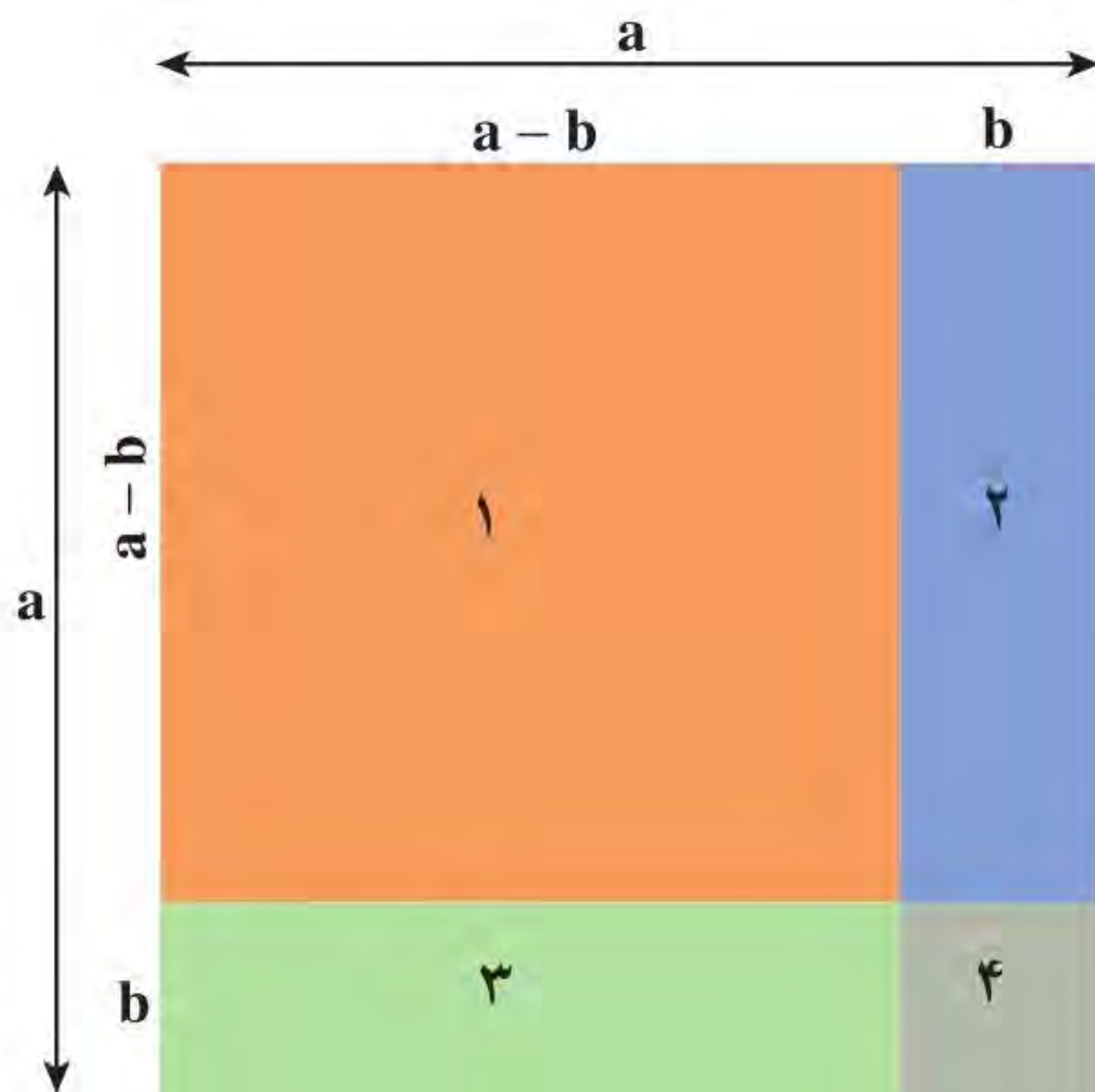


درس چهارم: عبارتهای جبری

فعالیت



$$S_1 = (a - b)^2$$

$$S_1 = S - S_2 - S_3 - S_4$$

$$= a^2 - b(a-b) - b(a-b) - b^2$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

در سال گذشته با برخی از اتحادهای جبری آشنا شده‌اید. می‌توانید بگویید چرا به تساوی (۱)

اتحاد گفته می‌شود؟
در حقیقت می‌توان a و b را در دو طرف با هر دو عدد دلخواه جایگزین کرد و برای دو طرف یک عدد به دست آورد. برای مثال اگر $a = \frac{1}{5}$ و $b = 3$ اختیار شود.

$$\left(\frac{1}{5} + 3\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{5} \times 3 + 3^2$$

$$\left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} + \frac{6}{5} + 9 \rightarrow \frac{256}{25} = \frac{256}{25}$$

یا اگر در رابطه (۱) به جای b ، $-b$ قرار دهیم، به دست می‌آوریم:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2)$$

گاهی هم دو اتحاد (۱) و (۲) را با هم می‌نویسیم:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad (3)$$

اکنون شما می‌توانید اتحادهای دیگری به دست آورید.

