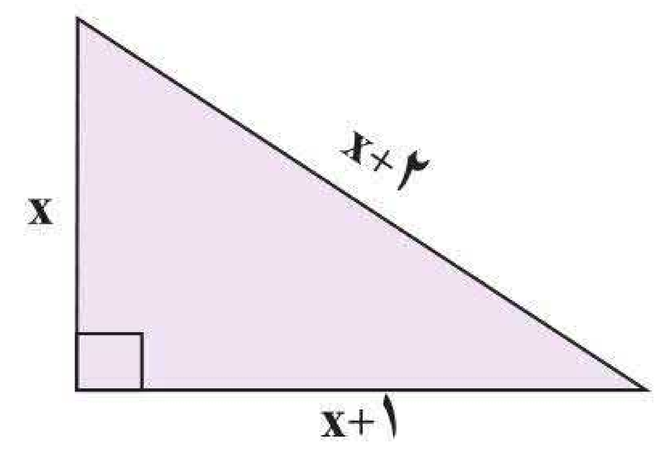
درس اوّل: معادلهٔ درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

صبا بعد از حل یک مسئلهٔ هندسه به نکته جالبی پی برد. او پی برد که اضلاع مثلث مسئلهٔ او، سه عدد متوالی ۳، ۴ و ۵ هستند و این مثلث، قائم الزاویه است (چرا؟).

زیرا رابطه فیثاغورس در مورد آن صدق می کند: $5^2 = 4^2 + 3^2$



از خواهر بزرگ‌تر خود، دُرسا، سؤال کرد که آیا می‌توان مثلث قائم الزاویهٔ دیگری پیدا کرد که اضلاع آن سه عدد متوالی دیگر باشند؟ برای پاسخ به این سؤال، درسا، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کرد و طول کوچک‌ترین ضلع آن را x و طول اضلاع دیگر را اعداد متوالی بعد از x، یعنی x+۱ و x+۲ در نظر گرفت و به کمک رابطهٔ فیثاغورس، رابطهٔ زیر را بین سه ضلع مثلث به‌دست آورد :

$$x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$$

اکنون او می‌خواست معادلهٔ به‌دست آمده را حل کند؛ یعنی مقادیری برای x پیدا کند که تساوی بالا را برقرار کنند. برای این‌کار معادلهٔ بالا را ساده کرد و آن را به شکل $x^2-2x-3=0$ نوشت.

هر معادله به این صورت را که پس از ساده‌شدن، بزرگ‌ترین توان متغیر آن ۲ باشد، معادلهٔ درجهٔ دوم می نامیم.

هر معادله به شکل

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad (a \neq 0)$$

که در آن a ، b و c اعداد حقیقی هستند را یک معادله درجه دوم می نامیم.

در این بخش، تعدادی از روش‌های حل این معادله را توضیح می‌دهیم.

حل معادلهٔ درجه دوم به روش تجزیه

می‌دانیم که تجزیهٔ یک عبارت به معنای تبدیل آن به حاصل‌ضرب حداقل دو عبارت است. از جمله تجزیه‌هایی که در حل معادلهٔ درجهٔ دوم استفاده می‌شوند، عبارت‌اند از :

۱) فاکتورگیری :

$ax^{۲} + bx = x(ax + b)$

۲) تجزیه به کمک اتحاد مزدوج :

$x^{۲} - a^{۲} = (x - a)(x + a)$

۳) تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک:

$x^{۲} + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

فعالیت

معادلهٔ درجه دوم $x^{۲} - ۲x - ۳ = ۰$ را که درسا در بخش قبل به آن رسید، درنظر بگیرید.

۱ با تجزیهٔ سمت چپ معادلهٔ بالا، جای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

$(x + ۱)(x - ۳) = ۰$

ویژگی حاصل ضرب صفر

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB=۰$، آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است؛ یعنی :

$AB=۰ \Rightarrow A=۰$ یا $B=۰$

۲ از ویژگی بالا استفاده کنید و جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$(x+۱)(x-۳) = ۰ \Rightarrow x+۱=۰$ یا $x-۳=۰ \Rightarrow x=-۱$ یا $x=۳$

برای اطمینان از صحت جواب‌های حاصل شده، می‌توانیم هر دو جواب به‌دست آمده را در معادله قرار دهیم و آنها را آزمایش کنیم. یکی از جواب‌ها آزمایش شده است؛ جواب دیگر را آزمایش کنید.

