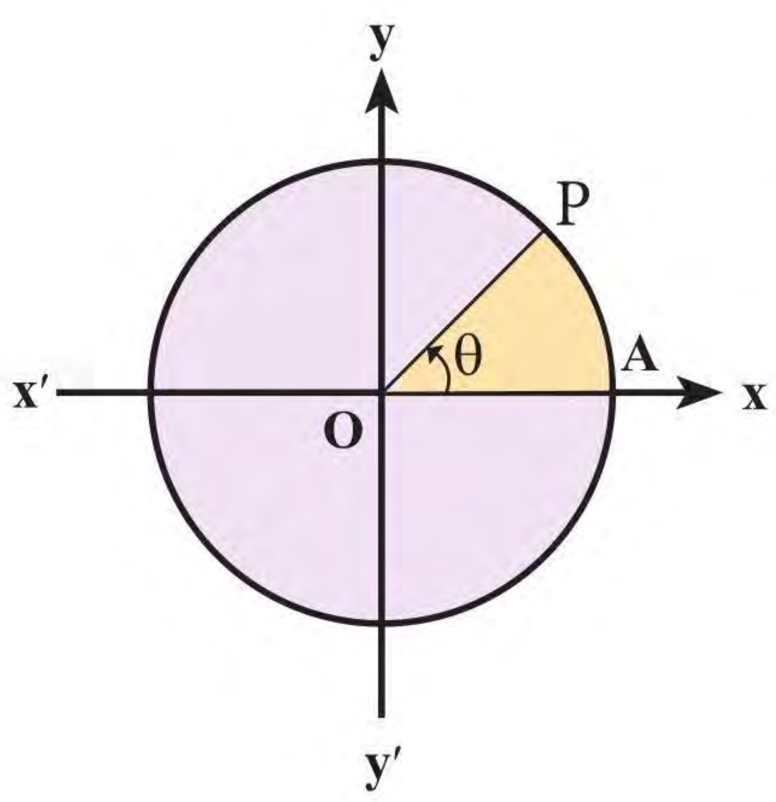
تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس دوم: دایره مثلثاتی


می‌توان از دایرهٔ مثلثاتی برای بیان مکان، زمان و توصیف بسیاری از حرکات همانند چرخش، حرکت دورانی، حرکات دوره‌ای، حرکات تناوبی و حرکات رفت و برگشتی در یک مسیر مشخص، استفاده کرد. یکی از این کاربردها، استفاده در سیستم رادارهاست.

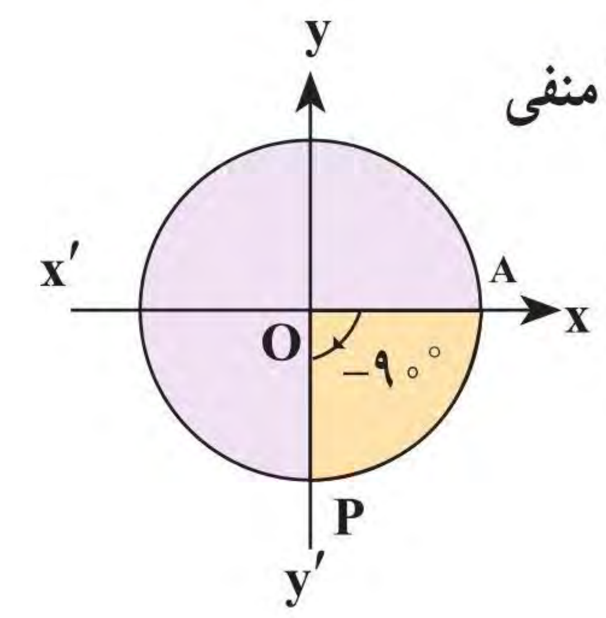


دایرهٔ روبه‌رو، به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ را درنظر بگیرید. نقطهٔ A مبدأ حرکت برای رسم زاویه است. اگر نقطهٔ P روی این دایره در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویهٔ AOP مثبت و حرکت در جهت عقربه‌های ساعت، منفی است. چنین دایره‌ای را یک دایرهٔ مثلثاتی می‌نامیم.

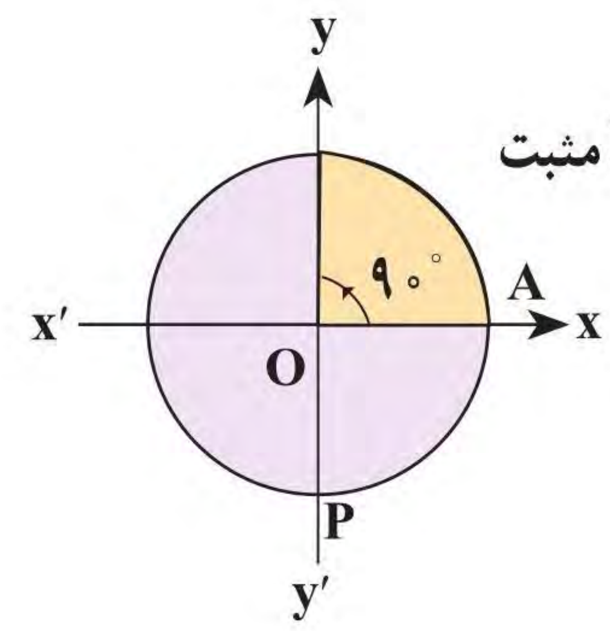
مثال

در هر یک از دایره‌های مثلثاتی سمت راست، مقدار زاویه‌های °۹۰-، °۹۰، °۲۱۰- و °۲۲۵ داده شده‌اند.

