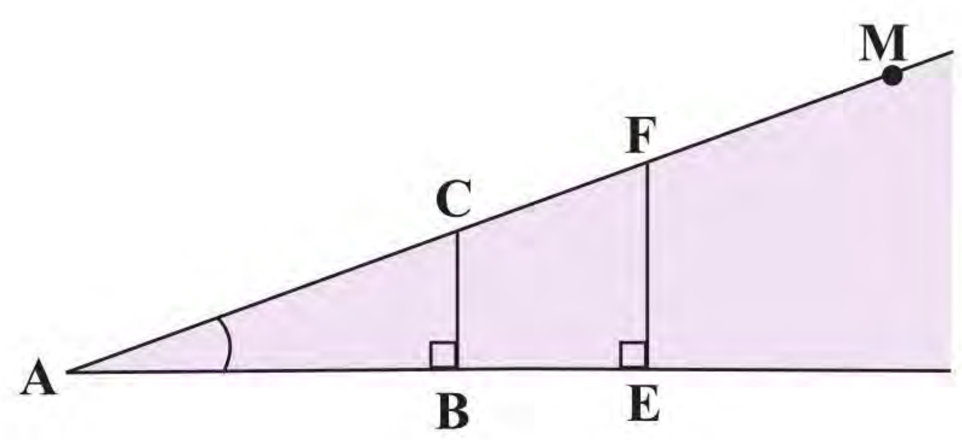
نتیجه : اگر زاویهٔ A از مثلث قائم‌الزاویه ABC با زاویه A' از مثلث قائم‌الزاویه A'B'C' (مطابق شکل بالا) برابر باشد، داریم :

$$\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{A'C'} \quad \text{و} \quad \frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'} \quad \text{و} \quad \frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$$

فعالیت

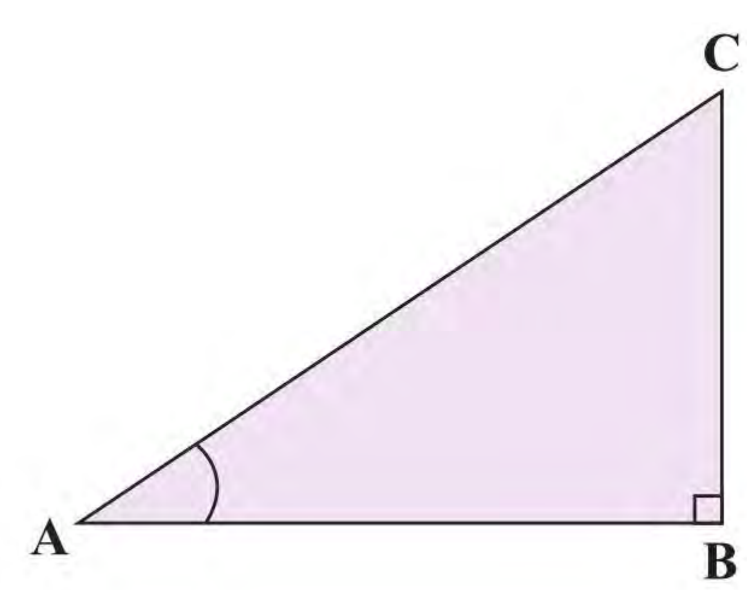
۱ در شکل سمت راست، درستی تساوی $\frac{BC}{AB}=\frac{EF}{AE}$ را بررسی کنید.

$$\overset{\Delta}{ACB} \sim \overset{\Delta}{AFE} \Rightarrow \frac{AC}{AF}=\frac{AB}{AE}=\frac{BC}{EF} \xrightarrow{\text{خواص تناسب}} \frac{BC}{AB}=\frac{EF}{AE}$$



۲ نقطهٔ دیگری مثل M را در امتداد AC درنظر بگیرید و از آن نقطه، عمودی بر ضلع دیگرِ زاویه A رسم کنید و پای عمود را N بنامید. اکنون جاهای خالی را کامل کنید :

$$\frac{BC}{AB}=\frac{MN}{AN}=\frac{EF}{AE}$$



همان‌طور که در «کار در کلاس» بالا دیدیم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC برای زاویهٔ معین و حاده A، نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ A، به‌طول ضلع مجاور آن همواره مقداری ثابت است. این نسبت را تانژانت زاویهٔ A می‌نامیم و آن را با tanA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، داریم :

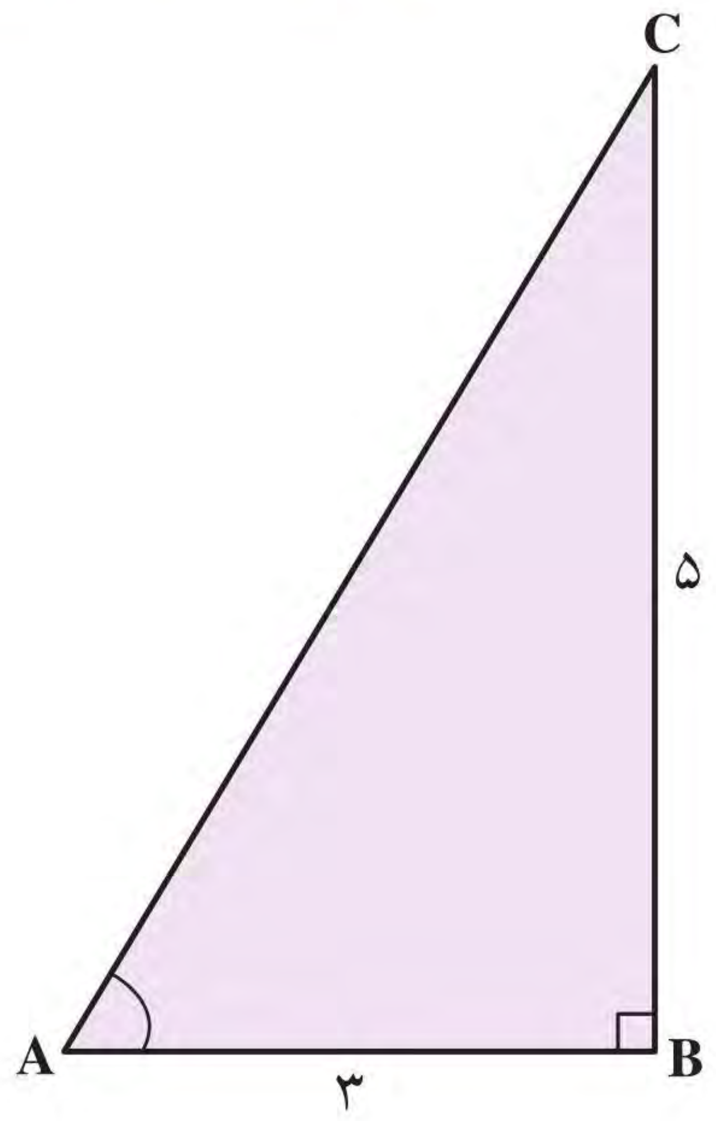
$$\tan A=\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}}=\frac{BC}{AB}$$