$x = ۳$	$x=-۱$
$x^{۲}-۲x-۳=۰$	$x^{۲}-۲x-۳=۰$
$۳^{۲} - ۲(۳) - ۳ \overset{?}{=} ۰$	$(-۱)^{۲}-۲(-۱)-۳ \overset{?}{=} ۰$
$۹-۶-۳ \overset{?}{=} ۰$	$۱+۲-۳ \overset{?}{=} ۰$
$۰=۰$ ✓	$۰=۰$ ✓

آیا هر دو جواب این معادله می‌توانند طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای باشند که قبلاً دربارهٔ آن بحث شده است؟ توضیح دهید.

خیر - اضلاع مثلث نمی توانند مقدار منفی داشته باشند پس فقط جواب $x = ۳$ قابل قبول است.

کار در کلاس

معادله‌های درجهٔ دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید و جواب‌های خود را آزمایش کنید.

الف) $x^{۲}-۳x=۱۰$

$x^{۲} - ۳x - ۱۰ = ۰ \Rightarrow (x - ۵)(x + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۵ \\ x = -۲ \end{cases}$

$x^{۲} - ۳x = ۱۰ \xrightarrow{x=۵} ۵^{۲} - ۱۵ = ۱۰ \Rightarrow ۲۵ - ۱۵ = ۱۰ \Rightarrow ۱۰ = ۱۰$ ✓

$x^{۲} - ۳x = ۱۰ \xrightarrow{x=-۲} (-۲)^{۲} - ۳(-۲) = ۱ \Rightarrow ۴ + ۶ = ۱۰ \Rightarrow ۱۰ = ۱۰$ ✓

ب) $۳t^{۲}-t=۰$

$۳t^{۲} - t = ۰ \Rightarrow t(۳t - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۰ \\ t = \frac{۱}{۳} \end{cases}$

$۳t^{۲} - t = ۰ \xrightarrow{t=۰} ۳(۰)^{۲} - ۰ = ۰ \Rightarrow ۰ = ۰$ ✓

$۳t^{۲} - t = ۰ \xrightarrow{t=\frac{۱}{۳}} ۳(\frac{۱}{۳})^{۲} - \frac{۱}{۳} = ۰$

$\Rightarrow \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۳} = ۰ \Rightarrow ۰ = ۰$ ✓

حل معادلهٔ درجه دوم به کمک ریشه‌گیری

فعالیت

معادلهٔ درجه دوم $x^۲=۲۵$ را درنظر بگیرید.

۱ جواب‌های این معادله را به روش تجزیه به‌دست آورید. $x^۲-۲۵=۰ \Rightarrow (x-۵)(x+۵)=۰ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=۵ \\ x=-۵ \end{array} \right.$

۲ از دو طرف معادلهٔ $x^۲=۲۵$، ریشه‌های دوم را محاسبه می‌کنیم و این معادله را به شکل $x=\pm ۵$ می‌نویسیم. این معادله را به روش تجزیه نیز حل کنید و جواب‌های به‌دست آمده را با این جواب‌ها مقایسه کنید.