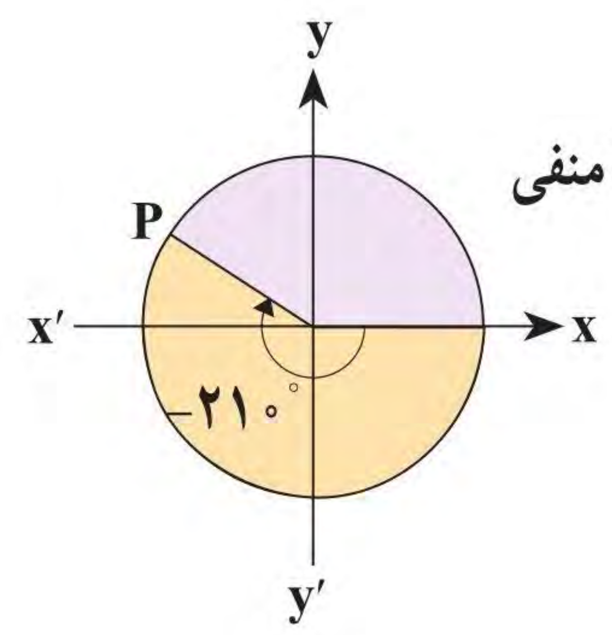
زاویهٔ منفی



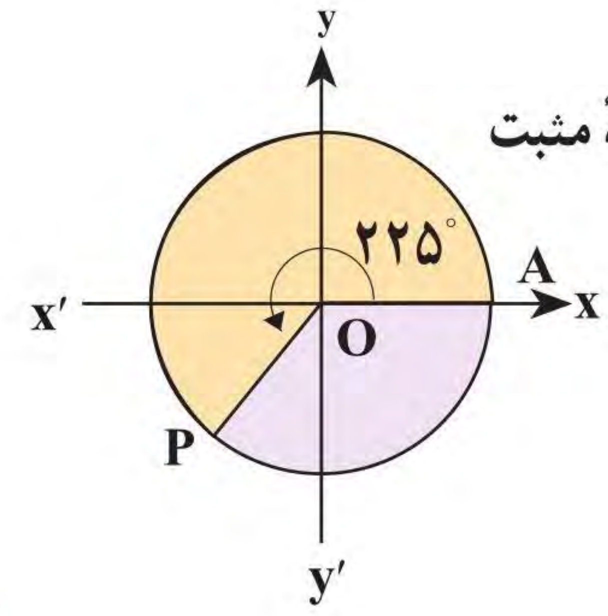
زاویهٔ مثبت



زاویهٔ منفی

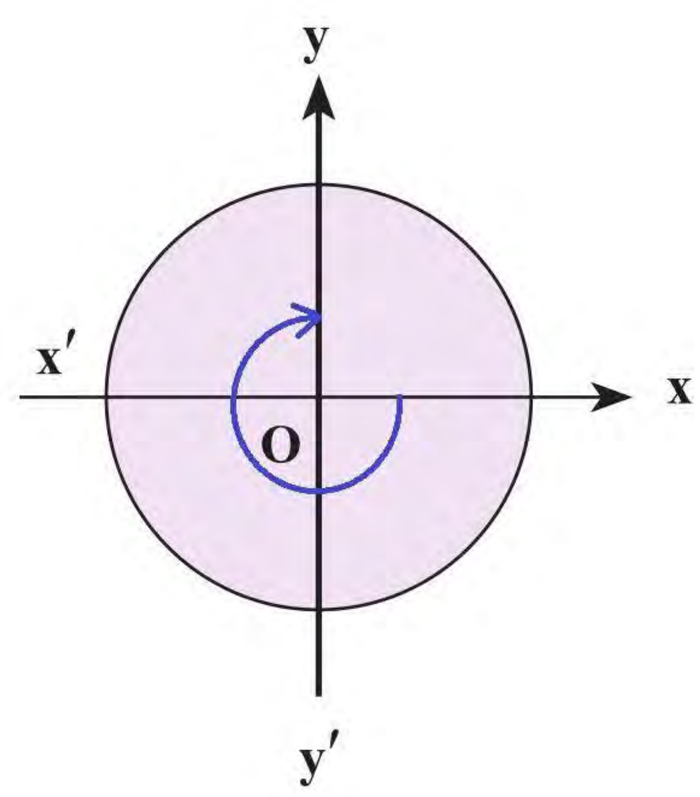


زاویهٔ مثبت

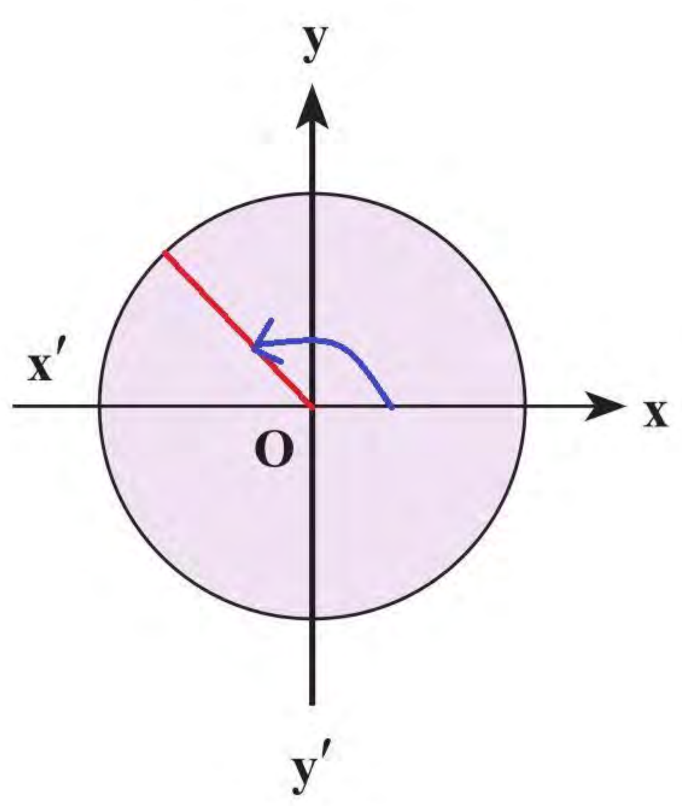


فعالیت

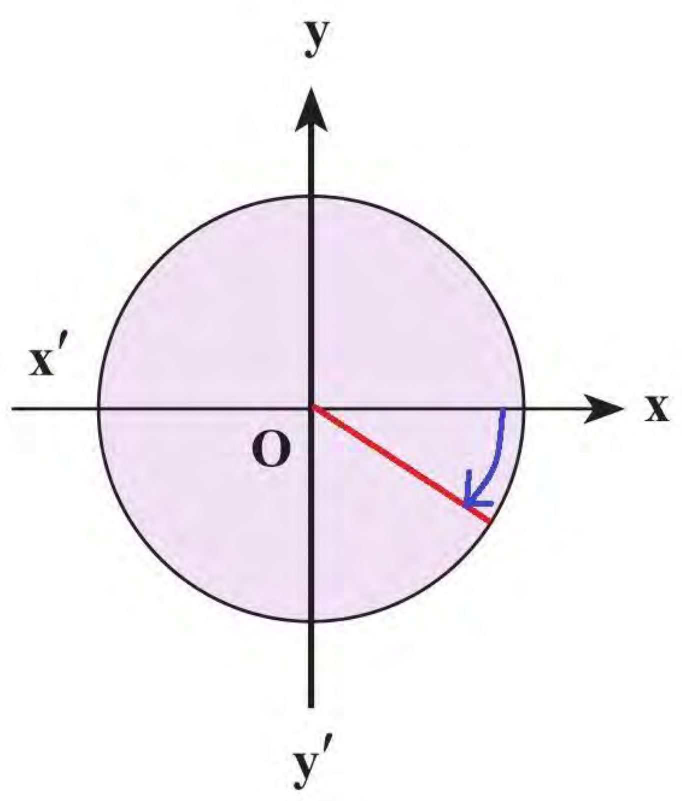
۱ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایره‌های مثلثاتی داده شده، نشان دهید.



