تهیه کنندگان:

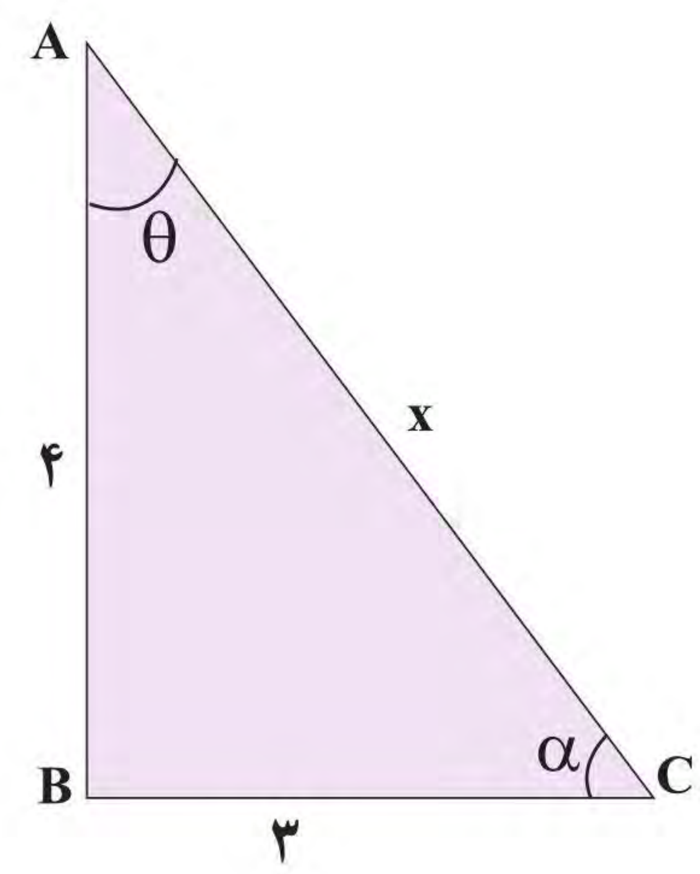
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

در درس‌های قبل با نسبت‌های مثلثاتی و دایرهٔ مثلثاتی آشنا شدید. در این درس روابطی بین این نسبت‌ها و کاربردهایی از آنها را بیان می‌کنیم.

فعالیت

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را درنظر بگیرید.



الف اندازهٔ وتر یعنی x را بیابید و سپس مقدار عددی هر یک از چهار نسبت مثلثاتی را برای زاویهٔ θ و α به‌دست آورید.

$\sin\alpha = \frac{۴}{۵}$

$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{۵}$

$\cos\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{۳}{۵}$

$\cos\theta = \frac{۴}{۵}$

$\tan\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{۴}{۳}$

$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{۳}{۴}$

$\cot\alpha = \frac{۳}{۴}$

$\cot\theta = \frac{۱}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{۴}{۳}$

ب با توجه به مقادیر عددی حاصل در قسمت (الف) مقدار $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta$ و $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha$ را به‌دست آورید.

$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$ و $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$

$\sin\theta\times\sin\theta=(\sin\theta)^۲=\sin^۲\theta$

پ درستی رابطهٔ $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta = ۱$ را با استفاده از تعریف و اضلاع مثلث، بررسی کنید.

$$(\sin\theta)^۲ + (\cos\theta)^۲ = \sin^۲\theta + \cos^۲\theta = (\frac{BC}{AC})^۲ + (\frac{AB}{AC})^۲ = \frac{BC^۲ + AB^۲}{AC^۲} = \frac{AC^۲}{AC^۲} = ۱$$

ت مشابه قسمت (پ) درستی رابطهٔ $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha = ۱$ را بررسی کنید.

$$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = (\frac{AB}{AC})^۲ + (\frac{BC}{AC})^۲ = \frac{AB^۲+BC^۲}{AC^۲} = \frac{AC^۲}{AC^۲} = ۱$$

اگر α زاویهٔ دلخواهی باشد، همواره داریم :

$$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$$

کار در کلاس

با توجه به رابطهٔ بالا، یعنی $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$ جاهای خالی را پر کنید :

الف) $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱ \Rightarrow \sin^{۲}\alpha=۱-\cos^{۲}\alpha \quad \Rightarrow \sin\alpha=\pm\sqrt{۱-\cos^{۲}\alpha}$

ب) $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱ \Rightarrow \cos^{۲}\alpha=۱-\sin^{۲}\alpha \quad \Rightarrow \cos\alpha=\pm\sqrt{۱-\sin^{۲}\alpha}$

تذکر : در رابطه‌هایی که به‌دست آوردید، علامت نسبت مثلثاتی زاویهٔ α با توجه به ناحیه‌ای که زاویهٔ α در آن قرار دارد، تعیین می‌شود.