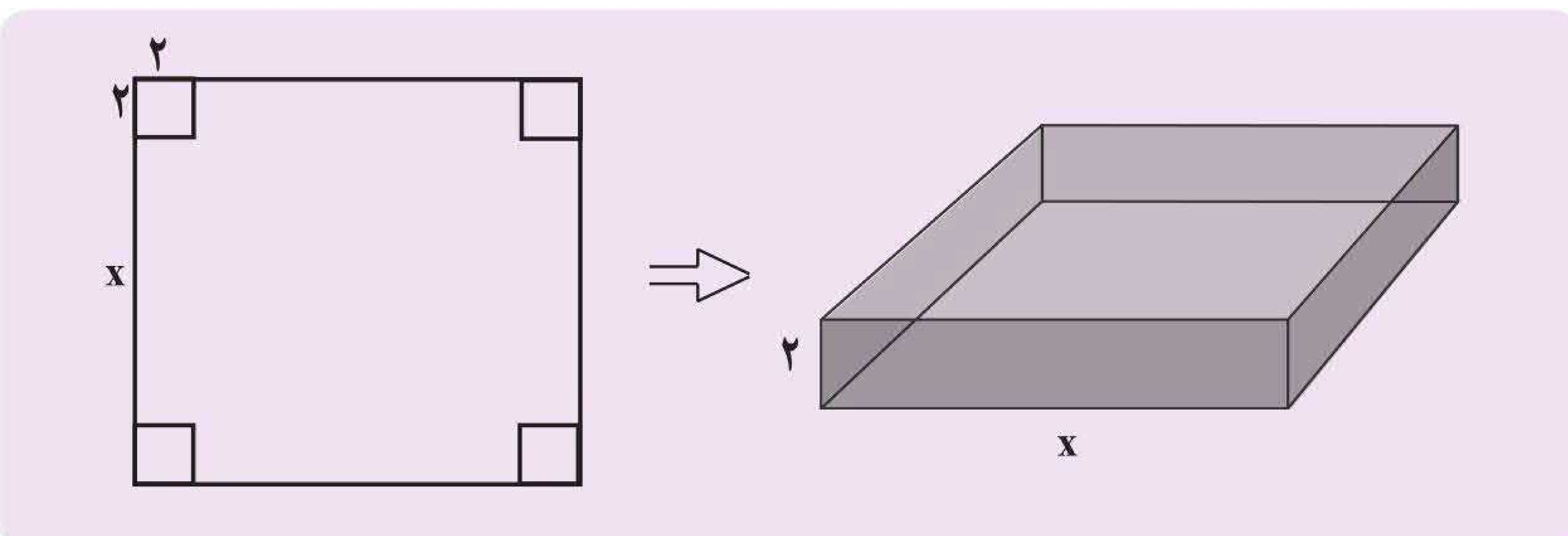
۳ اگر $x^۲=a$ یک معادلهٔ درجه دوم باشد که در آن a یک عدد حقیقی است، آیا همیشه می‌توان جواب‌های آن را به‌صورت $x=\pm\sqrt{a}$ نوشت؟ توضیح دهید.

اگر a یک عدد حقیقی نامنفی(بزرگتر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲=a$ عبارت‌اند از :

$x=\sqrt{a}$ و $x=-\sqrt{a}$

مثال

با یک دستگاه برش، یک صفحهٔ مقوایی به شکل مربع را برش می‌زنیم. سپس، چهار مربع کوچک در گوشه‌های آن را جدا می‌کنیم. بعد با تا زدن لبه‌ها، یک جعبه می‌سازیم. اگر مربع‌های جداشده به ضلع ۲ سانتی‌متر باشند و بخواهیم حجم این جعبه، ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب باشد، طول اضلاع کاغذهایی را که باید برای این کار انتخاب شوند، به دست آورید.



حل : از مقوایی که در شکل سمت چپ رسم شده، چهار مربع به ضلع ۲ سانتی‌متر جدا می‌کنیم تا جعبه‌ای که سمت راست رسم شده، به‌دست آید. حجم این جعبه عبارت است از :

$$\text{طول} \times \text{عرض} \times \text{ارتفاع} = (x)\,(x)\,(۲) = ۲x^۲$$

از آنجا که حجم جعبه، ۲۰۰ سانتی‌متر مکعب باید باشد، داریم: $۲x^۲=۲۰۰$. بنابراین $x^۲=۱۰۰$ و با محاسبهٔ ریشه های دوم این معادله، جواب‌های $x=\pm ۱۰$ به‌دست می‌آید.
و چون طول نمی‌تواند منفی باشد، تنها $x=۱۰$ مورد قبول است و طول ضلع مربع اولیه $x+۴=۱۰+۴=۱۴$ سانتی‌متر است.

کار در کلاس

جواب هر یک از معادله‌های زیر را در صورت وجود به روش ریشه‌گیری به‌دست آورید.

الف) $۵x^۲=۲۰$

$\xrightarrow{\div ۵} x^۲=۴$

$\Rightarrow x=\pm ۲$

ب) $t^۲+۷=۰$

$\Rightarrow t^۲=-۷$

که این غیر ممکن است و معادله جواب ندارد.