۱ با محاسبه $(a+b)^3$ اتحاد دیگری به دست می‌آید که به اتحاد مکعب مجموع مشهور است. جای خالی را در محاسبه تکمیل کنید.

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$

که با جمع جملات مشابه در دو طرف دوم، اگر درست عمل کرده باشید، به صورت زیر در می‌آید.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

می‌توانیم b را در سرتاسر اتحاد فوق به $-b$ تبدیل کنیم و اتحاد دیگری به دست آوریم:

$$(a-b)^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

۲ یک بار دیگر $(a-b)^3$ را از راه دیگر و با استفاده از اتحاد مربع تفاضل، یعنی اتحاد شماره ۲ محاسبه کنید.

$$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) \\ = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3$$

۳ اگر ابتدا طرف دوم هر یک از اتحادهای ۴ گانه فوق را بنویسیم، مثلاً

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)(a-b)(a-b) \quad (4)$$

می‌گوییم عبارت سمت چپ؛ یعنی $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ را به حاصل ضرب سه عبارت سمت راست تجزیه کرده‌ایم. هر یک از عبارت‌های $a-b$ را در (۴) یک عامل یا شمارنده تجزیه می‌نامیم. ممکن است عامل‌های تجزیه مساوی نباشند. تجزیه برخی عبارت‌های جبری به دسته‌بندی مناسب جملات و مهارت‌های بیشتری نیاز دارد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

یادآوری

اتحادهایی که سال قبل خوانده‌اید.

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab$$

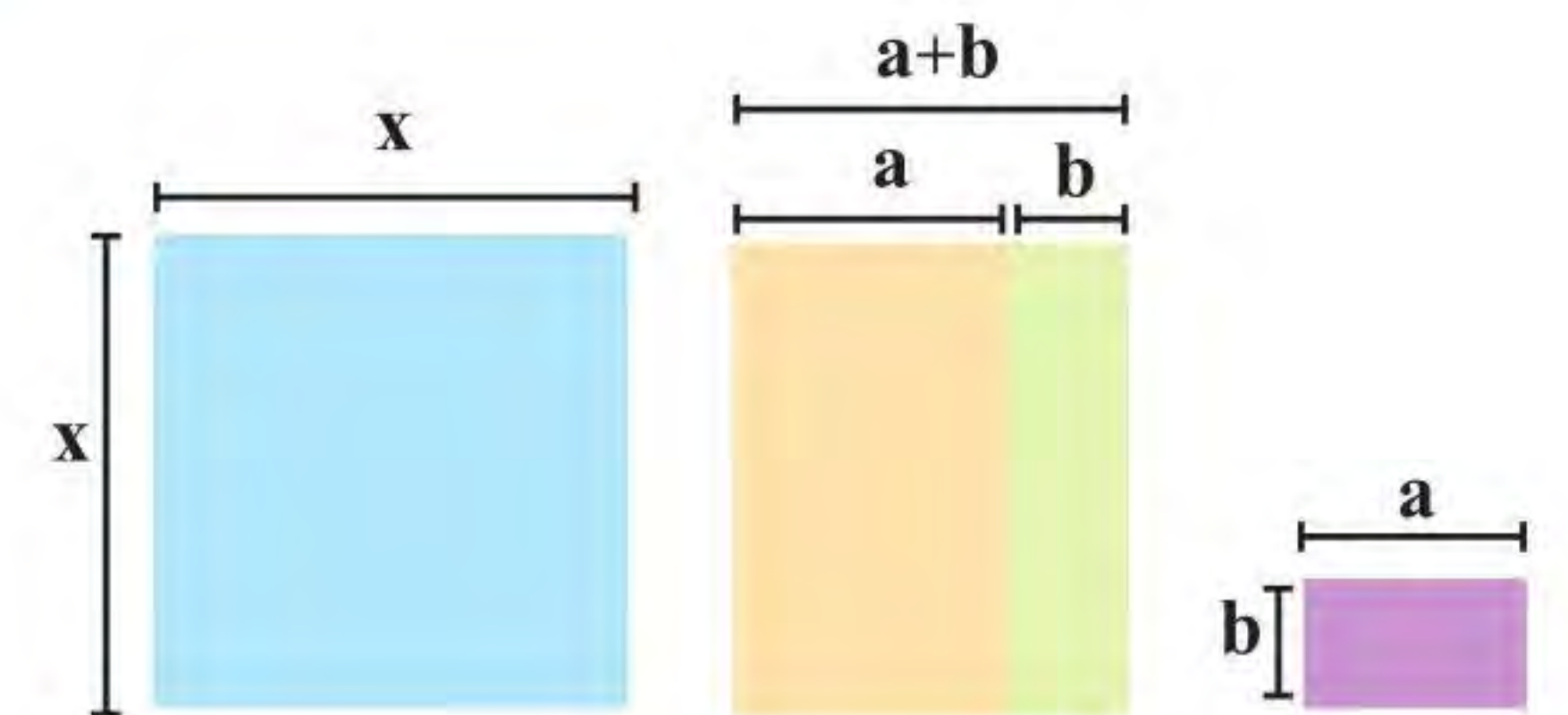
$$(a+x)(a+y) = a^2 + (x+y)a + xy$$

مثال ۱

عبارت $2x^2 + 3x + 1$ را تجزیه کنید.