°۲۷۰-

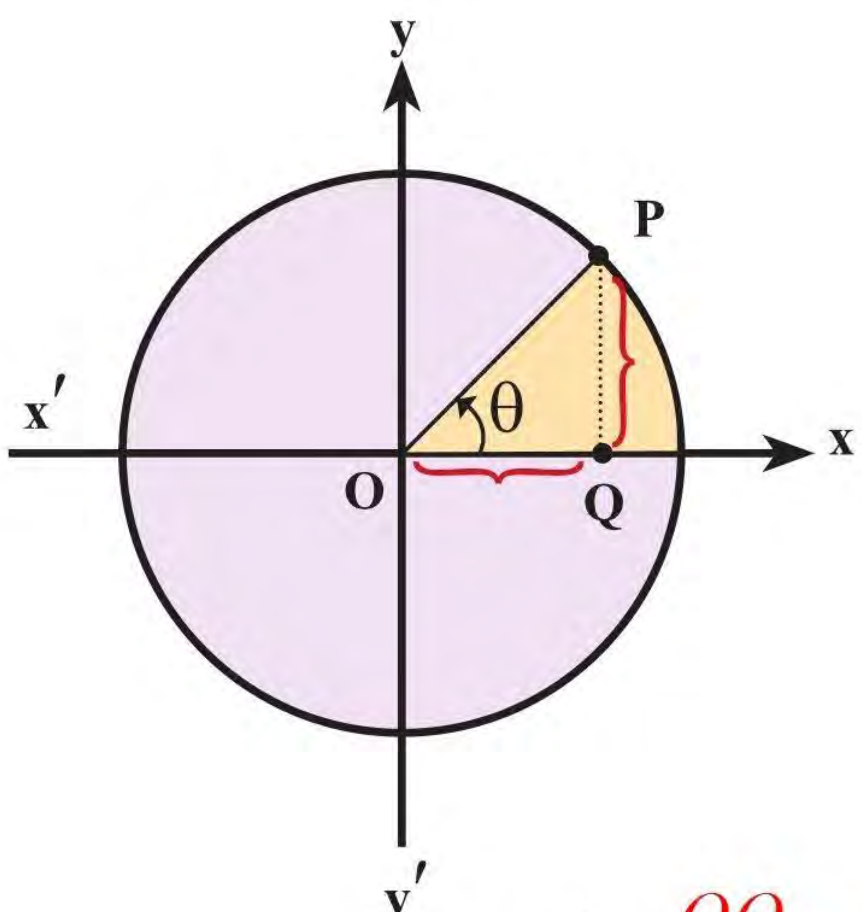


°۱۳۵



°۳۰-

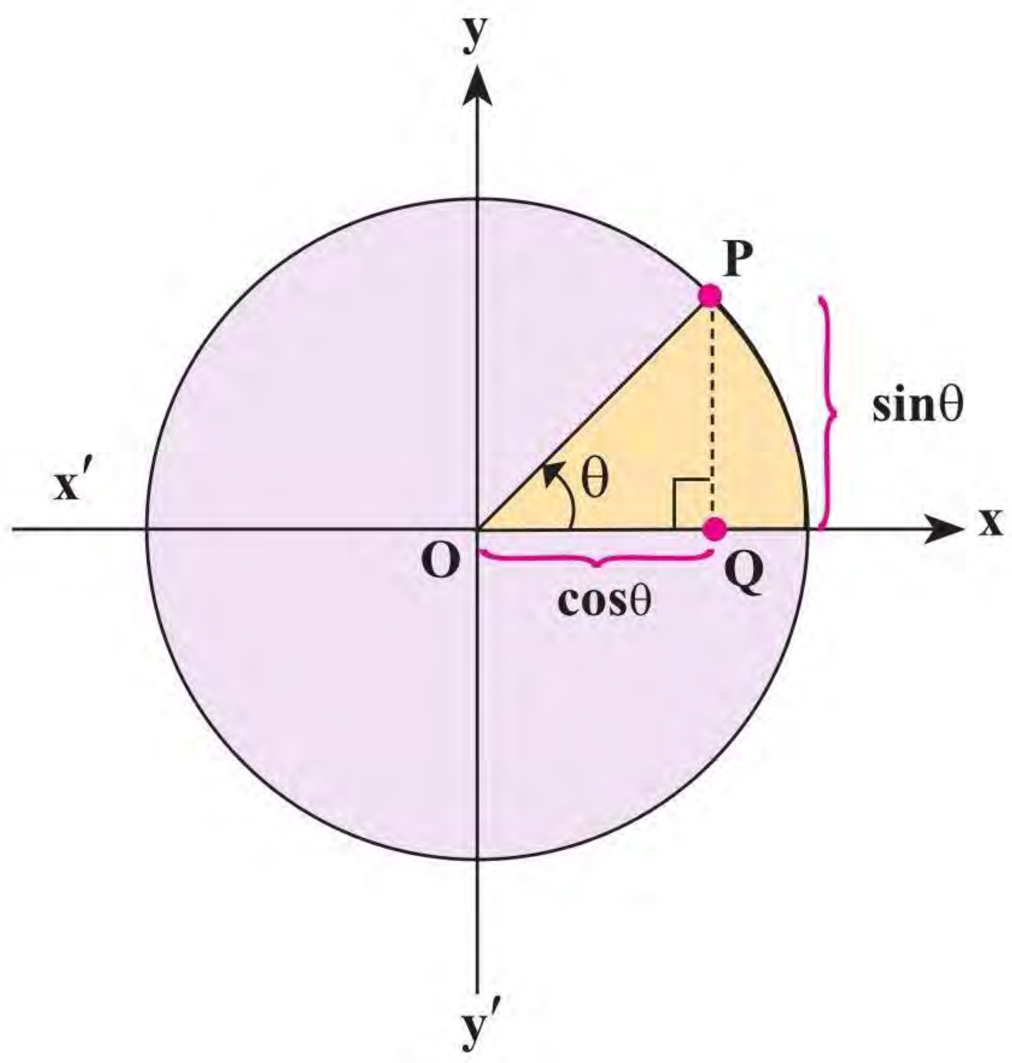
۲ فرض کنید P(x,y) نقطه‌ای دلخواه روی دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو باشد و θ زاویه‌ای است که نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{Ox}$ می‌سازد. از نقطهٔ P خطی بر محور $\overrightarrow{Ox}$ عمود می‌کنیم و محل برخورد را Q می‌نامیم.



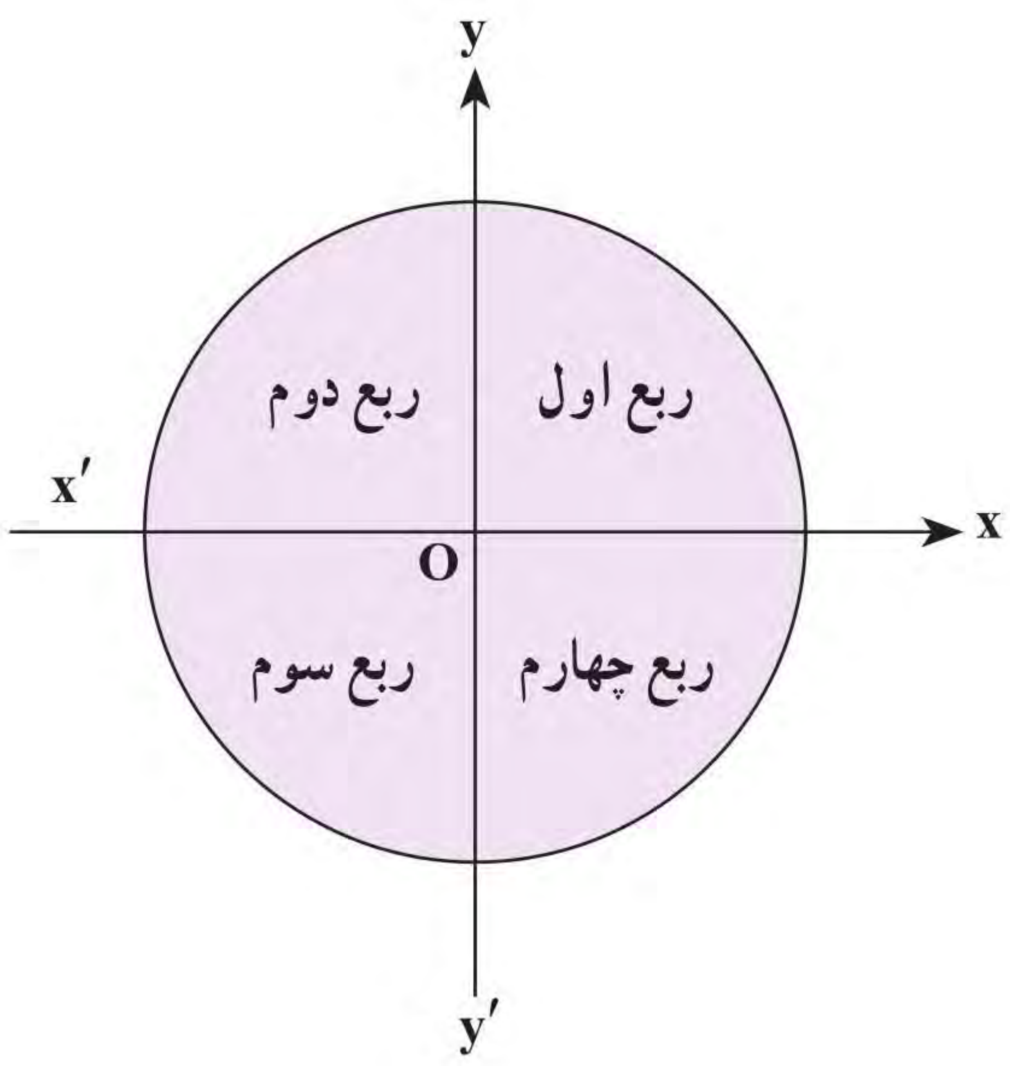
الف) در مثلث OPQ، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به‌دست آورید.

$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ}$ و $\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{۱} = PQ$ و $\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ}{۱} = OQ$

ب) با توجه به قسمت (الف) می‌توان دید فاصلهٔ Q تا مبدأ با $\cos\theta$ برابر است و فاصلهٔ نقطهٔ P تا پای عمود، یعنی نقطهٔ Q با $\sin\theta$ برابر است.



با توجه به قسمت (ب) محور $x'ox$ یا محور xها را محور کسینوس‌ها و محور $y'oy$ یا محور yها را محور سینوس‌ها می‌نامیم. به‌عبارت دیگر، اگر P نقطهٔ دلخواهی روی دایرهٔ مثلثاتی باشد که نیم‌خط OP با قسمت مثبت محور xها زاویهٔ θ می‌سازد، آنگاه P نقطه‌ای با مختصات (x,y) است که در آن $x=\cos\theta$ و $y=\sin\theta$.



نکته : دو محور عمود بر هم $x'ox$ و $y'oy$ صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند. هر یک از این قسمت‌ها را یک ناحیه یا یک ربع مثلثاتی می‌نامیم. با توجه به جهت دایرهٔ مثلثاتی، ناحیهٔ xoy را ربع اول، ناحیهٔ $x'oy$ را ربع دوم، ناحیهٔ $x'oy'$ را ربع سوم و ناحیهٔ xoy' را ربع چهارم مثلثاتی می‌نامیم.