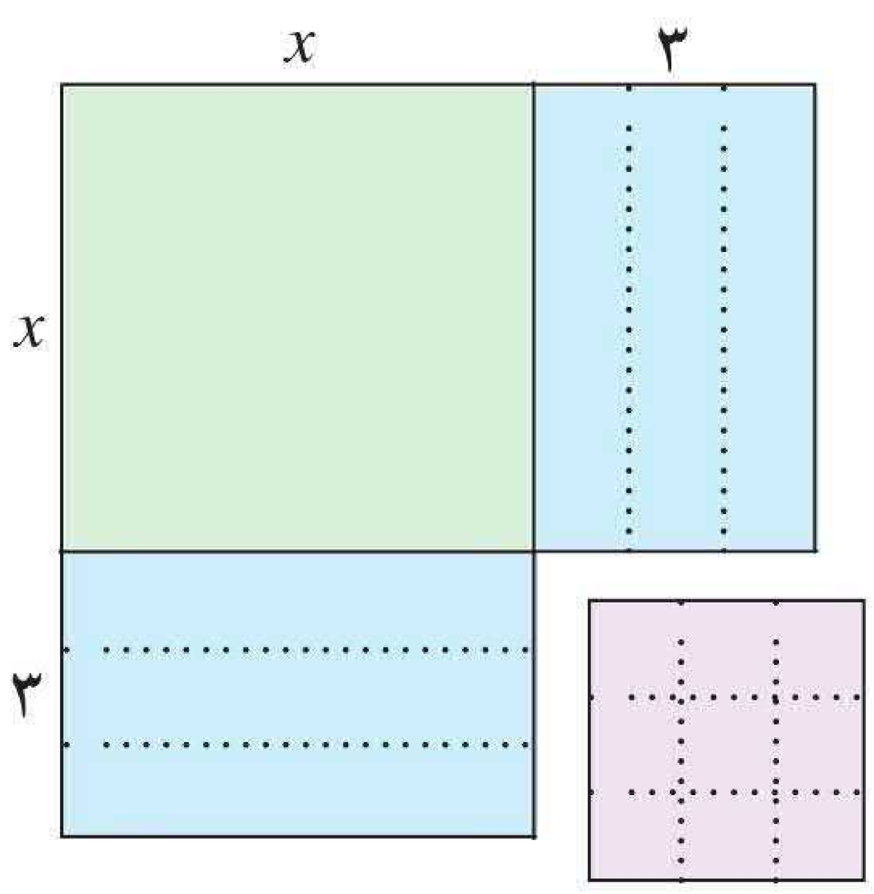
پ) $(r-۲)^۲=۱۶$

$\Rightarrow r-۲=\pm ۴$

$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} r-۲=۴ \Rightarrow r=۶ \\ r-۲=-۴ \Rightarrow r=-۲ \end{array} \right.$

