تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس سوم: توان‌های گویا

فعالیت

پدر محمد یک زیست‌شناس است و در یک آزمایشگاه پزشکی کار می‌کند. در آزمایشی یک نوع باکتری کشت داده شده که در شرایط مساعد، وزن این باکتری‌ها در هر ساعت ۲ برابر می‌شود. وزن باکتری‌ها در لحظهٔ شروع ۱ گرم است؛ بنابراین وزن باکتری‌ها پس از یک ساعت ۲ گرم، پس از ۲ ساعت برابر ۴ گرم، و پس از ساعت nام برابر ۲^n گرم می‌شود :

$۱, ۲^۱, ۲^۲, ۲^۳, ..., ۲^n$

محمد از پدرش پرسید : «آیا حتماً تا پایان ساعت باید منتظر بمانیم؟ آیا می‌توانیم وزن باکتری‌ها را پس از نیم ساعت محاسبه کنیم؟»

پدرش گفت : تو فکر می‌کنی وزن باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود؟

محمد گفت : حدس می‌زنم وزن آنها $۲^{\frac{۱}{۲}}$ گرم شده باشد. چون نیم همان $\frac{۱}{۲}$ است.

پدرش گفت : $۲^{\frac{۱}{۲}}$ چقدر است؟

محمد گفت : نمی‌دانم ولی باید بتوانیم مقدار آن را پیدا کنیم.

اگر فرض کنیم در هر نیم‌ساعت وزن باکتری‌ها b برابر شود، در این‌صورت بعد از یک ساعت وزن باکتری‌ها باید برابر $b \times b = b^۲$ شود. اما می‌دانیم پس از یک ساعت وزن باکتری‌ها دو برابر می‌شوند؛ پس $۲ = b^۲$؛ یعنی $b = \sqrt{۲}$ (زیرا b مثبت است).

نتیجهٔ جالبی است! $\sqrt{۲} = ۲^{\frac{۱}{۲}}$. مشابه این رابطه را می‌توانیم برای توان‌های دیگر نیز تعریف کنیم : $\sqrt[۳]{۲} = ۲^{\frac{۱}{۳}}$ ، $\sqrt[۴]{۲} = ۲^{\frac{۱}{۴}}$ ؛ همچنین برای عددهای دیگر $\sqrt[۳]{۵} = ۵^{\frac{۱}{۳}}$. می‌توانیم نماهای کسری با صورت ۱ را تعریف کنیم. a عددی حقیقی و مثبت است.

برای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$، توان $\frac{۱}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم :

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

توجه داریم اگر $a < ۰$ در این صورت $a^{\frac{1}{n}}$ تعریف نمی‌شود، به عنوان مثال عبارت‌هایی مانند $(-۱)^{\frac{۱}{۳}}$ و $(-۲)^{\frac{۲}{۴}}$ تعریف نمی‌شوند.

فعالیت

۱ توان‌های کسری زیر را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

$۴^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۴}$ $\quad$ $۳^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۳}$ $\quad$ $۲^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲}$

$(-۳)^{\frac{۱}{۵}} =$ تعریف نمی‌شود $\quad$ $۵^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۵}$ $\quad$ $۵^{\frac{۱}{۷}} = \sqrt[۷]{۵}$

$(-۵)^{\frac{۱}{۴}} =$ تعریف نمی‌شود $\quad$ $۸۱^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۸۱}$ $\quad$ $۶^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۶}$

۲ کدام درست است؟

ب) $\sqrt[۵]{-۳۲} = -۲$ صحیح $\quad$ الف) $(-۳۲)^{\frac{۱}{۵}} = -۲$ غلط

فعالیت

حاصل $a^{\frac{m}{n}}$ که $a>۰$ و m و n دو عدد طبیعی هستند را چگونه حساب می‌کنیم؟

در مبحث توان با نماهای طبیعی یادتان هست چگونه عمل کردیم؟

(قاعده ضرب توان) $\quad ۲^۶ = ۲^{۲\times۳} = (۲^۲)^۳$

در مورد توان‌های گویا هم می‌توانیم به طریق مشابه عمل کنیم :