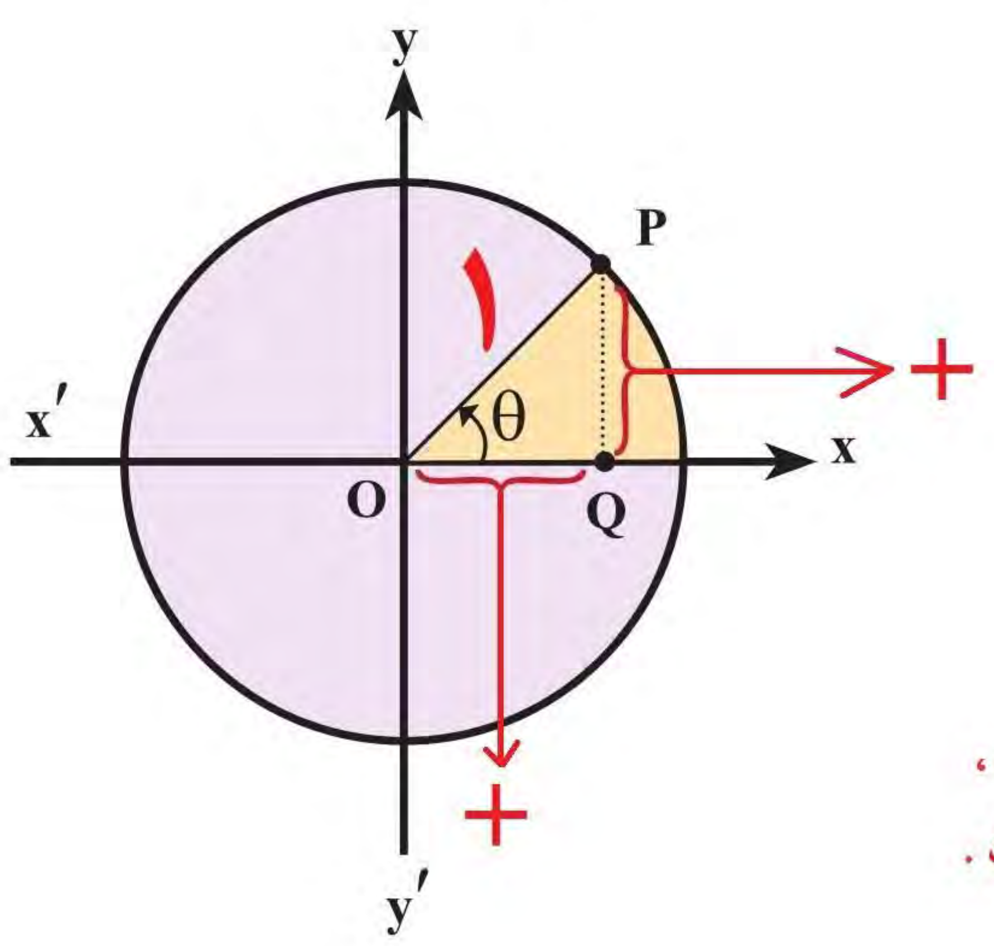
نکته : زاویه‌های ۰°، ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰° و ۳۶۰° زوایای مرزی هستند و آنها را در هیچ‌کدام از ناحیه‌های فوق در نظر نمی‌گیریم.

کار در کلاس

۱ مشخص کنید هر یک از زاویه‌های زیر در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد؟

الف) -۳۰° ب) ۶۵° پ) ۱۸۲° ت) -۹۵°

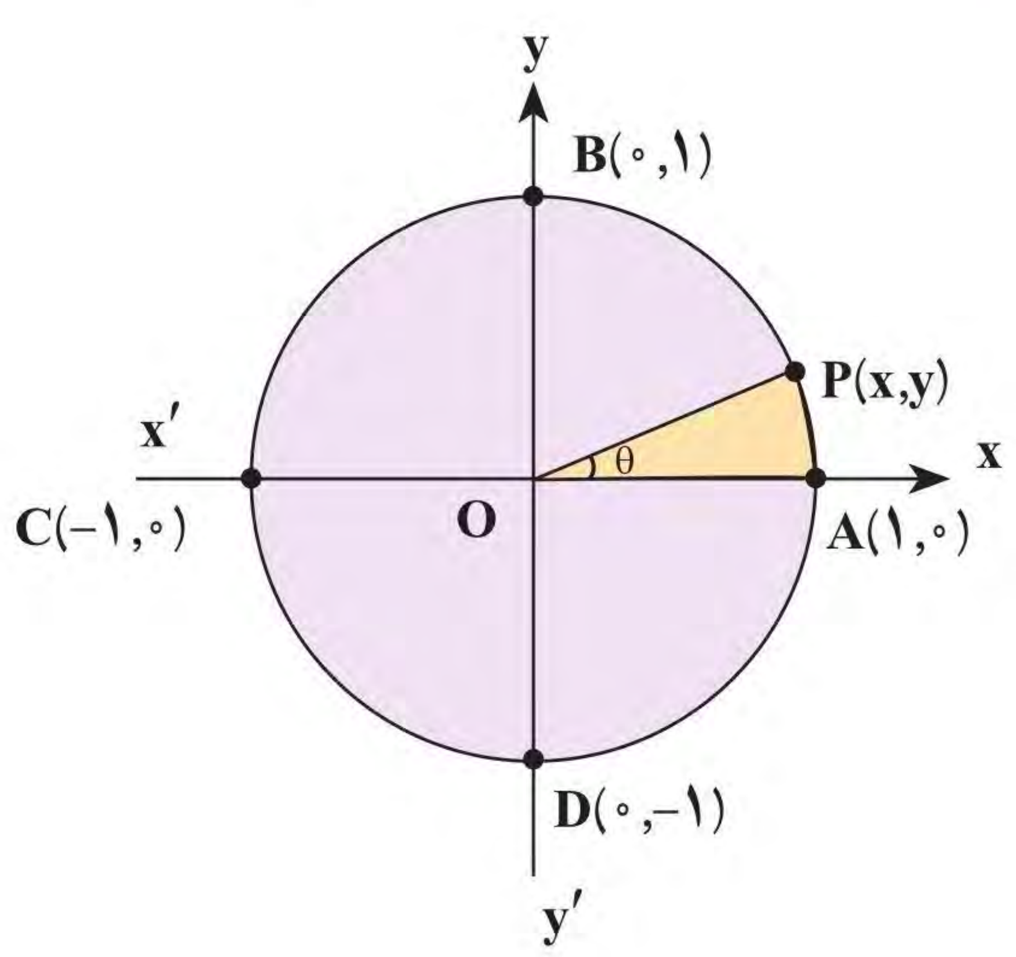
چهارم اول سوم سوم



۲ با توجه به آنچه در فعالیت قبل، به‌دست آوردید، توضیح دهید که اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ای در ربع اول باشد (زاویه در ربع اول باشد)، آنگاه چرا نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه، همگی مثبت‌اند؟

در ناحیه ی اول ، قسمت های مثبت دو محور مختصات وجود دارد (شکل روبرو) . و می دانیم طبق تعریف ، نسبت های مثلثاتی ، همان نسبت اندازه های مشخص شده در شکل هستند لذا همگی مثبت خواهند بود .

