تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس دوم: ریشه nام

فعالیت

۱ مشابه آنچه که برای ریشه‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم گفته شد، می‌توان برای ریشه‌های دیگر مثلاً ریشهٔ ششم نیز عمل کرد. جدول زیر را که مربوط به ریشه‌های مختلف عدد ۶۴ است، کامل کنید.

ریشه‌های هشتم	ریشه هفتم	ریشه‌های ششم	ریشه پنجم	ریشه‌های چهارم	ریشه سوم	ریشه‌های دوم
$-\sqrt[8]{64}$ و $\sqrt[8]{64}$	$\sqrt[7]{64}$	$-\sqrt[6]{64}$ و $\sqrt[6]{64}$	$\sqrt[5]{64}$	$\sqrt[4]{64}$ و $-\sqrt[4]{64}$	$\sqrt[3]{64}$	$\sqrt{64}=8$ و $-\sqrt{64}=-8$

ریشه‌های ششم عدد ۶۴ اعداد $\sqrt[6]{64}$ و $-\sqrt[6]{64}$ یا همان ۲ و ۲- هستند؛ زیرا $64=2^6$ و $64=(-2)^6$

دربارهٔ ریشه‌های هفتم و هشتم عدد ۶۴ چه می‌توانید بگویید؟ دارای یک ریشه ی هفتم و دو ریشه ی هشتم است.

به طور کلی اگر $n \in \mathbb{N}$، دربارهٔ ریشهٔ nام عدد ۶۴ چه می‌توان گفت؟

اگر n فرد باشد دارای یک ریشه ی مثبت است و در صورتی که n زوج باشد دارای دو ریشه مثبت و منفی است که با هم قرینه اند.

در حالت کلی‌تر اگر a یک عدد مثبت باشد و $n \in \mathbb{N}$، دربارهٔ تعداد ریشه‌های n ام a چه می‌توان گفت؟ دقیقاً همچون عدد ۶۴ گوییم:

اگر n فرد باشد دارای یک ریشه ی مثبت است و در صورتی که n زوج باشد دارای دو ریشه ی مثبت و منفی است که با هم قرینه اند.

۲ جدول زیر را که دربارهٔ ریشه‌های مختلف عدد ۶۴- است، تکمیل کنید.

ریشه‌هشتم	ریشه هفتم	ریشه‌ششم	ریشه پنجم	ریشه‌چهارم	ریشه سوم	ریشه دوم
وجود ندارد	$\sqrt[7]{-64}$	وجود ندارد	$\sqrt[5]{-64}$	وجود ندارد	$\sqrt[3]{-64}=-4$	وجود ندارد

ریشه‌های زوج ۶۴- وجود ندارند؛ زیرا عددی وجود ندارد که به توان عددی زوج برسد و مساوی ۶۴- شود.

دربارهٔ ریشه‌های nام ۶۴- ($n \in \mathbb{N}$) بحث کنید. اگر n فرد باشد، یک ریشه منفی دارد و در صورتی که n زوج باشد، تعریف نشده است.

اگر a یک عدد منفی و $n \in \mathbb{N}$ باشد، دربارهٔ ریشه nام a چه می‌توان گفت؟ دقیقاً همچون عدد ۶۴- گوییم:

اگر n فرد باشد، یک ریشه منفی دارد و در صورتی که n زوج باشد، تعریف نشده است.

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشهٔ n ام عدد a می‌نامیم. هرگاه : $b^n=a$

۳ جدول زیر را کامل کنید.

۸۱ دارای دو ریشهٔ چهارم $\sqrt[۴]{۸۱}=۳$ و $-\sqrt[۴]{۸۱}=-۳$ است	a = ۸۱ n = ۴	a دارای دو ریشهٔ nام $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ است	n زوج	$a>۰$
۲۷ دارای یک ریشه ی سوم $\sqrt[۳]{۲۷}=۳$ است.	a = ۲۷ n = ۳	a دارای یک ریشه ی n ام $\sqrt[n]{a}$ است.	n فرد	
برای ۱- ریشه ی دوم وجود ندارد.	a = -۱ n = ۲	ریشهٔ nام وجود ندارد	n زوج	$a<۰$
۳۲- دارای یک ریشه ی پنجم $\sqrt[۵]{-۳۲}=-۲$ است.	a = -۳۲ n = ۵	a دارای یک ریشه ی n ام $\sqrt[n]{a}$ است.	n فرد	