$۵^{\frac{۸}{۳}} = ۵^{۸\times\frac{۱}{۳}} = (۵^۸)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۵^۸}$ $\quad$ $۲^{\frac{۲}{۳}} = ۲^{۲\times\frac{۱}{۳}} = (۲^۲)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲^۲}$

به‌طور کلی :

هرگاه $a>۰$ برای هر دو عدد طبیعی m و n، توان کسری و غیرصحیحِ $\frac{m}{n}$ را برای a چنین تعریف می‌کنیم :

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

اکنون شما اعداد توان‌دار را در صورت امکان به شکل رادیکال بنویسید.

الف) $۵^{\frac{۲}{۵}} = \sqrt[۵]{۵^۲}$ $\quad$ ب) $۳^{\frac{۲}{۷}} = \sqrt[۷]{۳^۲}$ $\quad$ پ) $۲^{\frac{۳}{۲}} = \sqrt[۲]{۲^۳}$

ت) $(-۶)^{\frac{۲}{۷}}$ تعریف نشده $\quad$ ث) $۱۶^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۱۶}$ $\quad$ ج) $(-۳)^{\frac{۲}{۳}}$ تعریف نشده

اگر r و s دو عدد گویا باشند، و $a>۰$ قواعد توان برای اعداد گویا مانند اعداد صحیح برقرار بوده و داریم :

۱) $a^r \times a^s = a^{r+s}$

۲) $(a^r)^s = a^{rs}$

۳) $(ab)^r = a^r \times b^r$

باکتری‌ها موجودات بسیار ریزی هستند که در انواع مختلف در همه جا حضور دارند. بیشتر باکتری‌ها در فاصله ۲۰ دقیقه به حداکثر رشد خود می‌رسند و می‌توانند شروع به تولید مثل کنند. در شرایط محیطی مناسب، باکتری با سرعت زیادی تکثیر می‌شود. مثلاً یک باکتری بعد از ۲۰ دقیقه به دو باکتری تبدیل می‌شود و بعد از ۲۰ دقیقهٔ دیگر به چهار باکتری تبدیل می‌شود و به همین ترتیب، در فاصله هر ۲۰ دقیقه، تعداد باکتری‌ها دو برابر می‌شود و به ترتیب ۸ و ۱۶ و ۳۲ و ۶۴ و ۱۲۸ و ۲۵۶ و ... باکتری پدید می‌آید. اگر این روش تکثیر باکتری‌ها ۲۴ ساعت ادامه یابد، از یک باکتری، توده‌ای از باکتری‌ها به وزن ۲۰۰۰ تن به وجود خواهد آمد. البتّه عملاً چنین اتّفاقی نمی‌افتد، زیرا در این صورت، آب و مواد غذایی لازم به زودی در محیط زندگی آنها تمام می‌شود و دیگر قادر به تولید مثل بیشتر نخواهند بود. اگرچه بعضی از باکتری‌ها عامل فساد مواد غذایی و بیماری هستند؛ اما بسیای از باکتری‌ها مفیدند. باکتری‌ها در تهیه فراورده‌های غذایی و شیمیایی و همچنین در شناسایی و استخراج معادن و پاکسازی محیط زیست کاربرد دارند. باکتری‌هایی نیز برای خالص سازی عناصر معدنی مانند مس و اورانیوم کاربرد دارند. همچنین باکتری‌ها در پاکسازی آب‌ها و خاک‌های آلوده به آلاینده‌های نفتی و شیمیایی کاربرد وسیعی دارند. باکتری‌ها نقش بسیار مهم در اکوسیستم جهانی (اکوسیستم‌های آبی و خشکی) دارند. مهم‌ترین راه دستیابی گیاهان به نیتروژن توسط برخی از باکتری‌ها صورت می‌گیرد.

کار در کلاس

۱ تساوی‌های زیر را مانند نمونه به‌صورت رادیکالی بنویسید.