حل معادلهٔ درجه دوم به روش مربع کامل

فعالیت

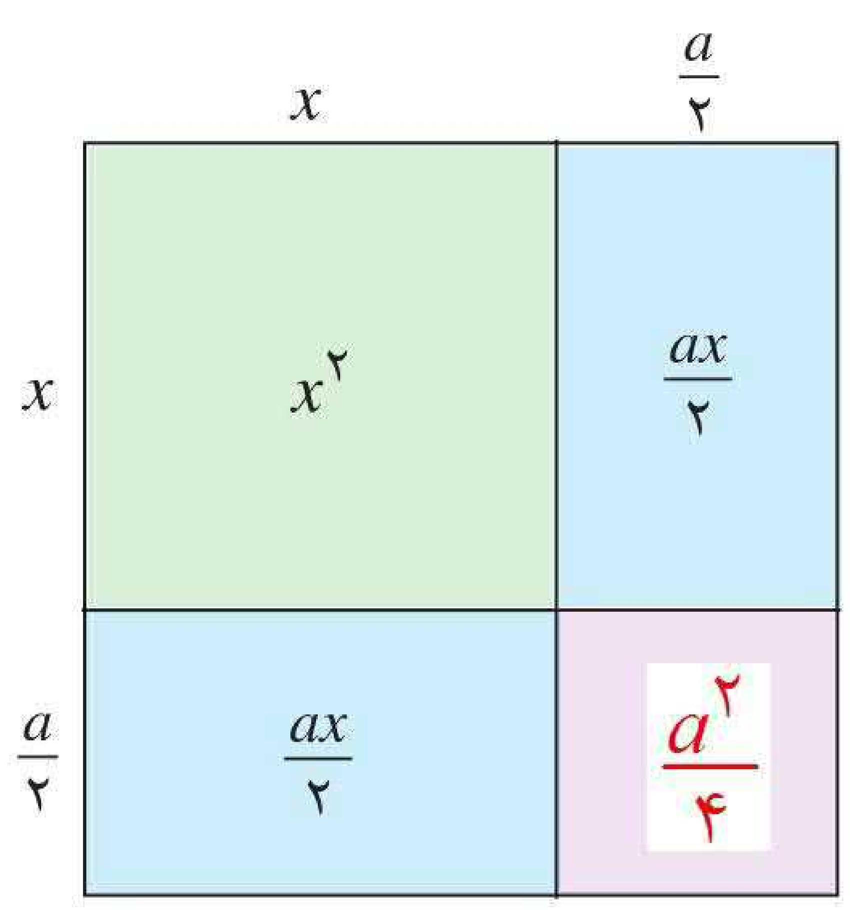


۱ دو جمله‌ای $x^۲+۶x$ را درنظر بگیرید. چه عددی باید به این دو جمله‌ای اضافه شود تا چند جمله‌ای حاصل به شکل مربع کامل نوشته شود؟ جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

$$x^۲+۶x+۹=(x+۳)^۲$$

اعدادی که در جاهای خالی نوشته‌اید، چه ارتباطی با شکل روبه‌رو دارند؟

قطعه ی جدا شده در شکل ۹ قسمت دارد یعنی مربع ۳، و در تساوی فوق ۳ را درون پرانتز و مربع آن یعنی ۹ را در سمت چپ نوشته ایم.



۲ اگر a یک عدد حقیقی باشد، به دو جمله‌ای $x^۲+ax$ چه جمله‌ای باید اضافه شود تا به شکل مربع کامل درآید؟ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$$x^۲+ax+\frac{a^۲}{۴}=(x+\frac{a}{۲})^۲$$

مثال

معادلهٔ $x^۲-۶x+۴=۰$ را به روش مربع کامل حل می کنیم.

معادلهٔ درجه دوم	$x^۲-۶x+۴=۰$
به دو طرف معادله، ۴- را اضافه کرده‌ایم	$x^۲-۶x=-۴$
به دو طرف معادله ... را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود	$x^۲-۶x+۹=-۴+۹$
سمت چپ را به شکل مربع کامل می‌نویسیم	$(x-۳)^۲=۵$
از دوطرف معادله، ریشهٔ دوم می گیریم	$x-۳=\pm\sqrt{۵}$
به دو طرف معادله عدد ۳ را اضافه کرده‌ایم	$x=۳\pm\sqrt{۵}$

بنابراین جواب‌ها یا ریشه‌های این معادله عبارت‌اند از $۳+\sqrt{۵}$ و $۳-\sqrt{۵}$.

کار در کلاس

معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $x^2+2x=24$

$x^2+2x+1=25$

$\Rightarrow (x+1)^2=25$

$\Rightarrow x+1=\pm 5$

$\Rightarrow x=4 \quad , \quad x=-6$

ب) $t^2+3t=3$

$t^2+3t+\frac{9}{4}=3+\frac{9}{4}$

$\Rightarrow (t+\frac{3}{2})^2=\frac{21}{4}$

$\Rightarrow t+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{21}}{2}$

$\Rightarrow x=\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$

$, \quad x=\frac{-3-\sqrt{21}}{2}$

پ) $n^2-4n+5=0$

$n^2-4n=-5$

$\Rightarrow n^2-4n+4=-5+4$

$\Rightarrow (n-2)^2=-1$

$\Rightarrow$ غیر ممکن است

معادله جواب حقیقی ندارد

ت) $2r^2+r-2=0$

$2r^2+r=2$

$\xrightarrow{\div 2} r^2+\frac{1}{2}r=1$

$\Rightarrow r^2+\frac{1}{2}r+\frac{1}{16}=1+\frac{1}{16}$

$\Rightarrow (r+\frac{1}{4})^2=\frac{17}{16}$

$\Rightarrow r+\frac{1}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4}$

$\Rightarrow r=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

حل معادلهٔ درجهٔ دوم به روش فرمول کلی

فعالیت

در بخش‌های قبل، روش‌هایی برای حل معادله‌های درجهٔ دوم فرا گرفته‌اید. اکنون می‌خواهیم یک فرمول کلی برای حل معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ که در آن $a\neq 0$ است، پیدا کنیم.