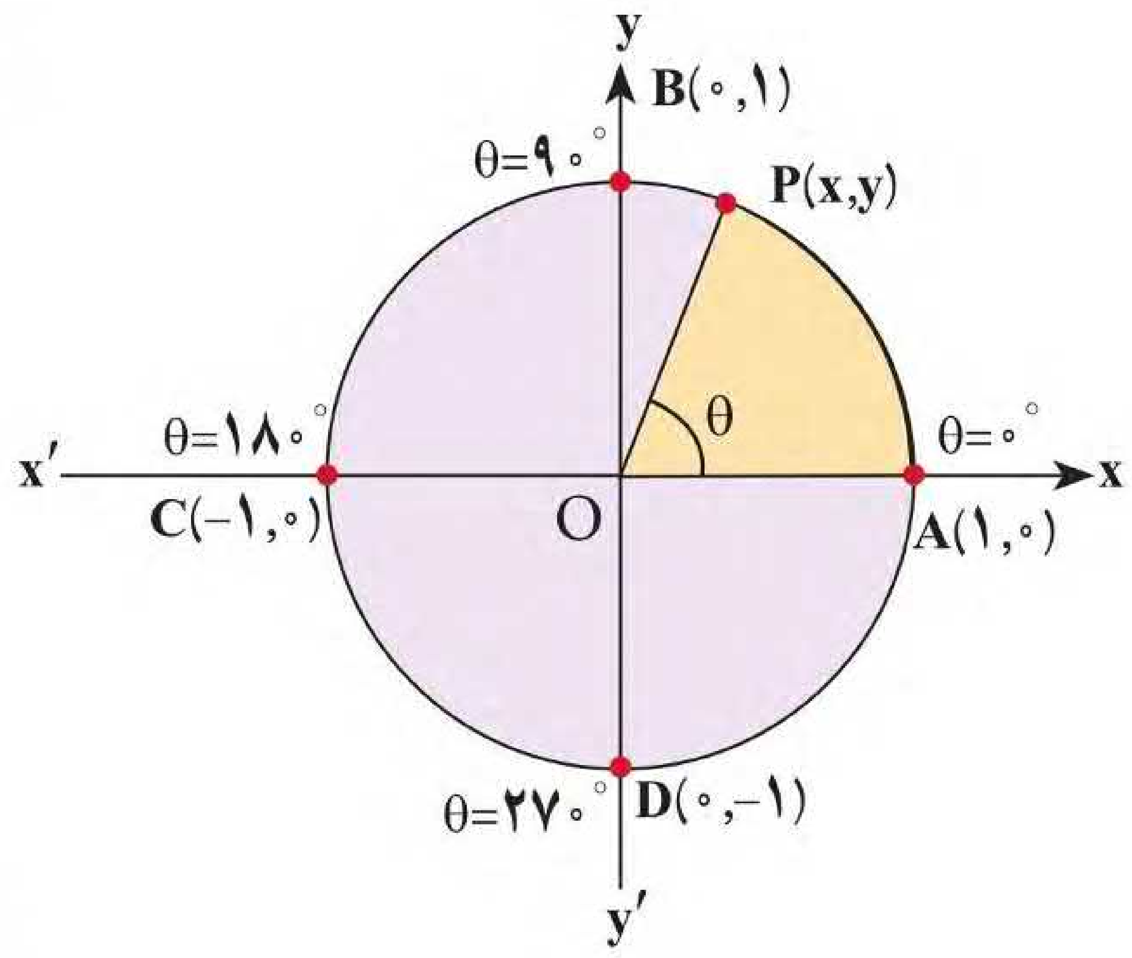
مثال



می‌خواهیم نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۰° را به‌دست آوریم. می‌دانیم در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو، $\sin\theta=y$ و $\cos\theta=x$. اگر $\theta=۰^\circ$، آنگاه نقطه P روی نقطهٔ A قرار می‌گیرد و داریم $\sin۰^\circ=۰$، همچنین $\cos۰^\circ=۱$ و $\tan۰^\circ=\frac{y}{x}=\frac{۰}{۱}=۰$ ، اما $\cot۰^\circ$ تعریف نمی‌شود (چرا؟).

زیرا $\cot ۰^\circ=\frac{x}{y}=\frac{۱}{۰}$

فعالیت



۱ در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو اگر $\theta=90^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

90° روی نقطه ی $B(0,1)$ واقع است بنابراین: $\sin 90^\circ = y_B = 1$ و $\cos 90^\circ = x_B = 0$ و $\tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0} =$ تعریف نشده

۲ اگر $\theta=180^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

180° روی نقطه ی $C(-1,0)$ واقع است بنابراین: $\sin 180^\circ = y_C = 0$ و $\cos 180^\circ = x_C = -1$ و $\tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$

۳ اگر $\theta=270^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کنید.

270° روی نقطه ی $D(0,-1)$ واقع است بنابراین: $\sin 270^\circ = y_D = -1$ و $\cos 270^\circ = x_D = 0$ و $\tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} =$ تعریف نشده

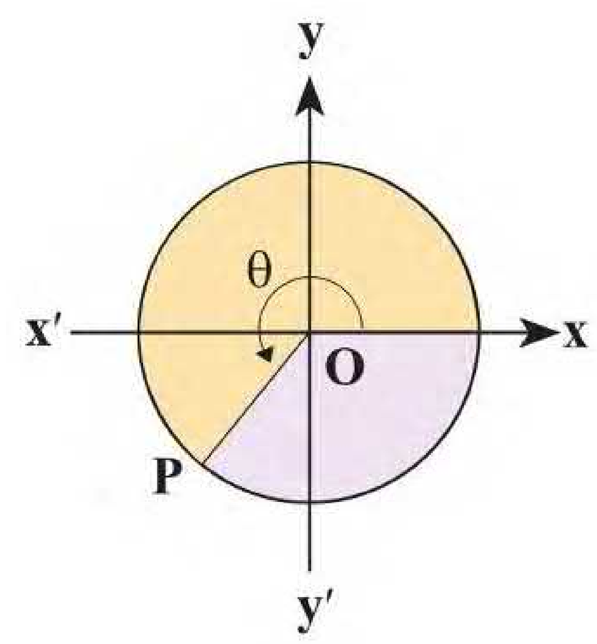
کار در کلاس

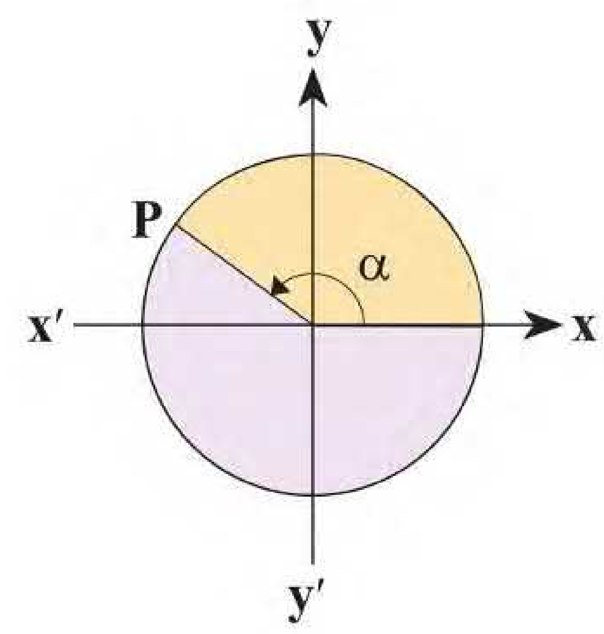
با توجه به نتایج بالا جدول زیر را کامل کنید:

مقدار	۰°	۹۰°		۲۷۰°	۳۶۰°
sinθ	۰	۱	۰	-۱	۰
cosθ	۱	۰	-۱	۰	۱
tanθ	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
cotθ	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

α در ربع اول است $\Rightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$
α در ربع دوم است $\Rightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$
α در ربع سوم است $\Rightarrow 180^\circ < \alpha < 270^\circ$
α در ربع چهارم است $\Rightarrow 270^\circ < \alpha < 360^\circ$

فعالیت





۱ فرض کنید θ زاویه‌ای در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد. با توجه به اینکه $y=\sin\theta$ و $x=\cos\theta$ و در ربع سوم، $x, y<0$، علامت هر یک از نسبت‌های مثلثاتی θ را در ربع سوم مشخص کنید.

$\sin\theta < 0 \quad , \quad \cos\theta < 0 \quad , \quad \tan\theta > 0$

۲ فرض کنید α زاویه‌ای در دایرهٔ مثلثاتی در ربع دوم باشد. فعالیت قبل را برای α نیز تکرار کنید.