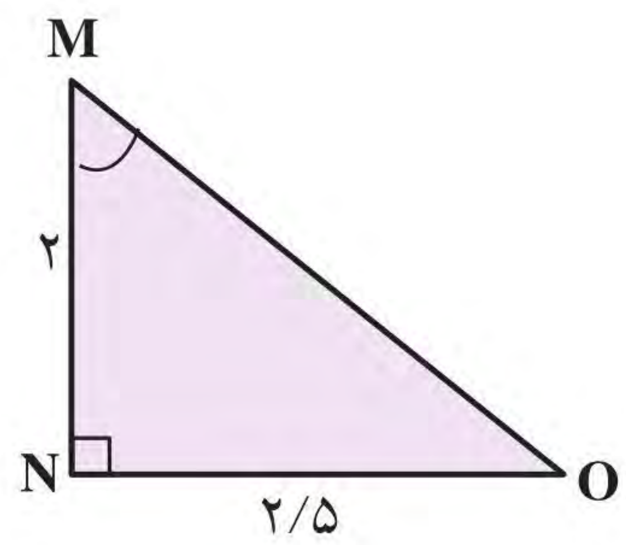
عکس تانژانت زاویه A را کتانژانت می‌نامیم و آن را با cotA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر، در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم :

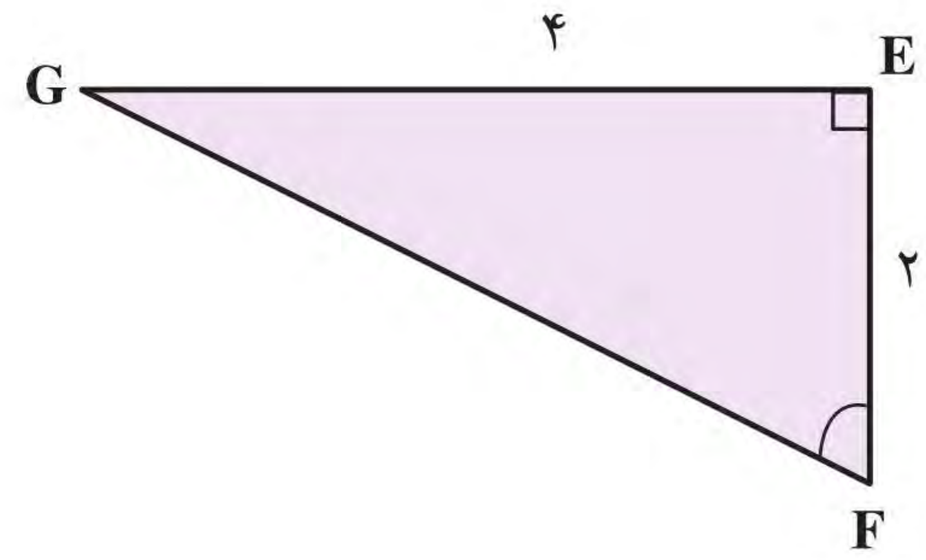
$$\cot A=\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}}=\frac{AB}{BC}$$

فعالیت

۱ در هر یک از شکل‌های زیر، جاهای خالی را کامل کنید.

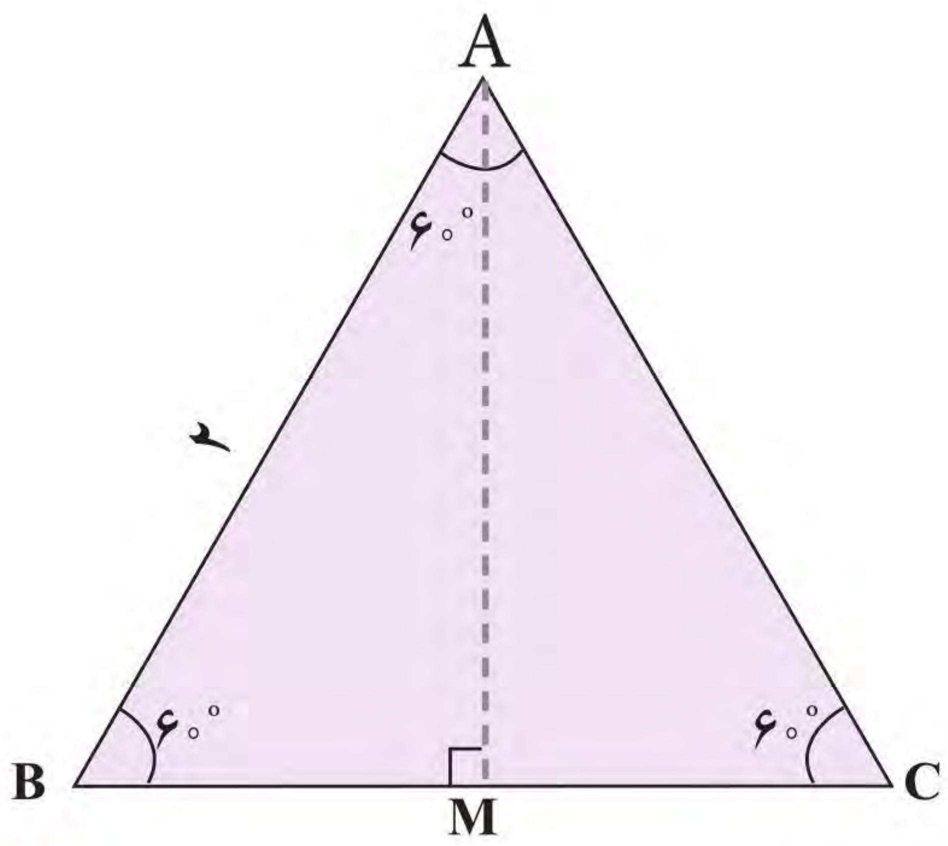






$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{۵}{۳}$ $\qquad$ $\cot M = \frac{MN}{NO} = \frac{۲}{۲/۵}$ $\qquad$ $\tan F = \frac{GE}{EF} = \frac{۴}{۲}$

$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{۳}{۵}$ $\qquad$ $\tan M = \frac{NO}{MN} = \frac{۲/۵}{۲}$ $\qquad$ $\cot F = \frac{EF}{GE} = \frac{۲}{۴}$



۲ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با اضلاعی به‌طول ۲ واحد را درنظر بگیرید.

الف) محل برخورد نیمساز زاویهٔ A با پاره‌خط BC را M بنامید. با توجه به خواص مثلث متساوی‌الساقین، AM ...میانه... ضلع BC است. بنابراین

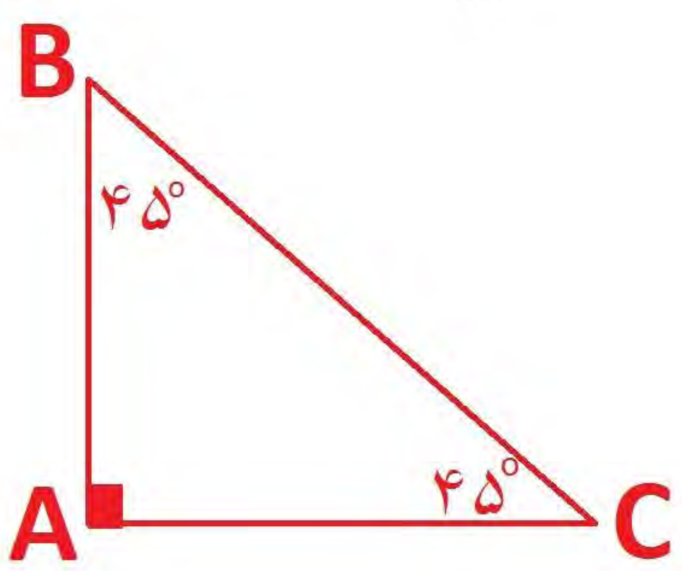
$BM = MC = \frac{۱}{۲}BC = \frac{۱}{۲}AB = ۱$

ب) با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، طول AM و حاصل کسرهای زیر را به‌دست آورید.