کار در کلاس

۱ حاصل هر عبارت را به‌دست آورید:

$\sqrt[۸]{۲۵۶}=۲$ $\sqrt[۷]{۱۲۸}=۲$ $\sqrt[۵]{-۳۲}=-۲$ $\sqrt[۳]{۱۲۵}=۵$

$\sqrt[۵]{\frac{-۱}{۳۲}}=-\frac{۱}{۲}$ $-\sqrt[۴]{۱۶}=-۲$ $\sqrt[۴]{۶۲۵}=۵$ $\sqrt[۹]{-۱}=-۱$

$\sqrt[۶]{۰}=۰$ $-\sqrt{۱}=-۱$ $\sqrt[۳]{-۰/۰۰۱}=-۰/۱$ $\sqrt[۷]{-۱۲۸}=-۲$

۲ الف) می‌دانید که $|x|=\sqrt{x^۲}$ دربارهٔ $\sqrt[۴]{x^۴}$ چه حدسی می‌زنید؟ $\sqrt[۴]{x^۴}=|x|$ درستی حدس خود را دربارهٔ چند عدد آزمایش کنید.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[۴]{(۳)^۴}=\sqrt[۴]{۸۱}=۳\\ |۳|=۳\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt[۴]{(۳)^۴}=|۳|$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[۴]{(-۲)^۴}=\sqrt[۴]{۱۶}=۲\\ |-۲|=۲\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt[۴]{(-۲)^۴}=|-۲|$$

ب) کدام یک درست محاسبه شده است؟

$\sqrt[۶]{(-۲)^۶}=-۲$ غلط $\sqrt[۵]{۳^۵}=۳$ صحیح $\sqrt[۴]{(-۳)^۴}=-۳$ غلط

$\sqrt[۶]{(-۲)^۶}=۲$ صحیح $\sqrt[۵]{(-۳)^۵}=-۳$ صحیح $\sqrt[۴]{(-۳)^۴}=۳$ صحیح

پ) به‌طور کلی اگر n زوج باشد، $\sqrt[n]{a^n}=|a|$؛ و اگر n فرد باشد $\sqrt[n]{a^n}=a$،

ت) مثالی ارائه دهید که نشان دهد تساوی زیر همیشه درست نیست!

$$\sqrt[n]{a^n}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \quad\Rightarrow\quad \sqrt[۴]{(-۲)^۴}\neq\left(\sqrt[۴]{-۲}\right)^۴$$

وجود ندارد

ث) در قسمت (ت) تساوی به‌ازای چه مقادیری برای a و n برقرار است؟ اگر a عددی مثبت باشد، برای هر عدد طبیعی n تساوی برقرار است، اما در صورتی که a عددی منفی باشد، فقط به ازای n های طبیعی فرد، تساوی برقرار است.

فعالیت

در سال نهم دیدید که:

برای هر دو عدد مثبت a و b: $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ برای هر دو عدد a و b: $\sqrt[۳]{a}\times\sqrt[۳]{b}=\sqrt[۳]{ab}$

آیا رابطهٔ بالا دربارهٔ $\sqrt[۴]{a}\times\sqrt[۴]{b}$ نیز برقرار می‌باشد؟ مثال بزنید. بله در صورتی که هر دو عدد نامنفی باشند، تساوی برقرار است.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[۴]{۱۶}\times\sqrt[۴]{۸۱}=۲\times۳=۶\\ \sqrt[۴]{۱۶\times۸۱}=\sqrt[۴]{۱۲۹۶}=۶\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt[۴]{۱۶}\times\sqrt[۴]{۸۱}=\sqrt[۴]{۱۶\times۸۱}$$

با توجه به اینکه ۴ یک عدد زوج است، باید a و b ....نامنفی... باشند.