می‌نویسیم:

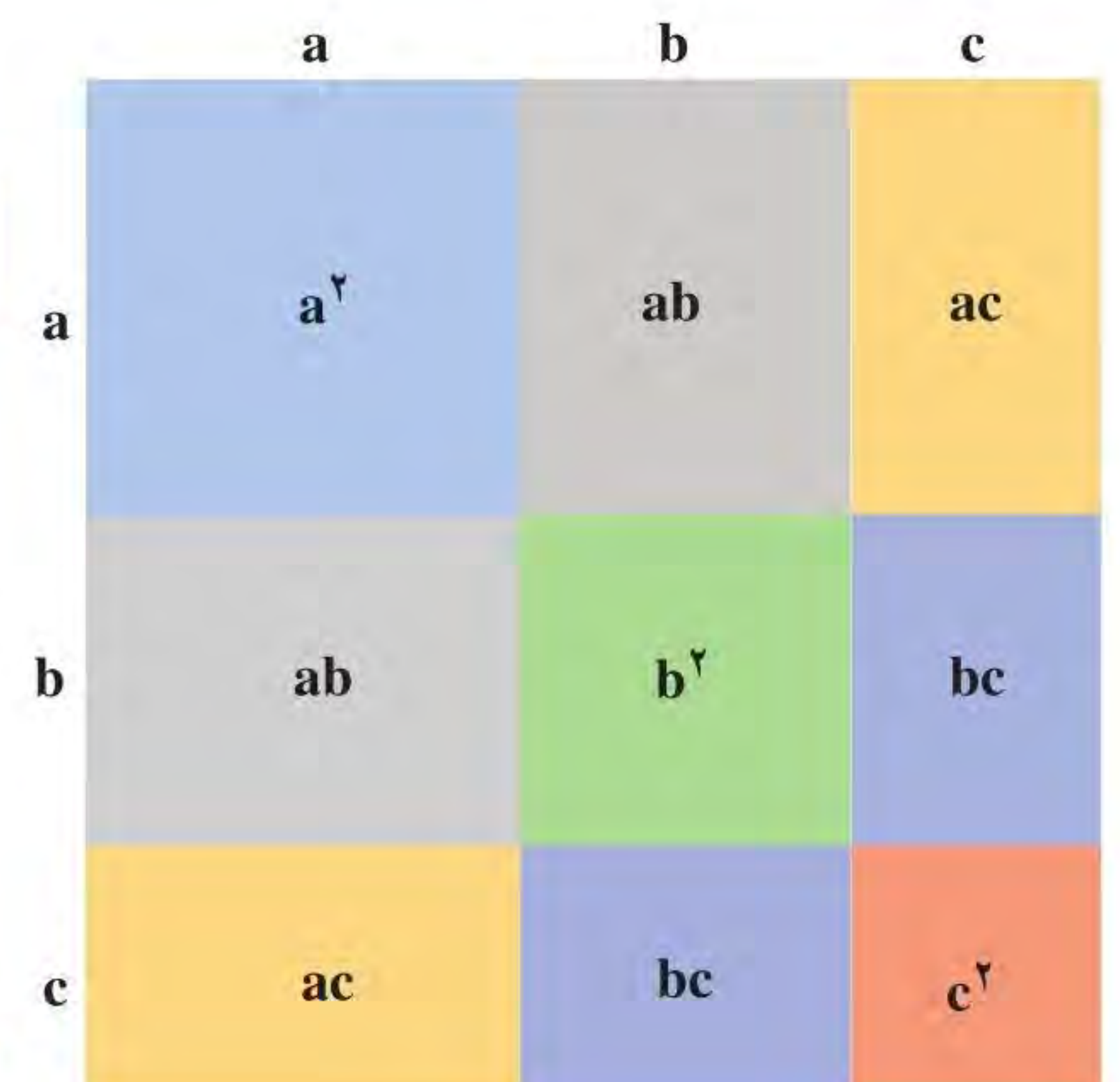
$$2x^2 + 3x + 1 = x^2 + 2x + 1 + x^2 + x \\ = (x+1)^2 + x(x+1) \\ = (x+1)(x+1+x) = (x+1)(2x+1)$$



مثال ۲

عبارت $a^3 - 2ab^2 + a^2b - 2b^3$ را تجزیه کنید:

$$a^3 - 2ab^2 + a^2b - 2b^3 = a^2(a+b) - 2b(a+b) \\ = (a+b)(a^2 - 2b)$$



کار در کلاس

۱ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و ساده کنید.

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - a^2b + b^3 = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

۲ با استفاده از پرسش ۱، عبارت‌های $a^3 + b^3$ و $a^3 - b^3$ را تجزیه کنید و اتحادهای جدیدی

به دست آورید.