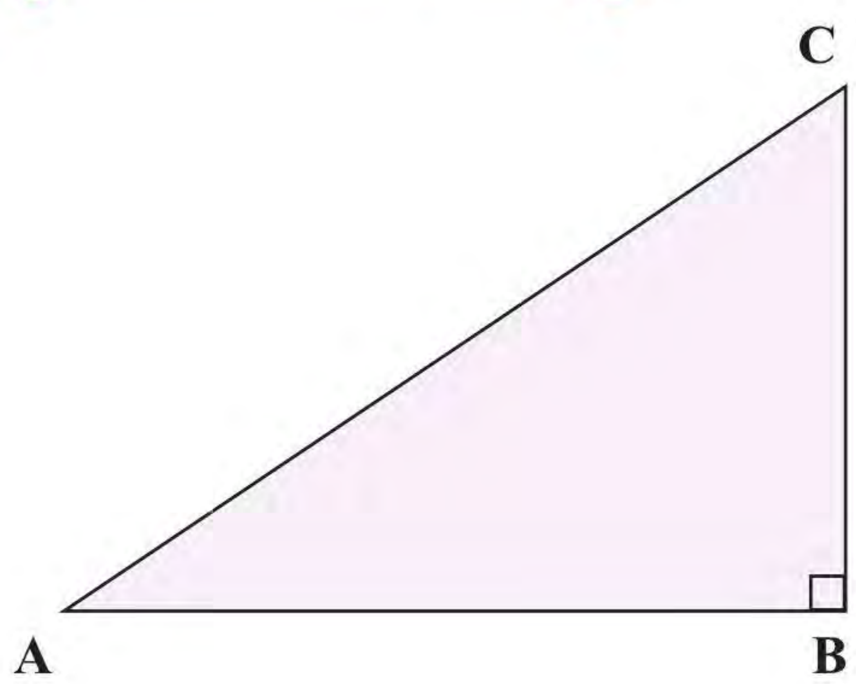
$۱^۲ + AM^۲ = ۲^۲ \Rightarrow AM = \sqrt{۳}$

$\tan ۳۰^\circ = \frac{BM}{AM} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ، $\tan ۶۰^\circ = \frac{AM}{BM} = \frac{\sqrt{۳}}{۱}$

پ) با استفاده از یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، تانژانت و کتانژانت زاویهٔ ۴۵° را پیدا کنید.



$\tan ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC} = ۱$ $\qquad$ $\cot ۴۵^\circ = \frac{AC}{AB} = ۱$



در هر مثلث قائم‌الزاویه ABC، نسبت طول ضلع مقابل زاویهٔ حادهٔ A به‌طول وتر، همواره مقداری ثابت است که آن‌را سینوس زاویهٔ A می‌نامیم و با sinA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر

$$\sin A = \frac{BC}{AC} .$$

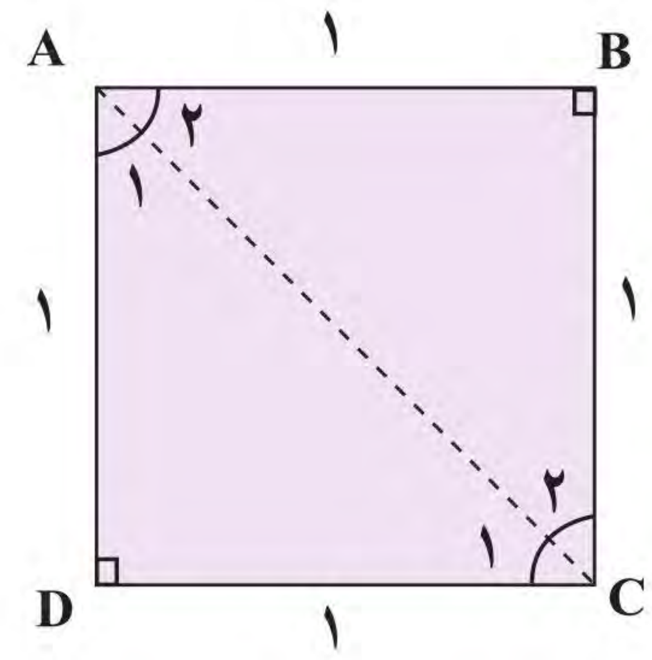
همچنین نسبت طول ضلع مجاور زاویهٔ حادهٔ A به‌طول وتر نیز مقداری ثابت است که آن را کسینوس زاویهٔ A می‌نامیم و آن‌را با cosA نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر $\cos A = \frac{AB}{AC}$.

به سادگی می‌توان دید در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{\sin A}{\cos A}$ و از این‌رو $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$. به‌طور مشابه، می‌توان دید $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$.

در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

مثال

خانم جلالی از دانش‌آموزان خواست تا نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۴۵° را حساب کنند. او ابتدا یک مربع با اضلاعی به طول ۱ واحد رسم کرد و از دانش‌آموزان خواست تا قطر AC را رسم کرده و سپس طول آن‌را حساب کنند.



فریبا : با توجه به اینکه مثلث ADC قائم‌الزاویه است، داریم $(AD)^۲+(DC)^۲=(AC)^۲$. در نتیجه $(AC)^۲=۱^۲+۱^۲$ و از این‌رو $(AC)^۲=۲$. چون اندازه قطر همواره عددی مثبت است، پس $AC=\sqrt{۲}$.

معلم : با توجه به اینکه مثلث ADC متساوی‌الساقین است، از این‌رو $\hat{A}_۱=\hat{C}_۱=$ ...۴۵°... .

مبینا : طبق تعریف سینوس، $\sin A_۱=\sin ۴۵^\circ=\frac{DC}{\text{وتر}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

سبا : من هم می‌توانم با توجه به روابط بالا کسینوس ۴۵° را پیدا کنم.

$$\cos A_۱=\cos ۴۵^\circ=\frac{AD}{AC}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}.$$

مریم : اکنون در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC، طبق تعریف داریم

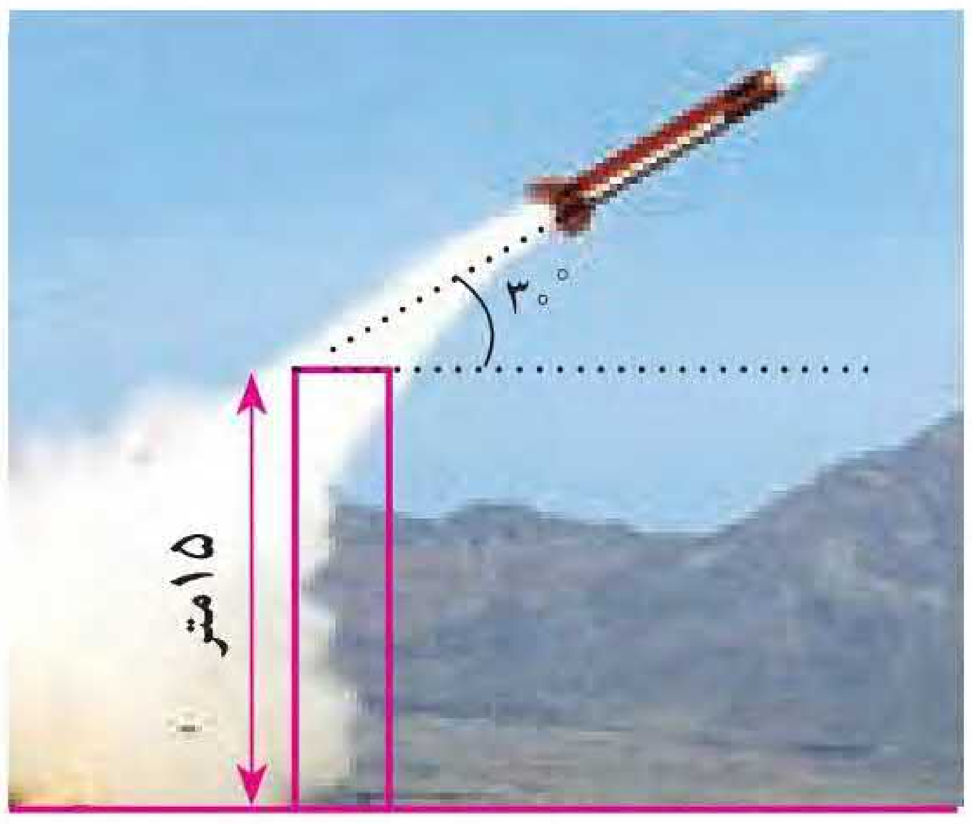
$$\tan A_۱=\tan ۴۵^\circ=\frac{۱}{۱}=۱ \quad \text{و} \quad \cot A_۱=\cot ۴۵^\circ=\frac{۱}{۱}=۱.$$

کار در کلاس

به کمک شکل فعالیت قبل، با پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۳۰° و ۶۰°، جدول زیر را کامل کنید (در صورت لزوم، کسرها را گویا کنید).