مثال

اگر α زاویه‌ای در ناحیهٔ سوم مثلثاتی باشد و $\sin\alpha=\frac{-۴}{۵}$، آنگاه مقدار $\tan\alpha$، $\cos\alpha$ و $\cot\alpha$ را به‌دست آورید.

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{۱-\sin^{۲}\alpha} \xRightarrow{\alpha \text{ درناحیه سوم}} \cos\alpha=-\sqrt{۱-\frac{۱۶}{۲۵}}=-\frac{۳}{۵}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{۴}{۵}}{-\frac{۳}{۵}}=\frac{۴}{۳} \qquad \cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=\frac{۱}{\frac{۴}{۳}}=\frac{۳}{۴}$$

کار در کلاس

رابطه‌های تانژانت برحسب کسینوس و کتانژانت برحسب سینوس

در این قسمت رابطه‌ای برای تانژانت بر حسب کسینوس یک زاویه و همچنین رابطه‌ای برای کتانژانت برحسب سینوس، به‌دست می‌آوریم :

$$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱ \Rightarrow \frac{\sin^{۲}\alpha}{\cos^{۲}\alpha}+\frac{\cos^{۲}\alpha}{\cos^{۲}\alpha}=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$$

۱ $$\Rightarrow \tan^{۲}\alpha+۱=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha} \qquad (\cos\alpha\neq ۰)$$

$$\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱ \Rightarrow \frac{\sin^{۲}\alpha}{\sin^{۲}\alpha}+\frac{\cos^{۲}\alpha}{\sin^{۲}\alpha}=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha}$$

۲ $$\Rightarrow ۱+\cot^{۲}\alpha=\frac{۱}{\sin^{۲}\alpha} \qquad (\sin\alpha\neq ۰)$$

۳ اگر $۹۰^\circ < \alpha < ۱۸۰^\circ$ و $\tan\alpha = \frac{-۳}{۴}$، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

$$\frac{۱}{\cos^۲\alpha} = ۱ + \tan^۲\alpha = ۱ + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{۴}{۵}$$

$$\sin^۲\alpha = ۱ - \cos^۲\alpha = ۱ - \frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۳}{۵}$$

اتحاد مثلثاتی

هر یک از تساوی‌های $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$ ، $۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}\ (\cos\alpha \neq ۰)$ و $۱ + \cot^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha}\ (\sin\alpha \neq ۰)$ را که به ازای هر α همواره برقرار است، یک اتحاد مثلثاتی می‌نامیم.

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم بین دو عبارت مثلثاتی یک تساوی (اتحاد) برقرار است، می‌توانیم یک طرف تساوی را بنویسیم و با توجه به روابط بین نسبت‌های مثلثاتی به‌طرف دیگر برسیم.

به مثال زیر توجه کنید:

ساعت آفتابی وسیله‌ای است که زمان را با استفاده از مکان خورشید در آسمان می‌سنجد و از میله‌ای ساخته شده است که روی صفحه‌ای قرار دارد و ساعت‌های شبانه‌روز، روی صفحه نشانه‌گذاری شده‌اند. وقتی مکان خورشید در آسمان عوض می‌شود، مکان سایهٔ میله هم روی صفحه جابه‌جا می‌شود و ساعت را نشان می‌دهد.

مثال

درستیِ اتحاد مثلثاتی زیر را بررسی کنید.

$$(\frac{۱}{\cos\theta} + \tan\theta)(۱ - \sin\theta) = \cos\theta$$

$$(۱+\sin\theta)(۱-\sin\theta) \xlongequal{\text{اتحاد مزدوج}} ۱-\sin^۲\theta = \cos^۲\theta$$

حل:

$$\text{طرف چپ} = (\frac{۱}{\cos\theta} + \tan\theta)(۱ - \sin\theta) = (\frac{۱}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta})(۱ - \sin\theta)$$

$$= (\frac{۱+\sin\theta}{\cos\theta})(۱ - \sin\theta) = \frac{۱-\sin^۲\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^۲\theta}{\cos\theta} = \cos\theta = \text{طرف راست}$$