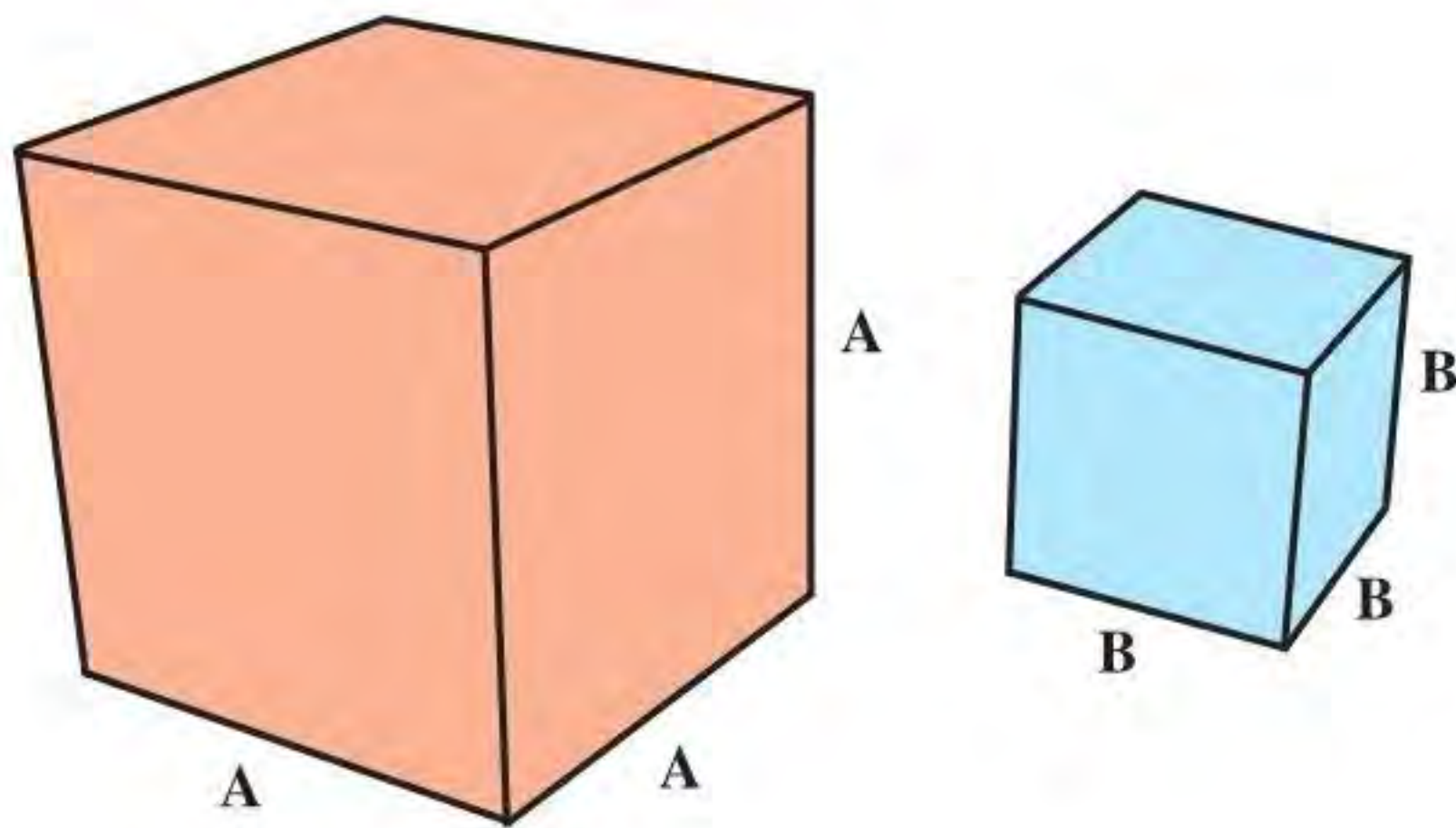
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