مقدار	۳۰°	۴۵°	۶۰°
sinA	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
cosA	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
tanA	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
cotA	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

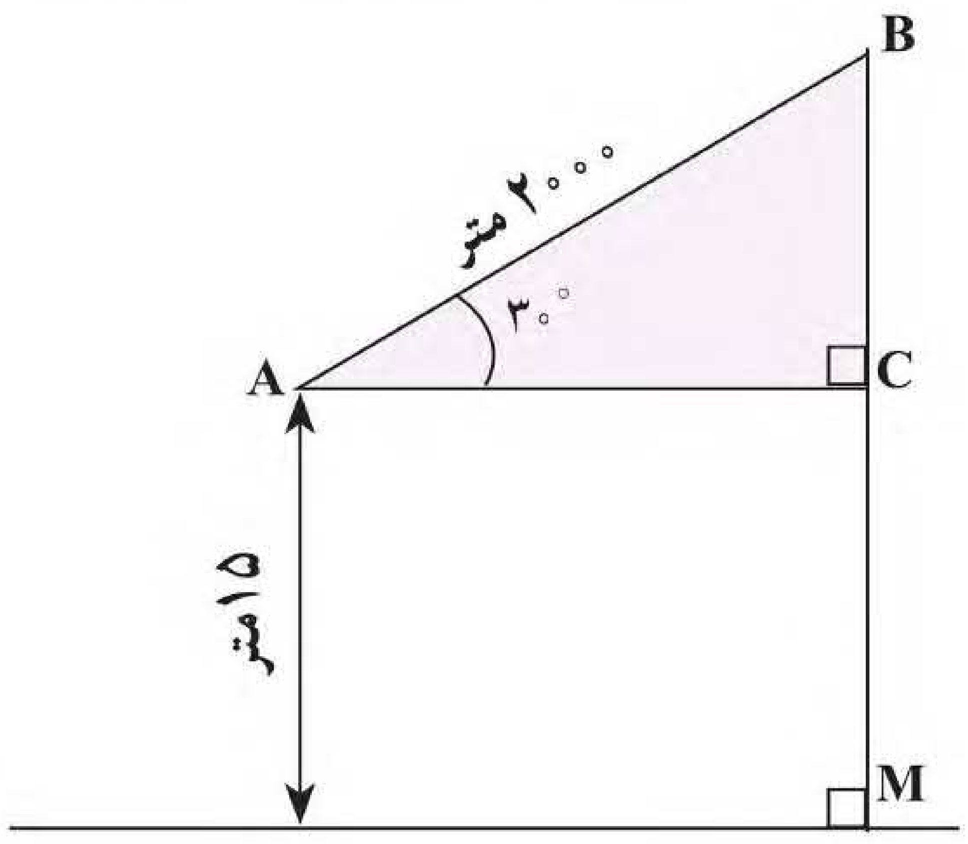
مثال



یک موشک در ارتفاع ۱۵متری از سطح زمین و با زاویهٔ ۳۰° پرتاب می‌شود. می‌خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟

حل : ابتدا یک مدل ریاضی برای حل این مسئله می‌سازیم. با توجه به شکل زیر، به‌سادگی می‌توان دید، ارتفاع موشک از سطح زمین برابر است با :

$BC + MC = BC + \dots 15 \dots$



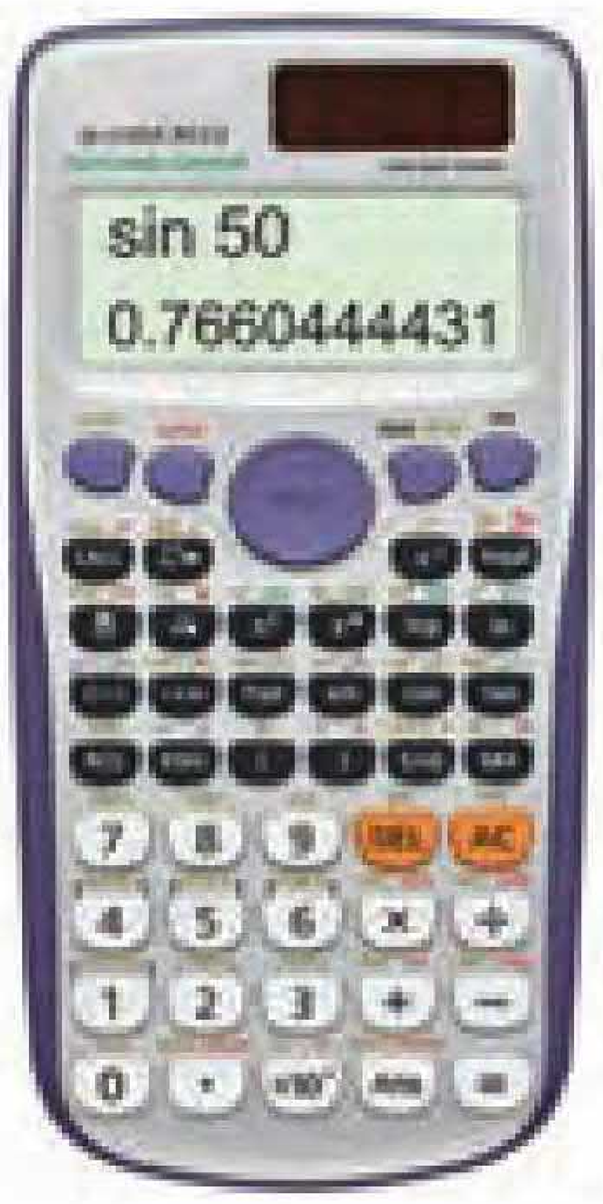
بنابراین کافی است طول BC را پیدا کنیم. می‌دانیم $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. پس در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم :

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \frac{BC}{2000} \Rightarrow BC = 1000$$

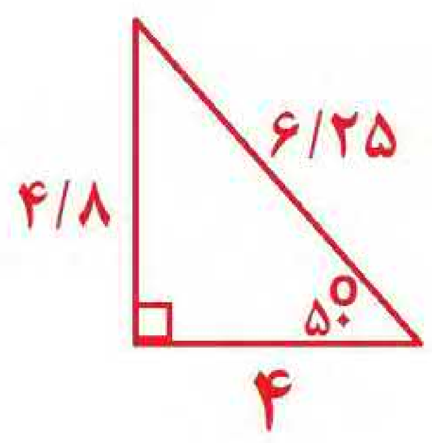
و از این‌رو

ارتفاع موشک = ...۱۰۰۰... + ...۱۵... = ...۱۰۱۵...