کار در کلاس

۱ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $\sin^۴\theta - \cos^۴\theta = \sin^۲\theta - \cos^۲\theta$

$$\text{طرف چپ} = \sin^۴\theta - \cos^۴\theta \xlongequal{\text{اتحاد مزدوج}} (\sin^۲\theta - \cos^۲\theta)\times(\sin^۲\theta + \cos^۲\theta) = (\sin^۲\theta - \cos^۲\theta)\times ۱ = \sin^۲\theta - \cos^۲\theta$$

ب) $\frac{۱}{\cos\alpha}+\cot\alpha=\frac{\tan\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

طرف راست $=\frac{\tan\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sin\alpha}+\cot\alpha=\frac{۱}{\cos\alpha}+\cot\alpha$

۲ کدام‌یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

الف) $\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-۲\sin\alpha\cos\alpha$

$\alpha=۳۰^\circ\Rightarrow(\frac{۱}{۲})^۴+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۴=۱-۲\times\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\frac{۱}{۱۶}+\frac{۹}{۱۶}=۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow$ تساوی صحیح نیست

ب) $\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$

$\alpha=۳۰^\circ\Rightarrow(\frac{۱}{۲})^۴+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۴=۱-۲\times(\frac{۱}{۲})^۲\times(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲\Rightarrow\frac{۱}{۱۶}+\frac{۹}{۱۶}=۱-\frac{۶}{۱۶}\Rightarrow$ تساوی صحیح است

حال باید درستی آن را در حالت کلی اثبات نماییم:

$\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=(\underbrace{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}_{۱})^۲-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$

۳ با ضرب کردن طرفینِ اتحاد مثلثاتی $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ در $\cot\alpha$ یک اتحاد مثلثاتی بسازید.

$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\xrightarrow{\times\cot\alpha}\cot\alpha+\cot\alpha\tan^۲\alpha=\cot\alpha\times\frac{۱}{\cos^۲\alpha}\Rightarrow\cot\alpha+\underbrace{\cot\alpha\tan\alpha}_{۱}\tan\alpha=\frac{\cancel{\cos\alpha}}{\sin\alpha}\times\frac{۱}{\cos^{\cancel{۲}}\alpha}\Rightarrow\boxed{\cot\alpha+\tan\alpha=\frac{۱}{\sin\alpha.\cos\alpha}}$

تمرین

۱ فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیهٔ دوم مثلثاتی باشد و $\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}$. نسبت‌های دیگر مثلثاتیِ زاویهٔ α را به‌دست آورید.

$\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۴}{۵}$ و $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{۴}{۵}\div\frac{-۳}{۵}=\frac{۴}{۵}\times\frac{-۵}{۳}=-\frac{۴}{۳}$

۲ اگر $\tan\alpha=\frac{-۴}{۳}$ و α زاویه‌ای در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویهٔ α را به‌دست آورید.

$\frac{۱}{\cos^۲\alpha}=۱+\tan^۲\alpha=۱+\frac{۱۶}{۹}=\frac{۲۵}{۹}\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۳}{۵}$ و $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\frac{-۴}{۳}\times\frac{۳}{۵}=-\frac{۴}{۵}$

۳ اگر $\sin۱۳۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه ۱۳۵° را به‌دست آورید.

$\cos^۲۱۳۵^\circ=۱-\sin^۲۱۳۵^\circ=۱-\frac{۲}{۴}=\frac{۲}{۴}\Rightarrow\cos۱۳۵^\circ=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\tan۱۳۵^\circ=\frac{\sin۱۳۵^\circ}{\cos۱۳۵^\circ}=\frac{\cancel{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}{-\cancel{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}=-۱$

۴ اگر $\tan۲۴۰^\circ=\sqrt{۳}$، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتیِ زاویهٔ ۲۴۰° را به‌دست آورید.