$\sqrt[۴]{۱۶}\times\sqrt[۴]{۸۱}=\sqrt[۴]{..۱۲۹۶..}=۶$ $\qquad$ $\sqrt[۴]{۱۶}\times\sqrt[۴]{۸۱}=۲\times۳=....۶....$

دربارهٔ $\sqrt[۵]{ab}=\sqrt[۵]{a}\times\sqrt[۵]{b}$ چه می‌توان گفت؟ در این مورد نیز تساوی برقرار است.

آیا a و b حتماً باید مثبت باشند؟ خیر لازم نیست

مثالی از a و b مثبت و مثالی از a و b منفی ارائه کنید و نشان دهید تساوی همواره برقرار است.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[۵]{۳۲}\times\sqrt[۵]{۲۴۳}=۲\times۳=۶\\ \sqrt[۵]{۳۲\times۲۴۳}=\sqrt[۵]{۷۷۷۶}=۶\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt[۵]{۳۲}\times\sqrt[۵]{۲۴۳}=\sqrt[۵]{۳۲\times۲۴۳}$$

به‌طور کلی داریم:

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\begin{cases}\sqrt[n]{ab} & a,b>۰ \text{ و } n \text{ زوج}\\ \sqrt[n]{ab} & a,b \text{ دلخواه و } n \text{ یک عدد طبیعی فرد}\end{cases}$$

قرارداد: به‌طور کلی این قرارداد را اعمال می‌کنیم:

وقتی می‌نویسیم $\sqrt[n]{a}$ و n را زوج فرض می‌کنیم، a را مثبت یا برابر صفر در نظر می‌گیریم.

بنابراین باید به یاد داشته باشیم که ریشه‌های زوج برای عددهای منفی بی‌معنا هستند. پس هرگاه $\sqrt{x}$ نوشتیم، از آن می‌فهمیم که $x\geq۰$ است.

تساوی‌های فوق را می‌توان به‌صورت مقابل نمایش داد:

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

کار در کلاس

۱ آیا $\left(\sqrt[۳]{۲}\right)^۵$ و $\sqrt[۳]{۲^۵}$ با هم برابرند؟ بله با هم برابرند. زیرا: $\left(\sqrt[۳]{۲}\right)^۵=\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{۲}\times\sqrt[۳]{۲}=\sqrt[۳]{۲\times۲\times۲\times۲\times۲}=\sqrt[۳]{۲^۵}$

دربارهٔ $\left(\sqrt[۴]{-۲}\right)^۴$ و $\sqrt[۴]{(-۲)^۴}$ چه می‌توان گفت؟

$\left(\sqrt[۴]{-۲}\right)^۴$ تعریف نشده است. ولی: $\sqrt[۴]{(-۲)^۴}=|-۲|=۲$

۲ با توجه به اینکه

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

$$\left(\sqrt[۵]{۲}\right)^۳=\sqrt[۵]{۲}\times\sqrt[۵]{۲}\times\sqrt[۵]{۲}=\sqrt[۵]{۲^۳}$$

۳ درستی رابطهٔ $\sqrt[k]{a^m}=\left(\sqrt[k]{a}\right)^m$ را با مقداردهی‌های مختلف به m،k و a بررسی کنید (اگر k زوج باشد، a باید مثبت باشد).

$(\sqrt[۴]{۲})^۳=\sqrt[۴]{۲}\times\sqrt[۴]{۲}\times\sqrt[۴]{۲}=\sqrt[۴]{۲\times۲\times۲}=\sqrt[۴]{۲^۳}$

$(\sqrt[۳]{۷})^۴=\sqrt[۳]{۷}\times\sqrt[۳]{۷}\times\sqrt[۳]{۷}\times\sqrt[۳]{۷}=\sqrt[۳]{۷\times۷\times۷\times۷}=\sqrt[۳]{۷^۴}$

$(\sqrt[۵]{-۲})^۳=\sqrt[۵]{-۲}\times\sqrt[۵]{-۲}\times\sqrt[۵]{-۲}=\sqrt[۵]{(-۲)(-۲)(-۲)}=\sqrt[۵]{(-۲)^۳}$

$(\sqrt[۵]{-۲})^۴=\sqrt[۵]{-۲}\times\sqrt[۵]{-۲}\times\sqrt[۵]{-۲}\times\sqrt[۵]{-۲}=\sqrt[۵]{(-۲)(-۲)(-۲)(-۲)}=\sqrt[۵]{(-۲)^۴}$

فعالیت

۱ جدول زیر را کامل کنید.