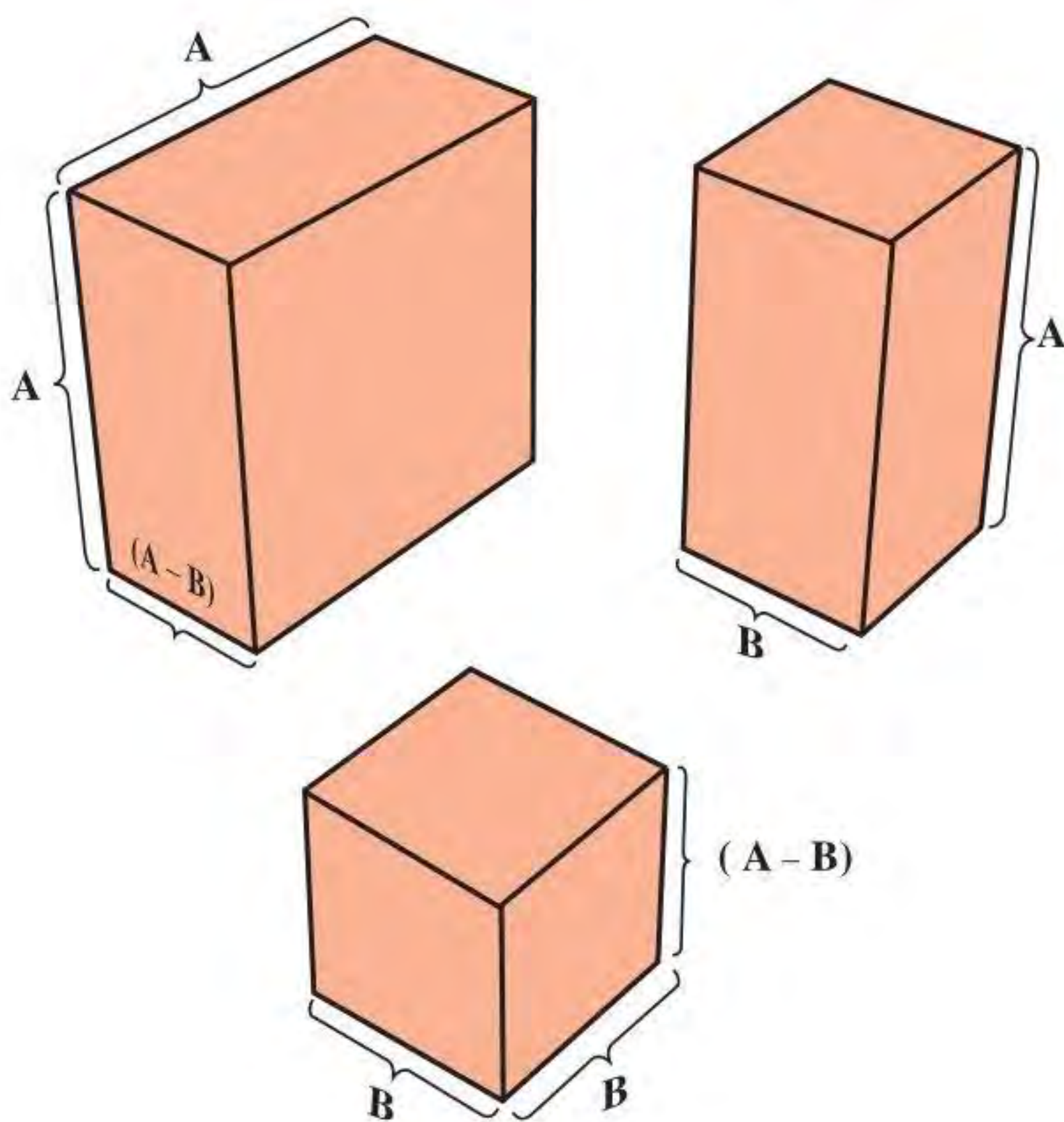
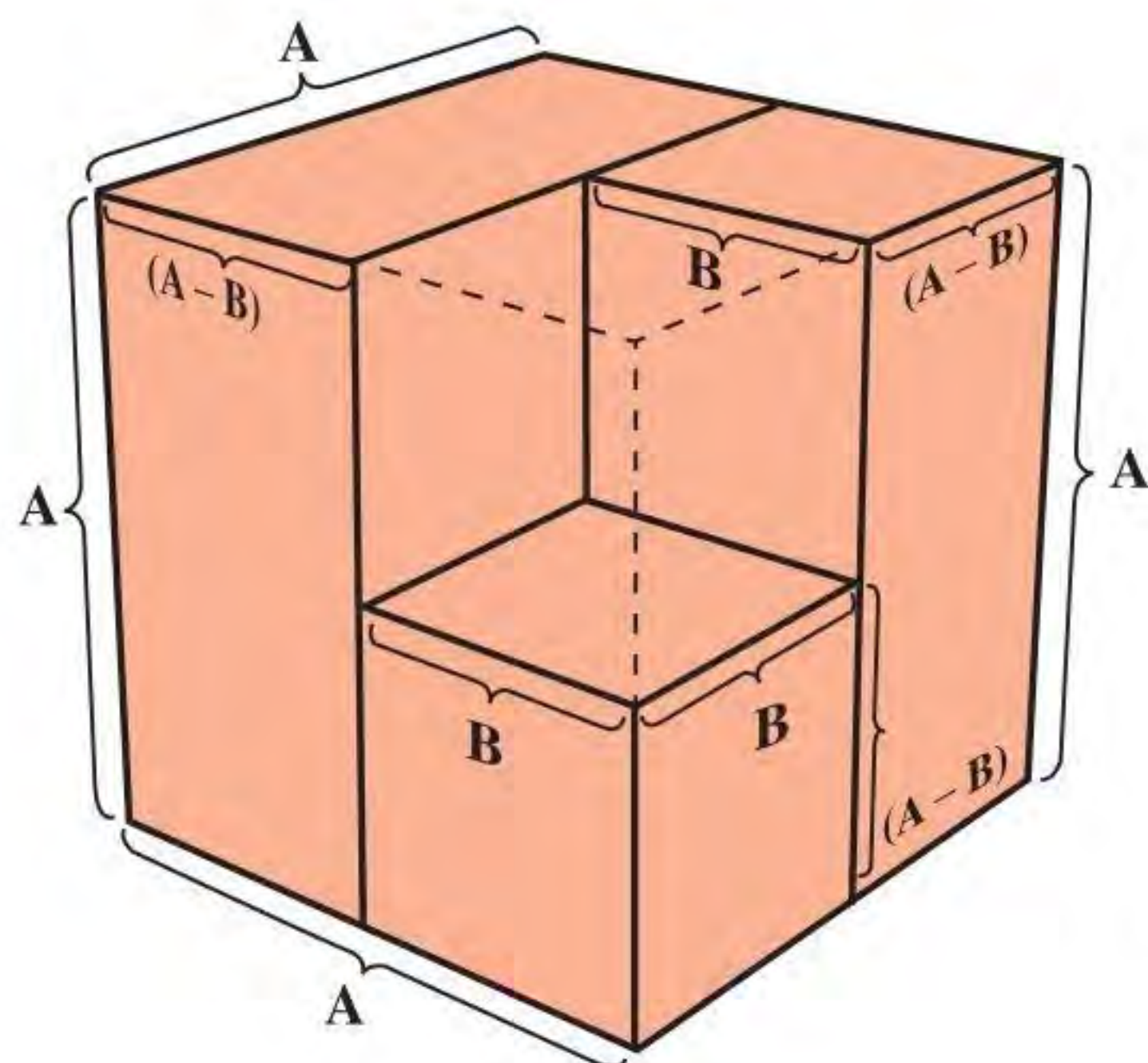