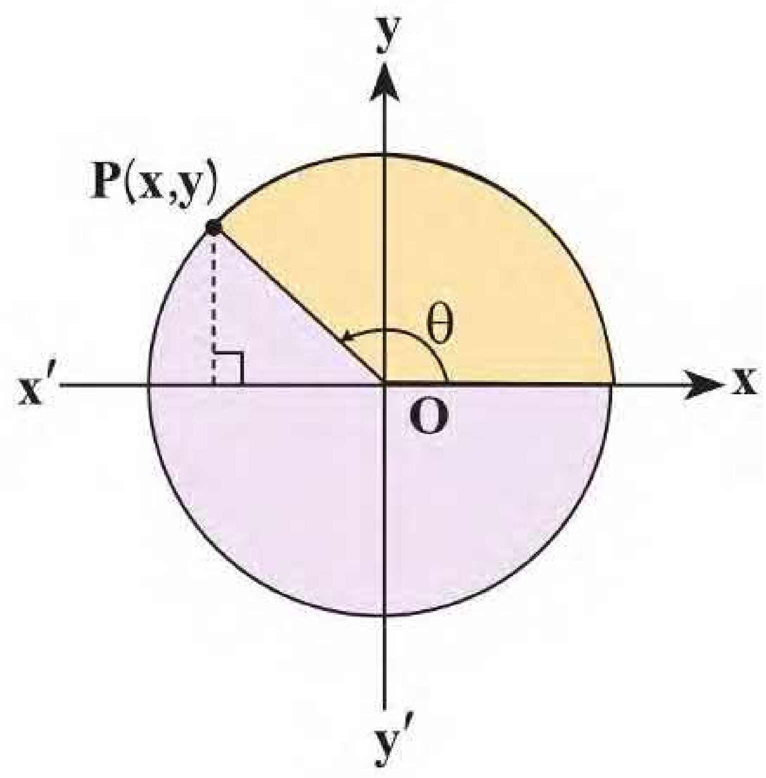
$\sin\theta > 0 \quad , \quad \cos\theta < 0 \quad , \quad \tan\theta < 0$

۳ جدول زیر را کامل کنید:

مقدار	ربع اول x,y>۰	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم ....
sinθ	+	+	−	−
cosθ	+	−	−	+
tanθ	+	−	+	−
cotθ	+	−	+	−

نکته: برای هر زاویهٔ دلخواه θ، $-1 \le \sin\theta \le 1$ و $-1 \le \cos\theta \le 1$.

مثال



آقای جلالی، از دانش‌آموزان پرسید : اگر θ زاویه‌ای در ربع دوم مثلثاتی باشد و $\sin\theta = \frac{۵}{۷}$ ،
آیا می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را پیدا کرد؟

امین : می‌دانیم $\sin\theta = y = \frac{۵}{۷}$ ، بنابراین P نقطه‌ای به عرض ... $\frac{۵}{۷}$ .. است.

معلم : درست است و حالا طول نقطه P چگونه به‌دست می‌آید؟

امیرعلی : طبق رابطهٔ فیثاغورس، در مثلث قائم‌الزاویه داریم : $x^۲+y^۲=۱$. بنابراین $x^۲ + \frac{۲۵}{۴۹} = ۱$ و در نتیجه $x^۲ = \frac{۲۴}{۴۹}$. اکنون داریم $x = \pm\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}$.

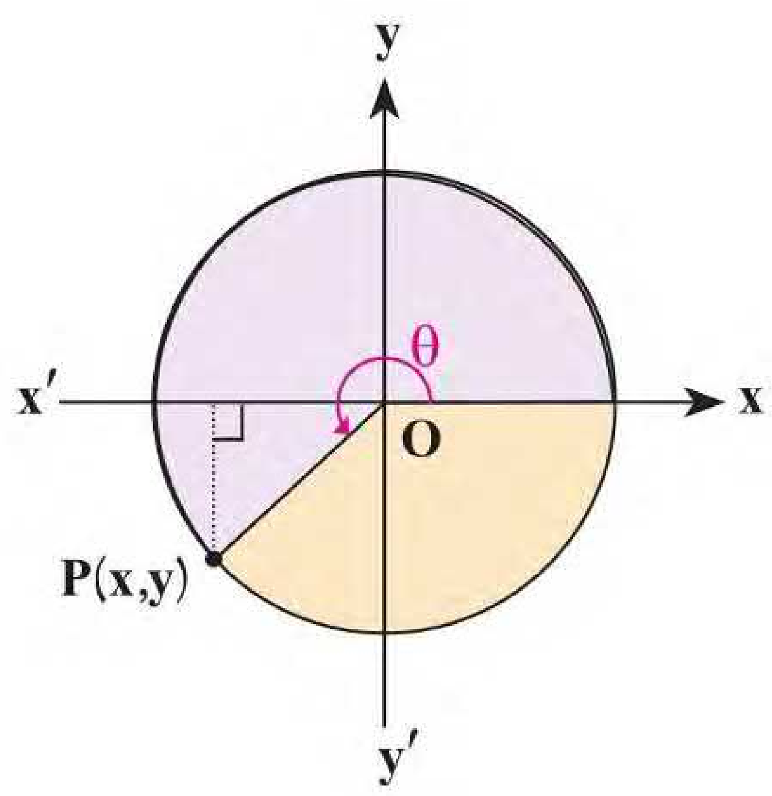
معلم : آفرین، این راه کاملاً درست است، ولی کدام مقدار قابل قبول است؟

محمد مهدی : چون θ زاویه‌ای در ربع ..دوم.. است، پس طول نقطهٔ P منفی است و از این‌رو $x = -\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}$ قابل قبول است.

معلم : استدلال محمدمهدی کاملاً منطقی است و در نتیجه P نقطه‌ای به مختصات $(...\frac{۵}{۷}... , -\frac{۲\sqrt{۶}}{۷})$ است. در نتیجه :

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = -\frac{۲\sqrt{۶}}{۵} \quad , \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{۵}{-۲\sqrt{۶}} \quad , \quad \cos\theta = x = -\frac{۲\sqrt{۶}}{۷}$$

فعالیت



۱ فرض کنید نقطه P روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد به‌طوری که $\cos\theta = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$. می‌دانیم θ در ربع سوم مثلثاتی قرار دارد، بنابراین ..... $y = \sin\theta = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

الف) مختصات نقطهٔ P را به‌دست آورید. $(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, -\frac{\sqrt{۲}}{۲})$

ب) سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را به‌دست آورید. $\tan\theta = \frac{y}{x} = ۱$ و $\cot\theta = \frac{x}{y} = ۱$

۲ اگر $\cos\alpha = \frac{-۲}{۵}$ ، آنگاه در مورد ناحیه‌ای که α در آن قرار می‌گیرد، بحث کنید.

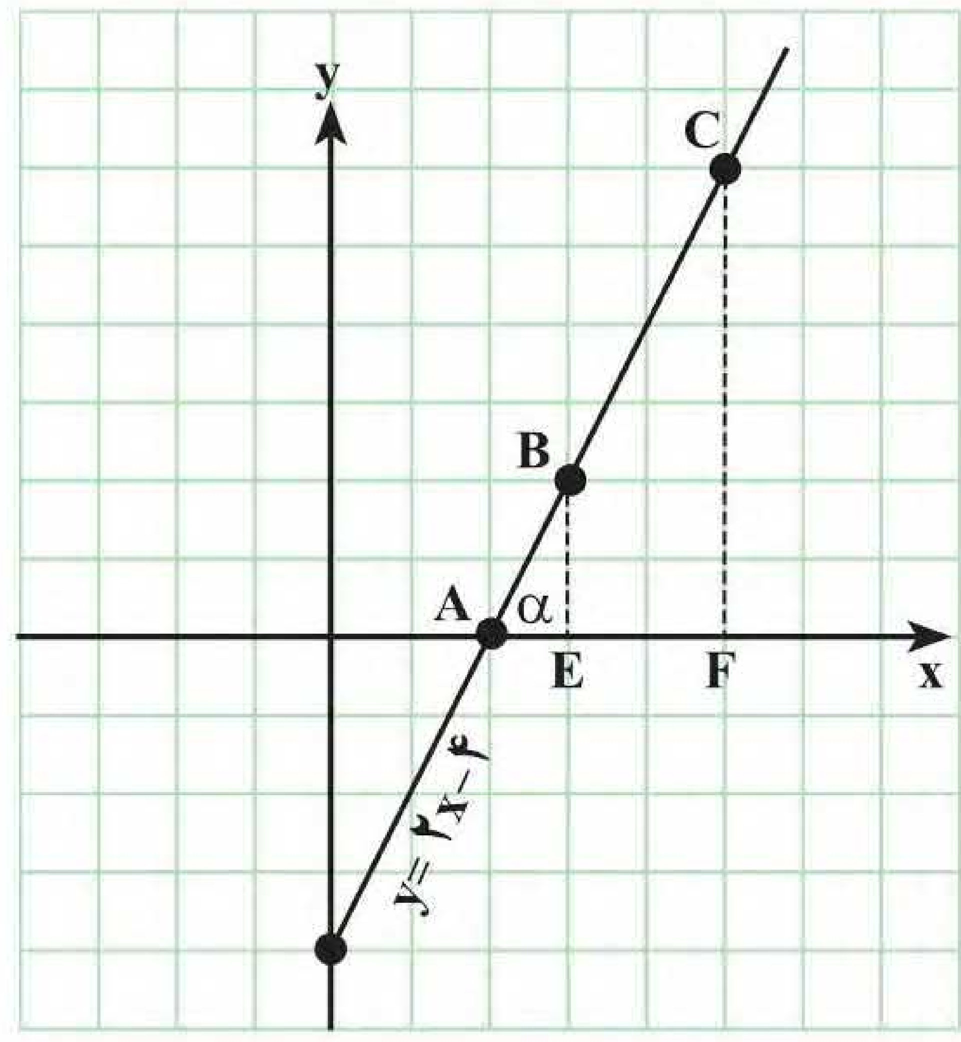
α فقط می تواند در نواحی دوم یا سوم باشد ، زیرا فقط در این نواحی کُسینوس منفی است