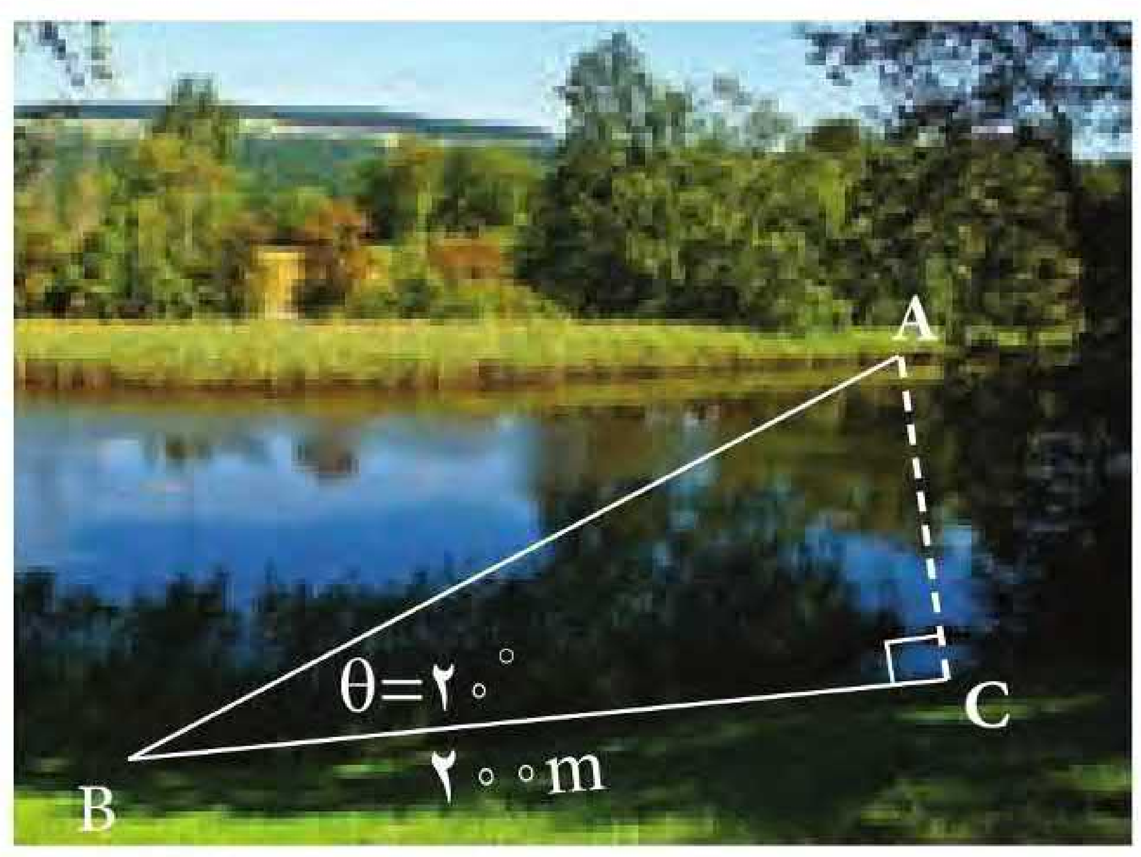
$\frac{۱}{\cos^۲\alpha}=۱+\tan^۲\alpha=۱+۳=۴\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{۱}{۲}$ و $\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\sqrt{۳}\times\frac{-۱}{۲}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۵ شخصی می‌خواهد عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه‌ای چون C و سپس نقطه‌ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می‌کند و به اندازهٔ ۲۰۰ متر از C به‌صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطهٔ B برسد. اگر زاویهٔ دید این شخص (از نقطهٔ B به نقطهٔ A)، ۲۰° باشد و $\sin۲۰^\circ\simeq۰/۳۴$، او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (پاسخ خود را تا دو رقم اعشار برحسب متر بنویسید.)

$\cos^۲۲۰^\circ=۱-\sin^۲۲۰^\circ=۱-۰/۱۱۵۶=۰/۸۸۴۴\Rightarrow\cos۲۰^\circ=۰/۹۴۰۴$

$\tan۲۰^\circ=\frac{\sin۲۰^\circ}{\cos۲۰^\circ}=\frac{۰/۳۴}{۰/۹۴۰۴}=۰/۳۶۱۵$

$\tan۲۰^\circ=\frac{AC}{BC}\Rightarrow۰/۳۶۱۵=\frac{AC}{۲۰۰}\Rightarrow AC=۷۲/۳$



البته روش های متفاوتی برای حل این سوال وجود دارد. و ممکن است جواب های بدست آمده با توجه به میزان دقت، با هم تفاوت داشته باشند.