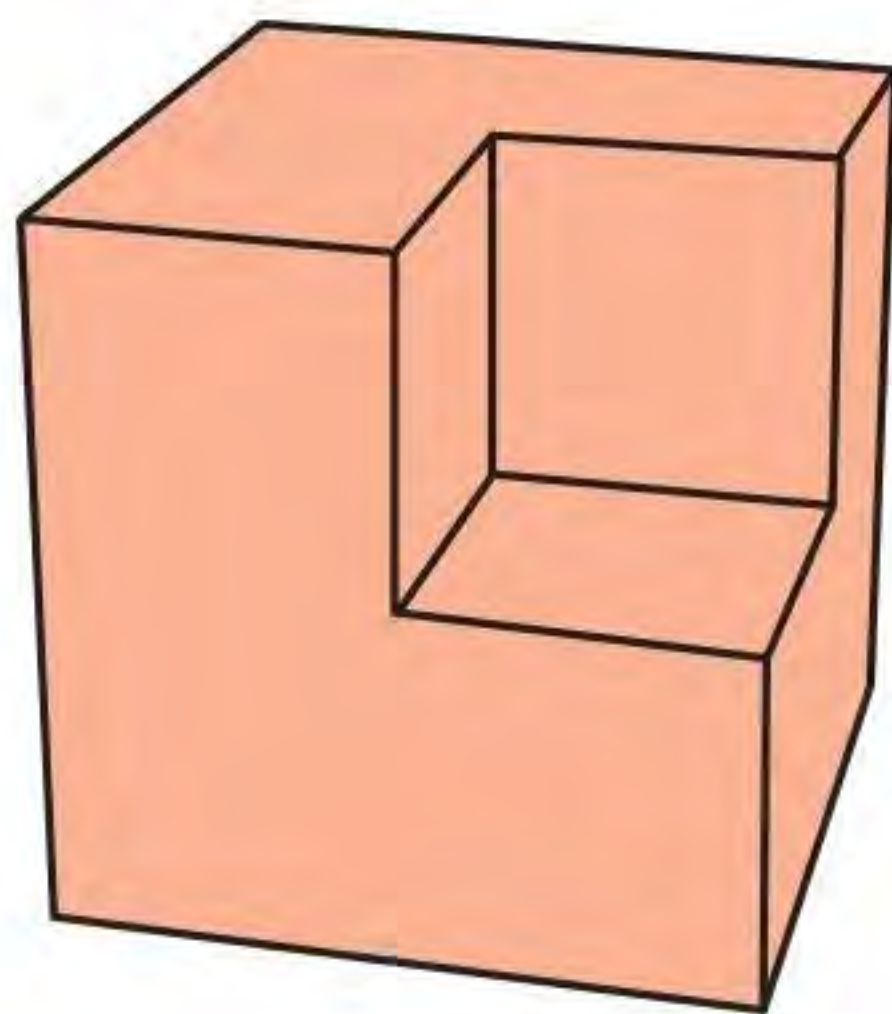
اتحادهای چاق و لاغر