۳ زاویه‌ای مثال بزنید که سینوس آن منفی و کسینوس آن مثبت باشد.

این زاویه باید در ناحیه ی چهارم باشد پس هر زاویه از این ناحیه قابل قبول است به طور مثال زاویه ی ۳۰۰ درجه می تواند جواب باشد .

رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

فعالیت



نمودار خط y=۲x−۴ در شکل روبه‌رو رسم شده است. دو نقطهٔ B و C روی این خط را درنظر بگیرید و خطی از آنها به محور xها عمود کنید. پای عمودها را به ترتیب، E و F بنامید.

الف) تانژانت زاویهٔ α را به‌دست آورید.

$$\tan\alpha=\frac{BE}{AE}=\frac{۲}{۱}=۲$$

ب) شیب این خط را پیدا کنید.

$$A(۲,۰)\,,\,B(۳,۲) \Rightarrow \text{شیب خط}=\frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}=\frac{۲-۰}{۳-۲}=۲$$

پ) از مقایسهٔ قسمت (الف) و (ب) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ توضیح دهید.

می توان نیجه گرفت تانژانت زاویه بین خط و جهت مثبت محور افقی ، برابر شیب خط است .

شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویهٔ بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به‌عبارت دیگر، اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه :

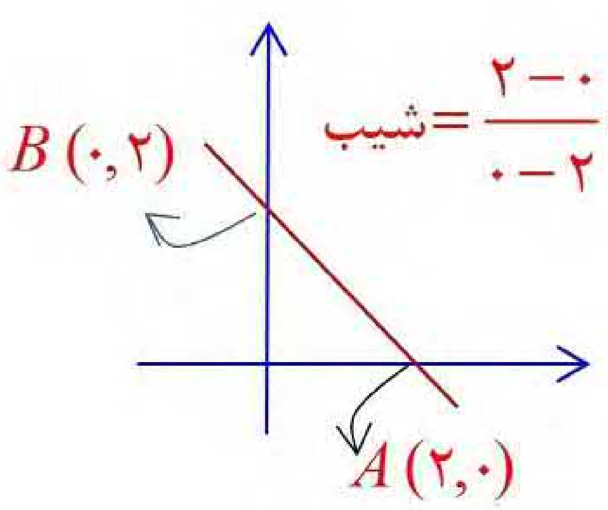
شیب خط =tanα

کار در کلاس

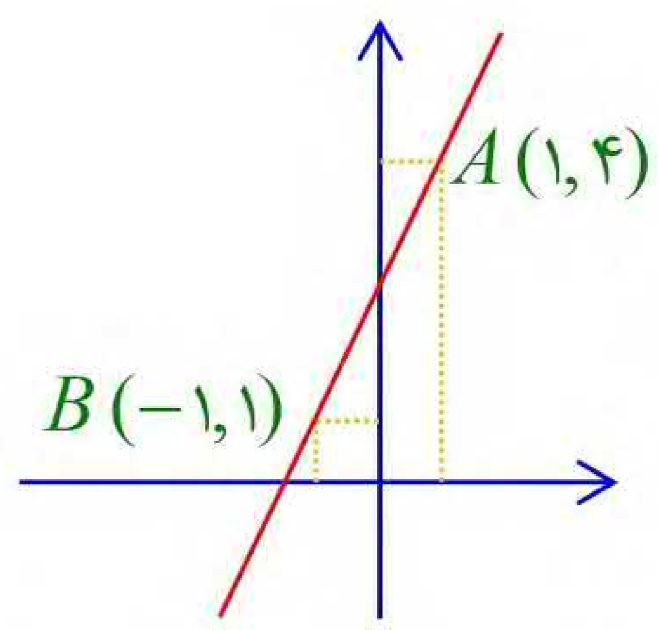
۱ فعالیت بالا را برای خط‌های زیر، تکرار کنید.

الف) ۲y−۳x=۵

ب) x+y=۲



$$\text{شیب}=\frac{۲-۰}{۰-۲}=-۱ \Rightarrow \tan\alpha=-۱$$



$$\text{شیب}=\frac{۴-۱}{۱-(-۱)}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{۳}{۲}$$

۲ معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با محور xها °۳۰ است و از نقطهٔ (۱,۰) می‌گذرد.

$$m=\tan ۳۰^\circ \Rightarrow m=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow y-۰=\frac{\sqrt{۳}}{۳}(x-۱)$$

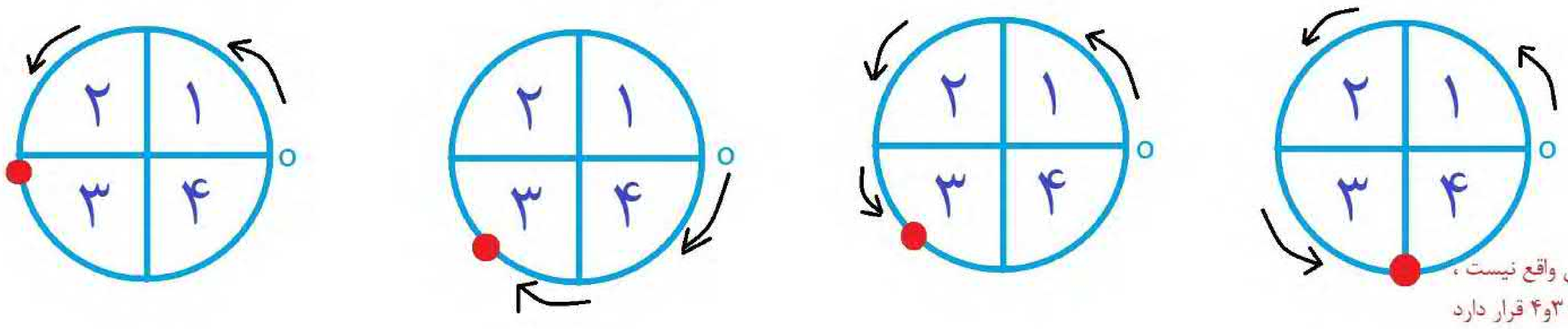
$$\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

نکته : اگر خطی با شیب m از نقطه ی $(x_۰\,,y_۰)$ بگذرد معادله ی آن $y-y_۰=m(x-x_۰)$ است .

تمرین

۱ هر یک از زاویه‌های زیر را روی دایرهٔ مثلثاتی رسم کنید، سپس مشخص کنید در کدام یک از نواحی چهارگانه قرار می‌گیرد.

الف) °۲۷۰+ ب) °۲۲۵ پ) °۱۳۵− ت) °۱۸۵



در هیچ کدام از نواحی واقع نیست ، بلکه در مرز دو ناحیه ی ۳و۴ قرار دارد

۲ در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به‌دست آورید.