$\sqrt[n]{a^n}$	n زوج	$a > ۰$	$n = ۴$ $a = ۲$	$\sqrt[۴]{۲^۴} = ۲$ $\quad (۲ = \lvert ۲ \rvert)$
		$a < ۰$	$n = ۴$ $a = -۲$	$\sqrt[۴]{(-۲)^۴} = ۲$ $\quad (۲ = \lvert -۲ \rvert)$
	n فرد	$a > ۰$	$n = ۳$ $a = ۲$	$\sqrt[۳]{۲^۳} = ۲$
		$a < ۰$	$n = ۳$ $a = -۲$	$\sqrt[۳]{(-۲)^۳} = -۲$

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می‌گیرید؟

در صورتی که n فرد باشد $\sqrt[n]{a^n} = a$ است. اما اگر n زوج باشد $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ است.

۲ جدول زیر را کامل کنید.

$(\sqrt[n]{a})^n$	n زوج	$a > ۰$	$n = ۴$ $a = ۱۶$	$(\sqrt[۴]{۱۶})^۴ = ۲^۴ = ۱۶$
		$a < ۰$	$n = ۴$ $a = -۱۶$	$(\sqrt[۴]{-۱۶})^۴ \rightarrow$ تعریف نشده
	n فرد	$a > ۰$	$n = ۳$ $a = ۸$	$(\sqrt[۳]{۸})^۳ = ۲^۳ = ۸$
		$a < ۰$	$n = ۳$ $a = -۸$	$(\sqrt[۳]{-۸})^۳ = (-۲)^۳ = -۸$

چه نتیجه‌ای از جدول بالا می‌گیرید؟ همواره $(\sqrt[n]{a})^n = a$ است، فقط در حالتی که n زوج است، a نمی‌تواند منفی باشد.

تمرین

۱ الف) یکی از علامت‌های < یا > را در □ قرار دهید.

$(\circ/\text{۵})^{\text{۲}} \boxed{>} (\circ/\text{۵})^{\text{۳}}$ $\qquad$ $\sqrt{\circ/\text{۲۵}} \boxed{<} \sqrt[\text{۳}]{\circ/\text{۲۵}}$ ⟵ ۰/۱۲۵ اصلاح شد به ۰/۲۵

ب) وقتی $\circ<a<\text{۱}$ است، یکی از علامت‌های مقایسه را در □ قرار دهید.

$a^{\text{۲}} \boxed{>} a^{\text{۳}}$ $\qquad$ $\sqrt{a} \boxed{<} \sqrt[\text{۳}]{a}$

۲ فرض کنیم $a=-\text{۱}$ است، در □ علامت مناسب را قرار دهید.

$\sqrt[\text{۳}]{a} \boxed{=} \sqrt[\text{۵}]{a}$ $\qquad$ $\sqrt[\text{۵}]{a} \boxed{=} \sqrt[\text{۱۱}]{a}$

$a^{\text{۲}} \boxed{>} a^{\text{۳}}$ $\qquad$ $a^{\text{۳}} \boxed{=} a^{\text{۵}}$

۳ با توجه به تعریف ریشهٔ (اگر $\sqrt[n]{a}=b$ آنگاه $b^n=a$)، نشان دهید برای هر عدد a و هر عدد طبیعی n (به‌شرط با معنا بودن رادیکال) رابطه زیر برقرار است:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = b^n = a$$