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$



$A^3 - B^3$



$$\begin{aligned} 8x^3 - 27 &= (2x)^3 - 3^3 \\ &= (2x - 3)[(2x)^2 + 2x \times 3 + 3^2] \\ &= (2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) \end{aligned}$$

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$x^3 - 125 = (x - 5)(x^2 + 5x + 25)$$

$$x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

فعالیت

واژه‌های مضرب و شمارنده را در حساب اعداد به خاطر دارید:

$$12 = 3 \times 4$$

هر یک از عددهای ۳ و ۴ را یک شمارنده عدد ۱۲ و عدد ۱۲ را مضرب هر یک از این عددها می‌نامیم. ۱۲ شمارنده‌های دیگری نیز دارد، از جمله خود عدد ۱۲. عدد ۳ مضرب‌های دیگری دارد، از جمله خود عدد ۳ و همچنین هر یک از عددهای ۶، ۹، ۱۵ و ...

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

مشابه این در اتحاد مزدوج $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ هر یک از عبارت‌های $a - b$ و $a + b$ یک شمارنده $a^2 - b^2$ است. همچنین $a^2 - b^2$ هم مضرب $a - b$ و هم مضرب $a + b$ است.

آیا $a + b$ مضرب دیگری دارد؟

۱ مضرب‌های هر عبارت جبری و یا یک چند جمله‌ای، از ضرب آن عبارت در عددهای صحیح و یا عبارت‌های جبری دیگر (و یا همزمان در هر دو) به دست می‌آیند:

... و $(a + b)(a - b)$ و $-4(a + b)$ و $(a + b)(a + b)^2$ و $2(a + b)$ و $a + b$: بعضی از مضرب‌های $a + b$ بعضی از مضرب‌های $a - b$ را بنویسید.

$$3(a - b), (a - b)(a^2 + ab + b^2), (a - b)(x + y - z), \dots$$

۲ دو عبارت بنویسید که $a - b$ شمارنده هر یک از آنها باشد.

در این مورد می‌توان دو اتحاد را مثال زد:

$$\text{اتحاد چاق و لاغر: } a^3 - b^3 \quad \text{اتحاد مربع دو جمله‌ای: } (a - b)^2$$

۳ عبارت $27a^3 - 1$ مضرب کدام یک از عبارت‌هاست؟

$$\text{الف) } a - 1 \quad \text{ب) } 3a - 1 \quad \text{پ) } 9a^2 + 3a + 1 \quad \text{ت) } 3a + 1$$

با توجه به تجزیه‌ی آن -طبق اتحاد چاق و لاغر- یعنی: $(3a - 1)(9a^2 + 3a + 1)$

هر دو گزینه‌ی ب و پ صحیح هستند.

نکته: عبارت $\sqrt{3}(a + b)$ یک مضرب $a + b$ محسوب نمی‌شود. ضرایب عددی فقط می‌توانند عدد صحیح باشند.

۴ کدام یک از عبارات‌های زیر گویا هستند؟ **یاد آوری:** به طور کلی هر عبارت گویا، کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای باشند. (ریاضی نهم صفحه ۱۱۴)

گزیننه های الف و ب عبارت گویا هستند ولی گزیننه های پ و ت گویا نیستند.

الف) $\frac{3x - \sqrt{x}}{x^2}$ (ب) $\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$ (پ) $\sqrt[3]{x} - 1$ (ت) $\sqrt[3]{x^2} + x - 1$

نکته: یک عبارت گویا به ازای مقادارهایی از متغیر که مخرج آن صفر می‌شود، تعریف نمی‌گردد. (مقدار ندارد)

۵ عبارت گویای زیر به ازای چه مقادارهایی از x تعریف نمی‌شود؟

جواب ندارد $\rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = -1$ و $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ و $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

بنابراین به ازای -1 و 1 تعریف نمی‌شود.

۶ حاصل کسرهای زیر را به دست آورید و ساده کنید.

الف) $\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3}{x-1} = \frac{\sqrt{x}+1+2(\sqrt{x}-1)+3}{x-1} = \frac{3\sqrt{x}+2}{x-1}$

ب) با توجه به این که می‌دانیم $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) = x-1$ عبارت $x-1$ را به عنوان مخرج مشترک در نظر می‌گیریم.

ب) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+1}$

با توجه به این که می‌دانیم $(x-1)(x+1) = x^2-1$ عبارت $(x^2-1)(x^2+1)$ را به عنوان مخرج مشترک در نظر می‌گیریم.

$$= \frac{(x+1)(x^2+1) + (x-1)(x^2+1) - (x^2+1) + (x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{x^3+x+x^3+x-x^2-1-x^2-1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{2x^3+2x-2}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

مثال

حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1)}{(\sqrt[3]{x^2}-1)((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1)} + \frac{1}{x-1} = \frac{(\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1}{(\sqrt[3]{x^2})^3 - 1^3} + \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{(\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{((\sqrt[3]{x^2})^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1) + (x+1)}{(x^2-1)} = \frac{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + x + 2}{x^2-1}$$

کار در کلاس

۱ صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید. (جاهای خالی را پر کنید)

الف) $\frac{x^6+1}{x^4+2x^2+1} = \frac{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}{(x^2+1)} = \frac{x^4-x^2+1}{x^2+1}$

ب) $\frac{x^3-1}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^3} = \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$

پ) $\frac{x^2+1}{x^4-1} = \frac{x^2+1}{(x^2+1)(x^2-1)} = \frac{1}{x^2-1}$

ت) $\frac{y^5-y}{y^3+y^2+y} = \frac{y(y^4-1)}{y(y^2+y+1)} = \frac{(y^2-1)(y^2+1)}{y^2+y+1} = \frac{(y-1)(y^2+y+1)(y^2+1)}{y^2+y+1} = (y-1)(y^2+1)$

ث) $\frac{y^5-y^3-12y}{8y^2+16y} = \frac{y(y^4-y^2-12)}{8y(y+2)} = \frac{y(y^2-4)(y^2+3)}{8y(y+2)} = \frac{y(y-2)(y+2)(y^2+3)}{8y(y+2)} = \frac{(y-2)(y^2+3)}{8}$