$3^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{3^5}=\sqrt[4]{3^4\times 3}=\sqrt[4]{3^4}\times\sqrt[4]{3}=3\sqrt[4]{3}$

$3^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{3^2}$

$4^{\frac{7}{5}}=4^{1+\frac{2}{5}}=4\times 4^{\frac{2}{5}}=4\sqrt[5]{4^2}$

روش دوم $\boxed{4^{\frac{7}{5}}=\sqrt[5]{4^7}=\sqrt[5]{4^5\times 4^2}=\sqrt[5]{4^5}\times\sqrt[5]{4^2}=4\sqrt[5]{4^2}}$

$2^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}=2^{\frac{13}{6}}=2^{2+\frac{1}{6}}=2^2\times 2^{\frac{1}{6}}=4\sqrt[6]{2}$

$4^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{4}$

$(16^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{4}}=16^{\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}}=16^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}=2$

$5^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{5^4}=\sqrt[3]{5^3\times 5}=\sqrt[3]{5^3}\times\sqrt[3]{5}=5\sqrt[3]{5}$

$(4\times 2)^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2$

$5^{\frac{1}{3}}\times 5^{\frac{2}{3}}=5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=5^{\frac{3}{3}}=5$

$6^{\frac{3}{8}}=\sqrt[8]{6^3}$

۲ رادیکال‌ها را در صورت امکان به شکل توان کسری بنویسید.

$\sqrt[3]{-1}=-1$ $\quad\sqrt[3]{7^2}=7^{\frac{2}{3}}$ $\quad\sqrt{2^5}=2^{\frac{5}{2}}$ $\quad\sqrt[7]{3^2}=3^{\frac{2}{7}}$

$\sqrt[5]{2^5}=2^{\frac{5}{5}}$ $\quad\sqrt[3]{-27}=-3$ $\quad\sqrt[5]{64}=\sqrt[5]{2^6}=2^{\frac{6}{5}}$ $\quad\sqrt[5]{19}=19^{\frac{1}{5}}$

۳ جدول‌های زیر را کامل کنید:

$a>0$	a^3	a^{-3}	a^0	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{2}{3}}$
$a=5$	5^3	$\frac{1}{5^3}$	5^0	$5^{\frac{1}{2}}$	$5^{\frac{2}{3}}$

$a<0$	a^3	a^{-3}	a^0	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{6}{3}}$	$a^{\frac{2}{3}}$
$a=-5$	$(-5)^3$	$\frac{1}{(-5)^3}$	$(-5)^0$	تعریف نمی‌شود	$(-5)^2=25$	$(-5)^{\frac{2}{3}}$

فعالیت

۱ با استفاده از نمای کسری نشان دهید که $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nm]{a}$ است. تساوی را کامل کنید $(a>0)$.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}}=(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{mn}}=\sqrt[mn]{a}$$

۲ دبیر: به‌خاطر دارید که حاصل یک رادیکال با فرجهٔ زوج همواره عددی مثبت است. مثلاً $\sqrt[4]{81}=3$

به‌علاوه در تعریف نمای کسری $a^{\frac{1}{n}}$ باید a عددی مثبت فرض شود. اکنون $\sqrt[4]{(-3)^4}$ را به‌دست آورید.

نسترن: اگر جای توان‌ها را مانند توان‌های طبیعی عوض کنیم، چه اشکالی دارد؟

دبیر: این کار را انجام می‌دهم؛ خودت اشکال را پیدا کن!

$$\sqrt[4]{(-3)^4}=\left[(-3)^4\right]^{\frac{1}{4}}=\left[(-3)^{\frac{1}{4}}\right]^4=(-3)^{\frac{1}{4}\times 4}=(-3)^1=-3$$

نسترن: فکر کنم متوجه اشکال کار شده‌ام. ما حق نداریم بنویسیم $(-3)^{\frac{1}{4}}$ چون در تعریف $a^{\frac{1}{n}}$ گفتیم a باید مثبت باشد.

دبیر: آفرین، کاملاً درست است. حالا چه کار کنیم؟

حمیده: بهتر است اول $(-3)^4$ را حساب کنیم، یعنی

$$\sqrt[4]{(-3)^4}=\sqrt[4]{81}=3$$

دبیر : آفرین حمیده، جواب شما درست است. البته می‌توانید، همان‌گونه که قبلاً گفتیم چون ۴ عددی زوج است از الگوی زیر نیز استفاده کنید.

$$\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$$

۳ با توجه به فعالیت ۱ در صفحهٔ قبل تساوی‌ها را کامل کنید.