۴ آیا تساوی $\sqrt[n]{a+b}=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$ برقرار است؟ n را برابر ۴،۳ یا ۵ بگیرید و به‌جای a و b مقدارهای عددی بدهید.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[\text{۳}]{\text{۱}}+\sqrt[\text{۳}]{\text{۸}}=\text{۱}+\text{۲}=\text{۳}\\ \sqrt[\text{۳}]{\text{۱}+\text{۸}}=\sqrt[\text{۳}]{\text{۹}}\simeq\text{۲}/\circ\text{۸}\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt[\text{۳}]{\text{۱}}+\sqrt[\text{۳}]{\text{۸}}\neq\sqrt[\text{۳}]{\text{۱}+\text{۸}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[\text{۴}]{\text{۱}}+\sqrt[\text{۴}]{\text{۸۱}}=\text{۱}+\text{۳}=\text{۴}\\ \sqrt[\text{۴}]{\text{۱}+\text{۸۱}}=\sqrt[\text{۴}]{\text{۸۲}}\simeq\text{۳}/\circ\circ\text{۹}\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt[\text{۴}]{\text{۱}}+\sqrt[\text{۴}]{\text{۸۱}}\neq\sqrt[\text{۴}]{\text{۱}+\text{۸۱}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[\text{۵}]{-\text{۱}}+\sqrt[\text{۵}]{-\text{۳۲}}=-\text{۱}+(-\text{۲})=-\text{۳}\\ \sqrt[\text{۵}]{-\text{۱}+(-\text{۳۲})}=\sqrt[\text{۵}]{-\text{۳۳}}\simeq-\text{۲}/\circ\text{۱}\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt[\text{۵}]{-\text{۱}}+\sqrt[\text{۵}]{-\text{۳۲}}\neq\sqrt[\text{۵}]{-\text{۱}+(-\text{۳۲})}$$

۵ عددهای زیر را مانند نمونه محاسبه کنید.

$$\text{۵}^{-\text{۳}}=\frac{\text{۱}}{\text{۵}^{\text{۳}}}=\left(\frac{\text{۱}}{\text{۵}}\right)^{\text{۳}} \rightarrow \sqrt[\text{۳}]{\text{۵}^{-\text{۳}}}=\frac{\text{۱}}{\text{۵}}$$

$$\frac{\text{۱}}{\text{۱۲۸}}=\left(\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)^{\text{۷}}\Rightarrow\sqrt[\text{۷}]{\frac{\text{۱}}{\text{۱۲۸}}}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$$ و $$\text{۳}^{-\text{۴}}=\frac{\text{۱}}{\text{۳}^{\text{۴}}}=\left(\frac{\text{۱}}{\text{۳}}\right)^{\text{۴}}\Rightarrow\sqrt[\text{۴}]{\text{۳}^{-\text{۴}}}=\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$$ و $$\text{۲}^{-\text{۵}}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}^{\text{۵}}}=\left(\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)^{\text{۵}}\Rightarrow\sqrt[\text{۵}]{\text{۲}^{-\text{۵}}}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$$

۶ به‌جای a و b و عدد طبیعی n عددهایی قرار دهید؛ به‌طوری که:

الف) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار باشد.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[\text{۳}]{\frac{\text{۸}}{\text{۲۷}}}=\sqrt[\text{۳}]{\left(\frac{\text{۲}}{\text{۳}}\right)^{\text{۳}}}=\frac{\text{۲}}{\text{۳}}\\ \frac{\sqrt[\text{۳}]{\text{۸}}}{\sqrt[\text{۳}]{\text{۲۷}}}=\frac{\text{۲}}{\text{۳}}\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt[\text{۳}]{\frac{\text{۸}}{\text{۲۷}}}=\frac{\sqrt[\text{۳}]{\text{۸}}}{\sqrt[\text{۳}]{\text{۲۷}}}$$

ب) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برقرار نباشد. (وقتی n زوج است، a و b هر دو ~~مثبت~~ منفی‌اند).

$\sqrt[\text{۴}]{\frac{-\text{۱۶}}{-\text{۸۱}}}=\sqrt[\text{۴}]{\left(\frac{-\text{۲}}{-\text{۳}}\right)^{\text{۴}}}=\frac{\text{۲}}{\text{۳}}$ است در حالی که $\frac{\sqrt[\text{۴}]{-\text{۱۶}}}{\sqrt[\text{۴}]{-\text{۸۱}}}$ تعریف نشده است.