فعالیت



۱ یک زاویهٔ ۵۰° رسم کنید. با تشکیل یک مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری طول‌های موردنظر با یک خط‌کش مدرج، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۵۰° را به‌صورت تقریبی حساب کنید. سپس با ماشین حساب، مقادیر واقعی را به‌دست آورید و با مقادیر قبل مقایسه کنید.



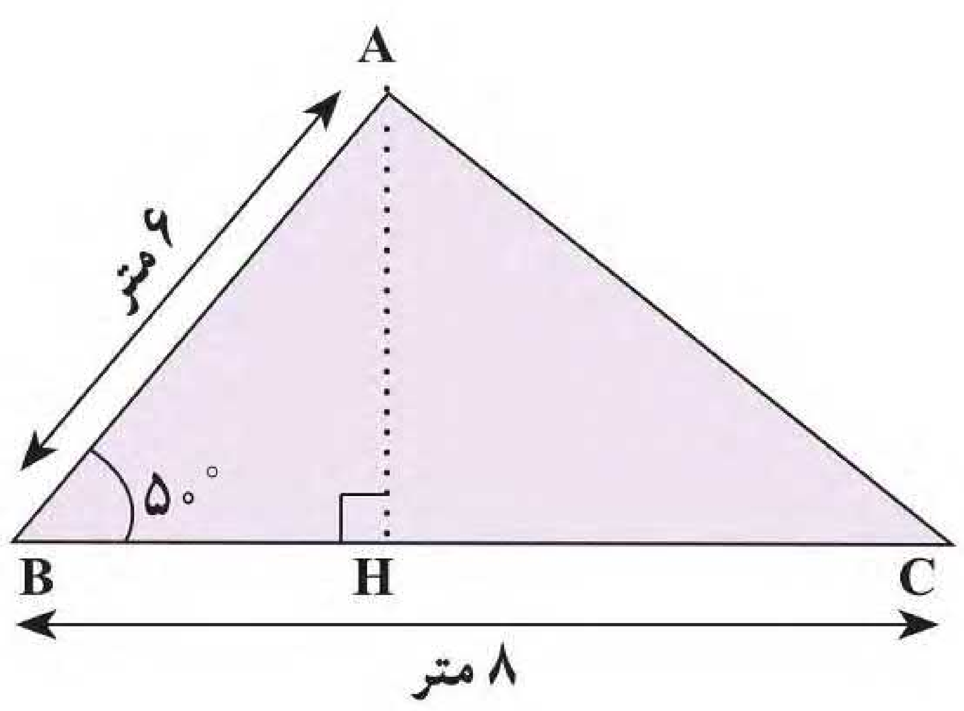
$$\sin 50^\circ = \frac{4/8}{6/25} = 0/768$$

۲ می‌خواهیم مساحت مثلث ABC در شکل زیر را پیدا کنیم. می‌دانیم :

مساحت مثلث ABC = $\frac{1}{2}$ × قاعده × ارتفاع

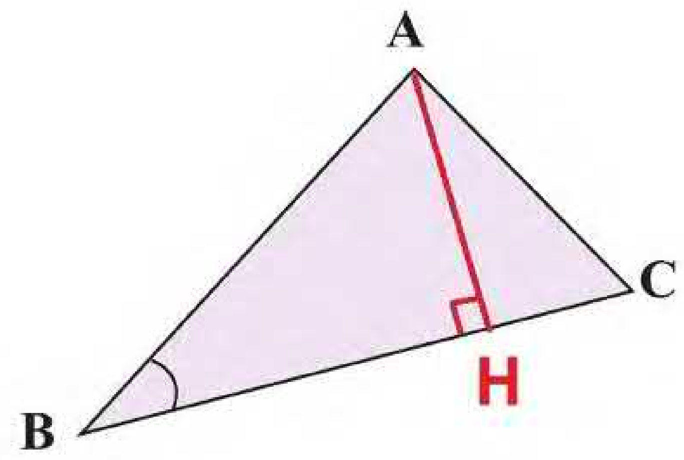
الف) با توجه به اینکه $\sin 50^\circ \simeq 0/76$، داریم :

$$\sin 50^\circ = \frac{AH}{\text{وتر}} = \frac{AH}{6} \Rightarrow AH \simeq 0/76 \times 6 = 4/56$$



ب) با توجه به قسمت (الف) داریم :

مساحت مثلث ABC = $\frac{1}{2} AH \times BC \simeq \frac{1}{2} \times 4/56 \times 8 = 18/24$

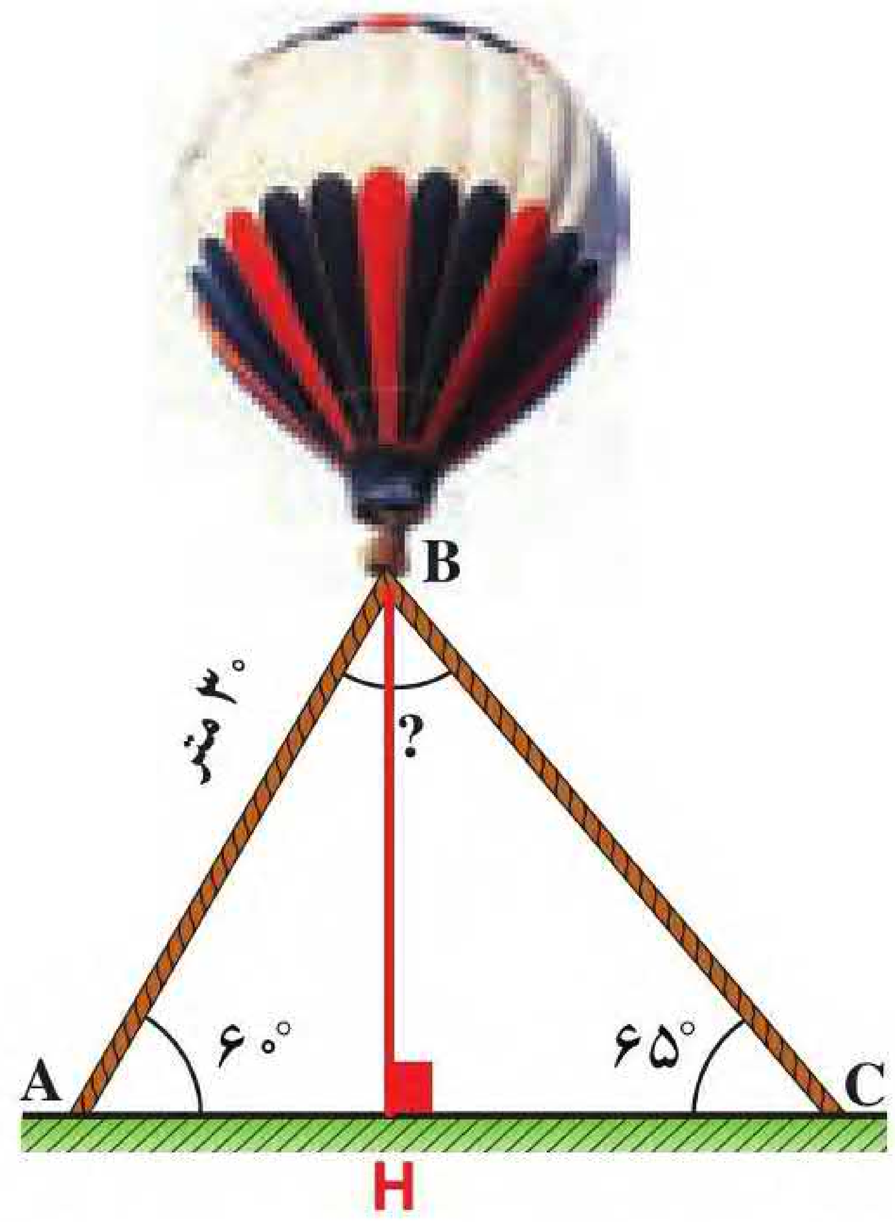


کار در کلاس

۱ در هر مثلث، با معلوم بودن مقادیر طول دو ضلع مثلث و اندازهٔ زاویهٔ بین آنها نشان دهید :

$$\text{مساحت}\ \overset{\Delta}{ABC} = \frac{۱}{۲} \times AB \times BC \times \sin B.$$

$$\left.\begin{aligned} &S = \tfrac{۱}{۲} BC \times AH \\ &\sin B = \tfrac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \times \sin B \end{aligned}\right\} \Rightarrow S = \tfrac{۱}{۲} BC \times AB \times \sin B$$



۲ در راه‌پیمایی ۲۲ بهمن، یک بالن اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است. می‌خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم.