۶ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{۱}{\sin\theta}\times\tan\theta=\frac{۱}{\cos\theta}$

$$\text{چپ}=\frac{۱}{\cancel{\sin\theta}}\times\frac{\cancel{\sin\theta}}{\cos\theta}=\frac{۱}{\cos\theta}$$

ب) $\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}=\frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\text{چپ}=\frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}\times\frac{۱-\sin\theta}{۱-\sin\theta}=\frac{\cos\theta(۱-\sin\theta)}{۱-\sin^{۲}\theta}=\frac{\cancel{\cos\theta}\,(۱-\sin\theta)}{\cos^{\cancel{۲}}\theta}=\frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta}$$

پ) $\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\cot\alpha}=\tan\alpha$

$$\text{چپ}=\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\cot\alpha}=\frac{۱+\tan\alpha}{۱+\frac{۱}{\tan\alpha}}=\frac{\tan\alpha\,\cancel{(۱+\tan\alpha)}}{\cancel{\tan\alpha+۱}}=\tan\alpha$$

ت) $۱-\frac{\cos^{۲}x}{۱+\sin x}=\sin x$

$$\text{چپ}=۱-\frac{\cos^{۲}x}{۱+\sin x}=۱-\frac{۱-\sin^{۲}x}{۱+\sin x}=۱-\frac{(۱-\sin x)\cancel{(۱+\sin x)}}{\cancel{۱+\sin x}}=۱-۱+\sin x=\sin x$$

ث) $\frac{۱}{\cos x}-\tan x=\frac{\cos x}{۱+\sin x}$

$$\text{چپ}=\frac{۱}{\cos x}-\tan x=\frac{۱}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۱-\sin x}{\cos x}\times\frac{۱+\sin x}{۱+\sin x}=\frac{۱-\sin^{۲}x}{\cos x\,(۱+\sin x)}=\frac{\cos^{\cancel{۲}}x}{\cancel{\cos x}\,(۱+\sin x)}=\frac{\cos x}{۱+\sin x}$$

اولین دانشمندی که جدول سینوس، کسینوس، شعاع دایره ای و نسبت مثلثاتی را کشف کرد، ابوالوفا محمد بن یحیی بن اسماعیل بن عباس بوزجانی خراسانی است. وی یکی از مفاخر علمی ایران، ریاضی‌دان و اخترشناس سدهٔ چهارم هجری قمری در اول رمضان ۳۲۸ (هـ.ق) در بوزجان (تربت جام امروزی)، در مرز خراسان و افغانستان زاده شد. او مقدمات ریاضیات زمان را، همان‌جا، نزد دایی و عمویش فرا گرفت. در سن ۲۰ سالگی به بغداد رفت و نزد اساتید مختلفی به تحصیل خود ادامه داد. وی پس از مدتی به یکی از دانشمندان مشهور زمان خود تبدیل شد و با دانشمندان هم عصر خود، مکاتبات علمی داشت. به عنوان مثال، وقتی ابوریحان در خوارزم بود، برای رصد همزمان گرفتگی ماه، با بوزجانی که در بغداد بود، قرار گذاشتند تا نتیجه دو رصد که در دو نقطه مختلف انجام می‌گرفت را با هم مقایسه کنند. ابوالوفا بر بسیاری از آثار پیشینیان (ایرانی و یونانی) مثل «مقدمات» اقلیدس، «جبر و مقابله» خوارزمی، «جبر» دیوفانت، «مجسطی» بطلمیوس و غیره تفسیر نوشت. خود نیز ابتکارات و نوآوری‌های بسیاری در هندسه و مثلثات دارد. سرانجام وی در سوم رجب ۳۸۸ (هـ.ق) در بغداد درگذشت.

تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم عزیزی، آنافیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

فصل ۳

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

پژوهشگاه رویان هشتم خرداد ماه سال ۱۳۷۰ به عنوان مرکز جراحی محدود با هدف ارائه خدمات درمانی به زوج‌های نابارور و پژوهش و آموزش در زمینه علوم باروری و ناباروری توسط زنده یاد دکتر سعید کاظمی آشتیانی و گروهی از پژوهشگران و همکارانش در جهاد دانشگاهی علوم پزشکی ایران تأسیس شد. در حال حاضر این پژوهشگاه فعالیت‌های پژوهشی خود را در سه پژوهشکده پزشکی تولیدمثل، سلول‌های بنیادی و زیست فناوری دنبال می‌کند و در دو مرکز درمان ناباروری و سلول‌درمانی نیز به بیماران خدمات ارائه می‌کند.