الف) $\cos\alpha = \frac{۳}{۷}$ (α در ربع چهارم) همچون مثال صفحه ی ۳۹ عمل می کنیم :

$$x=\frac{۳}{۷} \xrightarrow{x^{۲}+y^{۲}=۱} \frac{۹}{۴۹}+y^{۲}=۱ \Rightarrow y^{۲}=\frac{۴۰}{۴۹} \Rightarrow y=-\frac{\sqrt{۴۰}}{۷} \Rightarrow \sin\alpha=-\frac{\sqrt{۴۰}}{۷} \quad , \tan\alpha=-\frac{\sqrt{۴۰}}{۳}$$

ب) $\sin\beta = \frac{-۱}{۲}$ (β در ربع سوم)

$$y=-\frac{۱}{۲} \xrightarrow{x^{۲}+y^{۲}=۱} x^{۲}+\frac{۱}{۴}=۱ \Rightarrow x^{۲}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow x=-\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \cos\beta=-\frac{\sqrt{۳}}{۲} \quad , \tan\beta=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

۳ اگر tanθ و sinθ هم علامت باشند، آنگاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟

در صورتی که هر دو مثبت باشند ، در ربع اول ، اما اگر هر دو منفی باشند در ربع چهارم

۴ حدود زاویهٔ θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید.

الف) $\sin\theta>۰ , \cos\theta>۰$ ربع اول

ب) $\sin\theta<۰ , \cos\theta>۰$ ربع چهارم

۵ اگر $\sin\alpha\times\cos\alpha<۰$، آنگاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می‌تواند قرار بگیرد؟ چرا؟

ضرب آنها منفی شده است ، پس دو حالت داریم :
اگر سینوس مثبت و کسینوس منفی باشد ، جواب ربع دوم است .
اما در صورتی که سینوس منفی و کسینوس مثبت باشد ، جواب ربع چهارم است .

۶ زاویه‌ای مثل α پیدا کنید به‌طوری‌که $\tan\alpha > \cot\alpha$. اکنون زاویه‌ای مثل β پیدا کنید، به‌طوری‌که $\cot\beta > \tan\beta$. از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$\alpha=۶۰^\circ \Rightarrow \tan۶۰^\circ=\sqrt{۳} \quad , \quad \cot۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \tan۶۰^\circ>\cot۶۰^\circ$$

$$\beta=۳۰^\circ \Rightarrow \tan۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \quad , \quad \cot۳۰^\circ=\sqrt{۳} \Rightarrow \cot۳۰^\circ>\tan۳۰^\circ$$

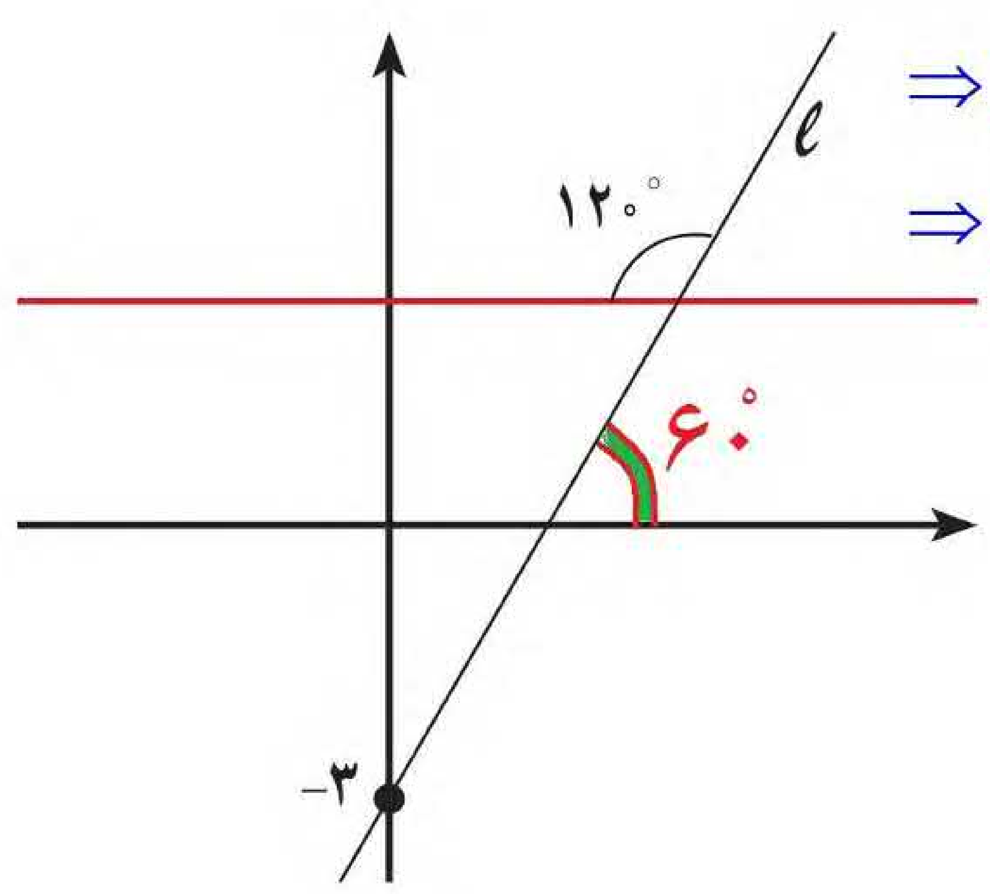
در ربع اول اگر زاویه بیشتر از ۴۵ درجه باشد ، تانژانت آن بیشتر از کتانژانت آن است . و اگر کمتر باشد ، برعکس است .

۷ معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با محور xها ۴۵° است و نقطهٔ (۰,۲) روی آن قرار دارد.

$$m=\tan۴۵^\circ=۱ \Rightarrow y-۲=۱(x-۰) \Rightarrow y=x+۲$$

۸ با توجه به شکل زیر، معادلهٔ خط ℓ را به‌دست آورید.

$$m=\tan۶۰^\circ=\sqrt{۳} \quad , \quad (۰,-۳)$$
$$\Rightarrow y-(-۳)=\sqrt{۳}(x-۰)$$
$$\Rightarrow y=\sqrt{۳}x-۳$$



در اخترشناسی، اغلب به مسئله‌هایی برمی‌خوریم که برای حل آنها به مثلثات نیازمندیم. ساده‌ترین این مسئله‌ها، پیدا کردن یک کمان دایره بر حسب درجه است. می‌توان دید، سینوس یک کمان از لحاظ قدرمطلق برابر با نصف طول وتری به‌اندازهٔ دو برابر آن کمان است. همین تعریف ساده، اساس رابطه بین کمان‌ها و وترها را در دایره تشکیل می‌دهد و مثلثات هم از همین‌جا شروع شد. کهن‌ترین جدولی که به ما رسیده است و در آن طول وترهای برخی کمان‌ها داده شده است متعلق به هیپارک، اخترشناس سدهٔ دوم میلادی است و شاید بتوان تنظیم این جدول را نخستین گام در راه پیدایش مثلثات دانست. همهٔ کارهای ریاضی‌دانان و اخترشناسان یونانی در درون هندسه انجام گرفت و هرگز به مفهوم‌های اصلی مثلثات نرسیدند. خوارزمی نخستین جدول‌های سینوسی را تنظیم کرد و پس از او همه ریاضی‌دانان ایرانی گام‌هایی در جهت تکمیل این جدول‌ها و گسترش مفهوم‌های مثلثاتی برداشتند. مروزی جدول سینوس‌ها را تقریباً ۳۰ درجه به ۳۰ درجه تنظیم کرد و برای نخستین بار به دلیل نیازهای اخترشناسی مفهوم تانژانت را تعریف کرد. جدی‌ترین تلاش‌ها به‌وسیله ابوریحان بیرونی و ابوالوفای بوزجانی انجام گرفت و سرانجام خواجه‌نصیرالدین‌طوسی با جمع‌بندی کارهای دانشمندان ایرانی پیش از خود، نخستین کتاب مستقل مثلثات را نوشت. بعد از طوسی، جمشید کاشانی ریاضی‌دان ایرانی با استفاده از روش زیبایی که برای حل معادلهٔ درجه سوم پیدا کرده بود، توانست راهی را برای محاسبهٔ سینوس کمان یک درجه، با هر دقت دلخواه پیدا کند. پیشرفت بعدی دانش مثلثات از سدهٔ پانزدهم میلادی و در اروپای غربی انجام گرفت.