الف) ابتدا اندازهٔ زاویهٔ B را به‌دست آورید. سپس ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم کنید و آن‌را BH بنامید.

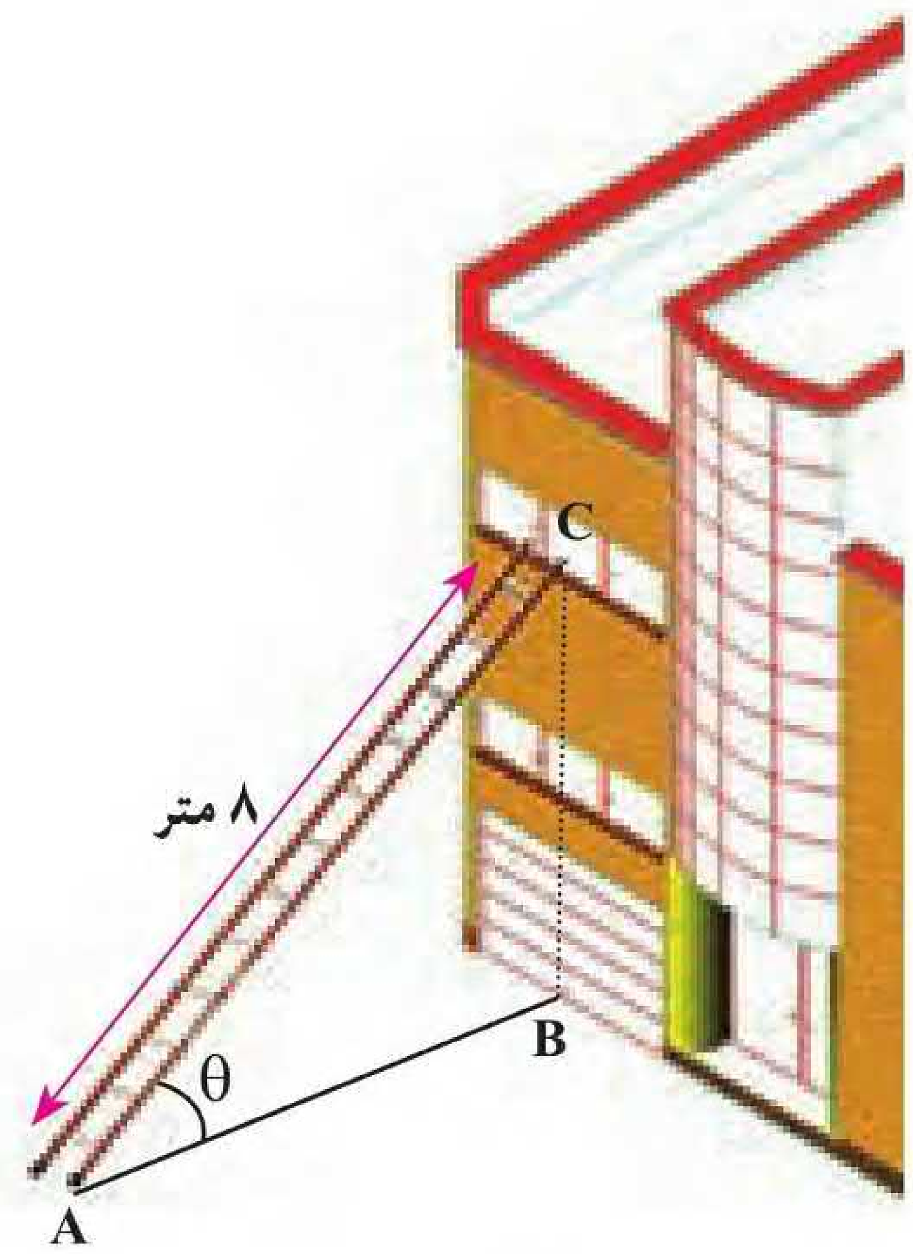
$$\widehat{B} + ۶۰^\circ + ۶۵^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{B} = ۵۵^\circ$$

ب) طول BH را با استفاده از سینوس زاویهٔ A به‌دست آورید.

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BH}{۳۰} \Rightarrow BH = ۱۵\sqrt{۳}$$

پ) اکنون با استفاده از سینوس زاویهٔ °۶۵، طول طناب دوم را پیدا کنید.

$$\sin ۶۵^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow ۰/۹۰۶ = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{BC} \Rightarrow BC = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۰/۹۰۶} \simeq ۲۸/۶۶۶۵$$



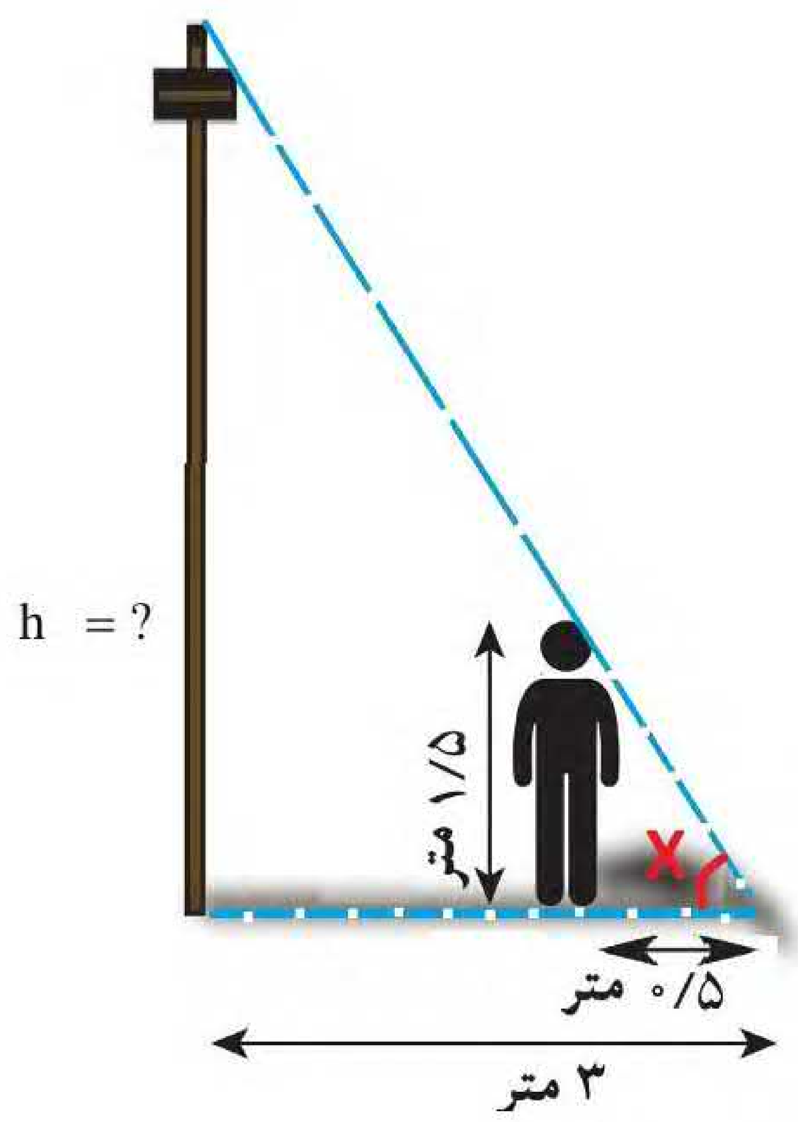
۲ مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجرهٔ ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویهٔ نردبان با سطح زمین °۳۰=θ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصلهٔ پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟

$$\sin\theta = \frac{BC}{۸} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{BC}{۸} \Rightarrow ۲BC = ۸ \Rightarrow BC = ۴$$