الف) $(5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = (\sqrt{5})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{5}} = \sqrt[3\times2]{5} = 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}$

ب) $(4^{\frac{1}{7}})^{\frac{1}{5}} = (\sqrt[7]{4})^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\sqrt[7]{4}} = \sqrt[5\times7]{4} = 4^{\frac{1}{35}} = 4^{\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}}$

پ) اکنون برای هر عدد $a>0$، به ازای هر دو عدد گویای غیرصحیح r و s درستی تساوی $(a^r)^s=a^{rs}$ را برای $r=\frac{1}{4}$ و $s=\frac{1}{2}$، تحقیق کنید.

$$(a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[4]{a})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a} = a^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}}$$

تمرین

۱ هر یک از توان‌های کسری زیر را به‌صورت رادیکال بنویسید.

$(4^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$ $\quad 4^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{4^3}$ $\quad 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ $\quad 3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = \sqrt[3]{3^3}$ $\quad 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16}$

$32^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{32^2}$ $\quad 17^{-\frac{1}{2}} = (\frac{1}{17})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{17}}$ $\quad 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2}$ $\quad 32^{-\frac{1}{5}} = (\frac{1}{32})^{\frac{1}{5}}$ $\quad 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ $\quad a^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{a^2}$

۲ هر یک از رادیکال‌ها را به‌صورت توان کسری بنویسید. توجه داشته باشید که نمای کسری وقتی معنا دارد که پایهٔ عدد مثبت باشد.

در این تمرین با فرض مثبت بودن a پاسخ ها نوشته شده اند.

$\sqrt[5]{2^{10}} = a^{\frac{10}{5}} = a^2$ $\quad \sqrt[n]{a^2} = a^{\frac{2}{n}}$ $\quad \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$ $\quad \sqrt[7]{a} = a^{\frac{1}{7}}$ $\quad \sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}}$ $\quad \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$

۳ می‌دانیم $\sqrt[12]{a^4} = (a^4)^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{4}{12}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ $\quad \sqrt[6]{a^2} = a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

آیا تساوی $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{km}}$ همواره برقرار است؟ $(a>0)$ و n،m و k طبیعی‌اند نتیجه بگیرید که هر سه عدد $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[4]{2^2}$ و $\sqrt[6]{2^3}$ برابر؛

بله این تساوی برای اعداد مثبتِ a همواره برقرار است.

$\sqrt[4]{2^2} = \sqrt[2\times2]{2^{2\times1}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}$ $\quad \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[3\times2]{2^{3\times1}} = \sqrt[2]{2^1} = \sqrt{2}$

۴ فرض کنیم $a=64$، $r=\frac{1}{2}$ و $s=\frac{1}{3}$ مقدارهای عددی $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.
اکنون خودتان، مانند نمونه سه مقدار دیگر برای r ،a و s انتخاب کنید و بار دیگر مقدارهای $\frac{a^r}{a^s}$ و a^{r-s} را محاسبه و با هم مقایسه کنید.
می‌توانید از ماشین حساب کمک بگیرید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a^r}{a^s} = \frac{1024^{\frac{1}{2}}}{1024^{\frac{1}{5}}} = \frac{\sqrt{1024}}{\sqrt[5]{1024}} = \frac{32}{4} = 8 \\ a^{r-s} = 1024^{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}} = 1024^{\frac{3}{10}} = (2^{10})^{\frac{3}{10}} = 2^3 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a^r}{a^s} = \frac{729^{\frac{1}{2}}}{729^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{729}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{27}{9} = 3 \\ a^{r-s} = 729^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 729^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{729} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a^r}{a^s} = \frac{64^{\frac{1}{2}}}{64^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{8}{4} = 2 \\ a^{r-s} = 64^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

۵ حساب کنید.

$\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3$ $\quad \sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{4} = 2$ $\quad \sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$