۲ در اتحاد $a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$ قرار دهید $a = \sqrt[3]{x^2}$ و حاصل را بازنویسی کنید:

$(\sqrt[3]{x^2})^3 + 1 = (\sqrt[3]{x^2} + 1)(\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + 1)$

$x^2 + 1 = (\sqrt[3]{x^2} + 1)(\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + 1)$

۳ گویا کردن مخرج‌های گنگ: صورت و مخرج کسرهای زیر را مانند نمونه در عبارتهایی ضرب کنید که عبارت مخرج تبدیل به یک عبارت گویا شود.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + 1} = \frac{(\sqrt[3]{x^2})^2 - \sqrt[3]{x^2} + 1}{(\sqrt[3]{x^2} + 1)((\sqrt[3]{x^2})^2 - \sqrt[3]{x^2} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + 1}{x^2 + 1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{x - 1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \times \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}$$

$$\frac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(x + y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{x - y}$$

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{x - y}$$

تسریں

۱ هر یک از عبارتهای زیر را تا حد ممکن (به عبارتهای گویا) تجزیه کنید.

الف) $x^6 - y^6 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

ب) $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$

پ) $x^2 + y^2$ تجزیه پذیر نیست

۲ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف) $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{y}} = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{y}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{x - y}$

ب) $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 2} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{x - 8}$

پ) $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{x + y}$

ت) $\frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 1} - \frac{5x}{x - 1} = \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 1} + \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} - \frac{5x}{x - 1} = \frac{\sqrt{x} + 1 + 2\sqrt{x} - 2 - 5x}{x - 1} = \frac{3\sqrt{x} - 5x - 1}{x - 1}$

۳ بعضی از ضرب‌های عددی را با استفاده از اتحادها می‌توان به صورت ذهنی حساب کرد. مانند نمونه، بقیه ضرب‌ها را ذهنی انجام دهید.

الف) $16 \times 14 = (15 + 1)(15 - 1) = 15^2 - 1 = 224$

ب) $105^2 = (100 + 5)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 5 + 5^2 = 10000 + 1000 + 25 = 11025$

پ) $1007^2 = (1000 + 7)^2 = 1000^2 + 2 \times 1000 \times 7 + 7^2 = 1000000 + 14000 + 49 = 1014049$

ت) $99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} + \frac{1}{\sqrt[8]{x}-1} \quad \text{۴ کسرها را گویا و سپس به یک کسر تبدیل کنید.}$$

ابتدا تک تک کسرها را گویا کرده سپس جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \quad \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}-1} \times \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1} = \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[8]{x}-1} = \frac{1}{\sqrt[8]{x}-1} \times \frac{\sqrt[8]{x}+1}{\sqrt[8]{x}+1} = \frac{\sqrt[8]{x}+1}{\sqrt[4]{x}-1} = \frac{\sqrt[8]{x}+1}{\sqrt[4]{x}-1} \times \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[4]{x}+1} = \frac{(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$\Rightarrow \text{عبارت} = \frac{1+(\sqrt{x}+1)+(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)+(\sqrt[8]{x}+1)(\sqrt[4]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

۵ عبارت $a^6 - 2b^6 + 2a^2b^3$ را تجزیه کنید با اجازه ی مولف سوال را به شکل زیر اصلاح کرده و تجزیه می‌کنم:

$$a^6 - 2b^6 + 2a^2b^3 = \underline{a^6 - a^2b^3} + \underline{3a^2b^3 - 2b^6} = a^2(a^3 - b^3) + 3b^3(a^3 - b^3) = (a^3 - b^3)(a^2 + 3b^3) \\ = (a-b)(a^2 + ab + b^2)(a^3 + 3b^3)$$

خواندنی

* سه عدد ۴، ۳ و ۵ را یک سه‌تایی فیثاغورسی می‌نامیم، زیرا

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

یک سه‌تایی دیگر مثال بزنید. چند تا از این گونه سه‌تایی‌ها را می‌توانید شناسایی کنید؟

* (جادوی توان) محاسبات نشان می‌دهد:

$$(1/0.1)^{365} = 37/8$$

$$(0/99)^{365} = 0/0.3$$

چرا اینقدر اختلاف وجود دارد؟ حال $(1/0.1)^{365}$ و $(0/99)^{365}$ را محاسبه و مقایسه کنید.

اگر هر روز اندکی کار خود را نسبت به روز قبل بهتر کنیم، در سال حدود ۴۰ برابر راندمان (بهره‌وری) کار افزایش می‌یابد.

شما هم داستانی در باب توان‌ها بنویسید.

* (مثلث خیا،)

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

چه رابطه‌ای بین ضرایب در بسط اتحادها و سطرهای مثلث خیام وجود دارد؟

ضرایب موجود در بسط $(a+b)^n$ همان اعداد داده شده در سطر $n+1$ مثلث خیام است.

می‌توانید توان چهارم دو جمله‌ای را حساب و ضرایب بسط را مشخص کنید.

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$$

$$= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b)$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$