اکنون به‌کمک رابطهٔ فیثاغورس داریم :

$$AB^۲ = AC^۲ - BC^۲ = ۸^۲ - ۴^۲ = ۴۸ \Rightarrow AB = \sqrt{۴۸}$$

تمرین



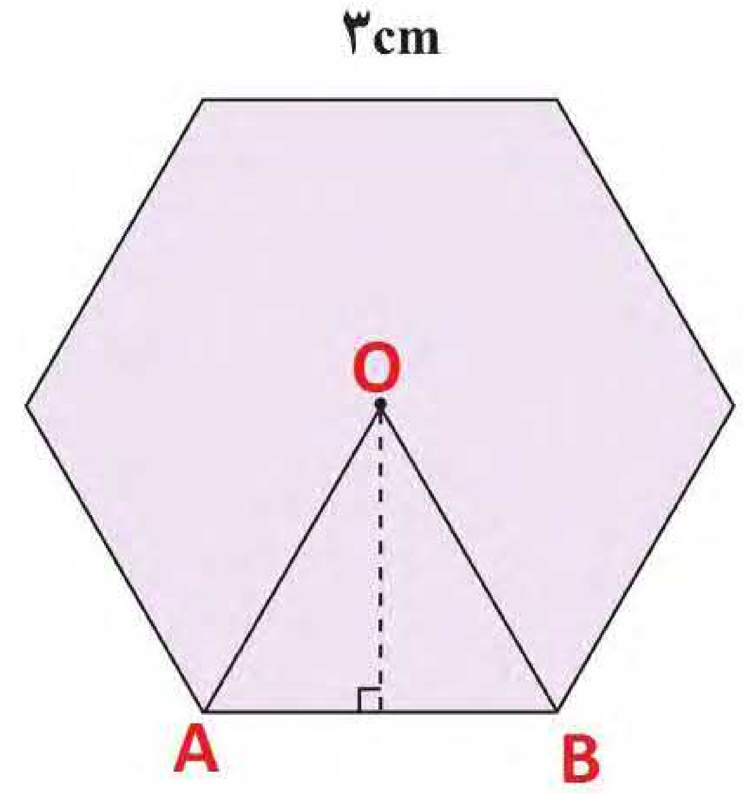
۱ نسرین می‌خواهد ارتفاع یک تیر برق را که طول سایهٔ آن ۳ متر است، حساب کند. قد نسرین ۱/۵ متر و طول سایهٔ او در همان لحظه ۰/۵ متر است. ارتفاع تیر برق چقدر است؟

شکل کتاب ایراد داشته که آن را اصلاح کرده و جواب می دهیم :

در مثلث قائم الزاویه ی کوچک $\tan x = \frac{۱/۵}{۰/۵}$ و در مثلث قائم الزاویه ی بزرگ $\tan x = \frac{h}{۳}$

می باشد . در نتیجه می توان نوشت : $\frac{۱/۵}{۰/۵} = \frac{h}{۳} \Rightarrow h = ۹$. یعنی ارتفاع تیر برق ۹ متر است .

۲ مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به‌دست آورید.



مطابق شکل ، هر شش ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی الاضلاع ساخته شده است بنابراین مثلث AOB متساوی الاضلاع است

بنابراین : $\left.\begin{array}{l} OA = ۳ \\ \widehat{A} = ۶۰^\circ \end{array}\right\}$

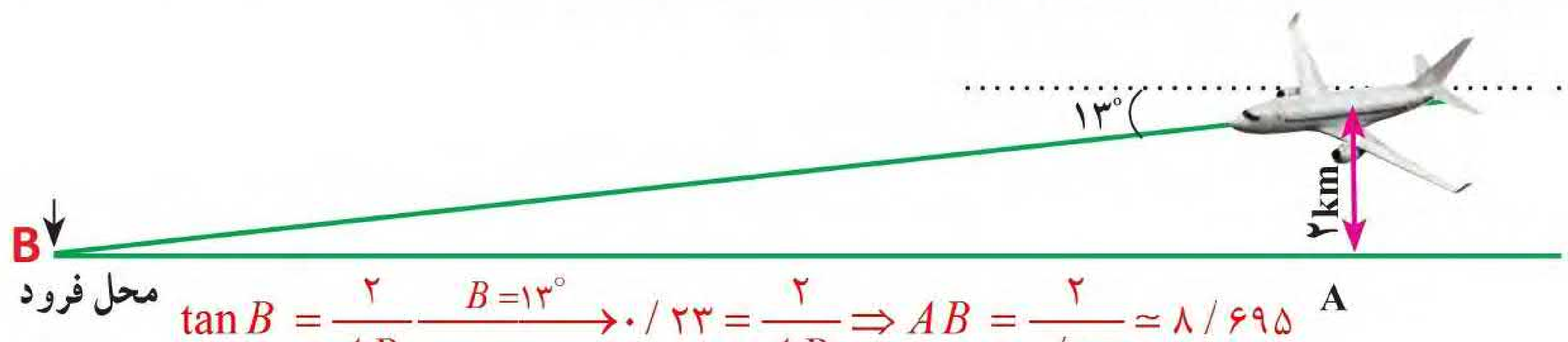
$$S_{AOB} = \frac{۱}{۲} OA \times AB \times \sin ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۳ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$$

$$\text{مساحت شش ضلعی منتظم} = ۶ \times S_{AOB} = ۶ \times \frac{۹\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$$

۳ یک هواپیما در ارتفاع ۲km از سطح زمین در حال فرودآمدن است. اگر زاویهٔ هواپیما با افق حدود °۱۳ باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطهٔ A فرود می‌آید.

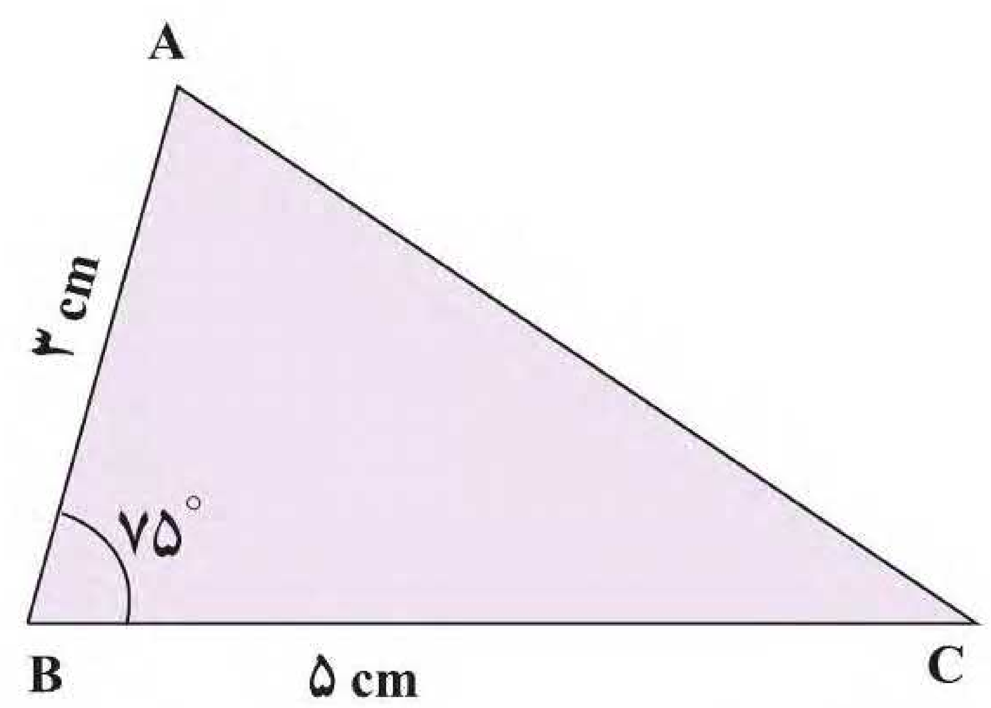
$\tan ۱۳^\circ \simeq ۰/۲۳$

طبق قضیه ی خطوط موازی ، زاویه ی B نیز ۱۳ درجه است.



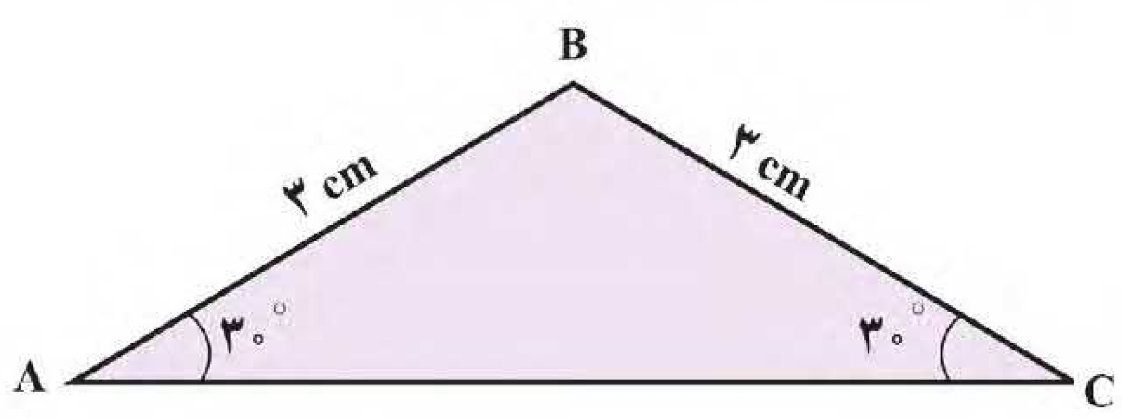
$$\tan B = \frac{۲}{AB} \xrightarrow{B = ۱۳^\circ} ۰/۲۳ = \frac{۲}{AB} \Rightarrow AB = \frac{۲}{۰/۲۳} \simeq ۸/۶۹۵$$

۴ فرض کنید $\sin ۷۵^\circ \simeq ۰/۹۶$. مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به‌دست آورید.



$$S = \frac{۱}{۲} AB \times BC \times \sin ۷۵^\circ = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times ۰/۹۶ = ۷/۲$$

۵ مساحت مثلث ABC را پیدا کنید.



روش اول (با استفاده از ماشین حساب) :

$$\widehat{B} + ۳۰^\circ + ۳۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{B} = ۱۲۰^\circ$$

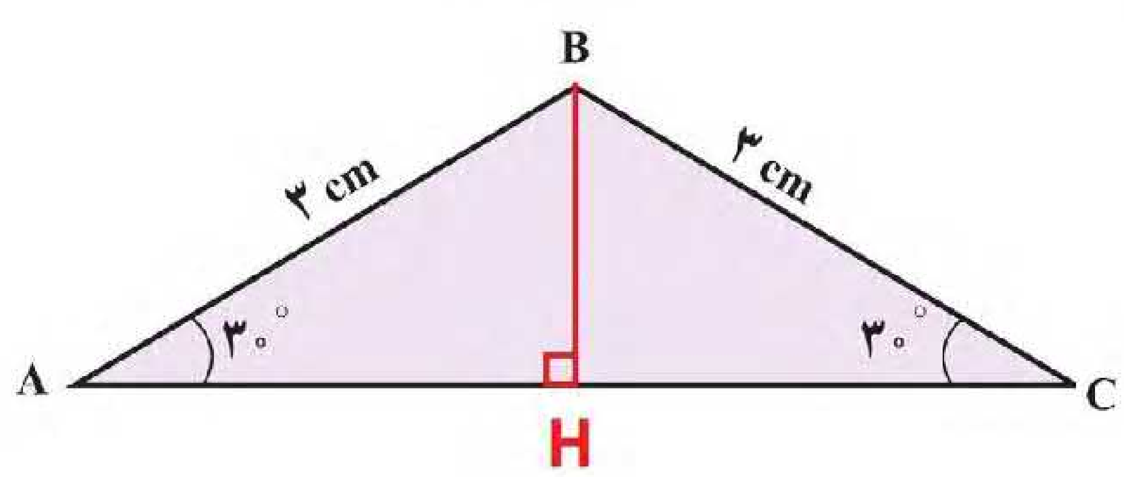
$$S = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۳ \times \sin ۱۲۰^\circ = \frac{۹}{۲} \times ۰/۸۶۶ = ۳/۸۹۷$$

روش دوم (بدون استفاده از ماشین حساب) :

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{AH}{۳} \Rightarrow AH = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABH}} = \frac{۱}{۲} AH \times AB \times \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} \times ۳ \times \frac{۱}{۲} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۸}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = ۲ \times S_{\overset{\Delta}{ABH}} = ۲ \times \frac{۹\sqrt{۳}}{۸} = \frac{۹\sqrt{۳}}{۴} = ۳/۸۹۷$$



ماهواره‌ها به دور زمین در یک مسیرِ بسته، که آن را مَدار می‌نامند، درحال گردش هستند. این مسیرها می‌توانند دایره‌ای یا بیضوی باشند، اما مرکز زمین در هر حالت در مرکز یا در نقطه کانونی مسیر آن قرار می‌گیرد. ماهواره‌ها روی سه نوع مدار که بستگی به نوع کاربرد آن دارد، قرار می‌گیرند :

ماهواره‌های مدار پایین زمین، مدار قطبی و مدار زمین‌ایست. برخی از ماهواره‌های هواشناسی و ماهواره‌های جاسوسی از نوع مدار پایین زمین‌اند. در این فاصله، چرخش ماهواره‌ها با حرکت دورانی زمین کاملاً هم‌زمان و برابر است و باعث می‌شود ماهواره نسبت به نقطه مفروض روی زمین ثابت بماند.

ماهواره مدار زمین‌ایست، نسبت به زاویه‌ای که ایستگاه زمینی آن را می‌بینند، ثابت است، در نتیجه احتیاجی به تغییر جهت آنتن نیست و آنتن هر ماهواره می‌تواند حداکثر ۴/۴۲ درصد سطح کره زمین را بپوشاند. تمام ماهواره‌های مخابراتی و تلویزیونی از این نوع هستند.