دانش‌آموز : آیا با روش مربع کامل می توان هر معادلهٔ درجه دوم را حل کرد؟

معلم : بله. برای حل معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ با این روش مراحل زیر را انجام می دهیم :

$ax^2+bx+c=0$

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ دو طرف معادله را بر a تقسیم می‌کنیم

$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$ به دو طرف معادله، $-\frac{c}{a}$ را اضافه کرده‌ایم

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$ به دو طرف معادله، $\frac{b^2}{4a^2}$ را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود

$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ دو طرف را ساده کرده‌ایم

اکنون قرار می‌دهیم $\Delta=b^2-4ac$ ؛ پس : $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{\Delta}{4a^2}$.

آیا می‌توانید با ریشهٔ دوم گرفتن از دو طرف این معادله، جواب‌های آن را به‌دست آورید؟

دانش‌آموز : اگر $\Delta<0$ باشد، از سمت راست نمی‌توان ریشهٔ دوم گرفت.

معلم : آفرین؛ پس اگر Δ یک عدد منفی باشد، معادلهٔ درجهٔ دوم ریشه‌ای ندارد. اگر $\Delta>0$ باشد، آیا می‌توانید ریشه‌های این معادله را به‌دست آورید؟

دانش‌آموز : بله. کافی است از دو طرف معادلهٔ $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{\Delta}{4a^2}$ ریشهٔ دوم بگیریم :

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

دانش‌آموز : اگر $\Delta=0$ باشد، آیا این معادله ریشه‌ای دارد؟

معلم : بله و این ریشه از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{\Delta}{4a^2} \quad \Rightarrow \quad (x+\frac{b}{2a})^2=0 \Rightarrow x+\frac{b}{2a}=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}$$

دانش‌آموز : پس در حالت $\Delta=0$ معادله تنها یک ریشه به‌صورت $x=-\frac{b}{2a}$ دارد.

معلم : این ریشه از معادلهٔ $(x+\frac{b}{2a})^2=(x+\frac{b}{2a})(x+\frac{b}{2a})=0$ به‌دست آمده است و چون هر دو معادلهٔ $x+\frac{b}{2a}=0$ و $x+\frac{b}{2a}=0$ جواب یکسان دارند، به جواب مشترک آنها، ریشهٔ مضاعف یا ریشه مکرر مرتبهٔ دوم می‌گوییم.

کار در کلاس

۱ با توجّه به فعالیت بالا، جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$ax^2+bx+c=0 \rightarrow$ $\Delta=b^2-4ac$

$\Delta>0$: معادله دو جواب حقیقی متمایز دارد : $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta=...$: معادله یک ریشهٔ حقیقی دارد : $x=-\frac{b}{2a}$

$\Delta<0$: معادله جواب حقیقی ندارد

شهر سوخته، سیستان و بلوچستان

۲ معادله‌های زیر را با فرمول کلی حل کنید.

الف) $x^2-x+1=0$

$\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=1-4=-3 \Rightarrow$ معادله جواب حقیقی ندارد

ب) $-2x^2+x+3=0$

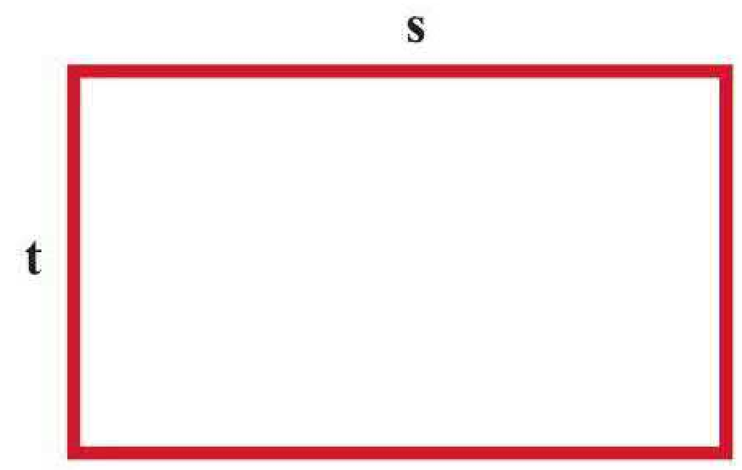
$\Delta=1^2-4(-2)\times3=25 \Rightarrow x=\frac{-1\pm5}{-4} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x=-1 \end{cases}$

پ) $-x^2+4x-4=0$

$\Delta=16-16=0 \Rightarrow x=\frac{-4\pm0}{-2}=2$

مثال

از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ متر مربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.



حل: اگر طول و عرض این مستطیل، برابر با s و t باشند، با توجه به اینکه محیط آن ۵۰ متر است، پس $۲(s+t)=۵۰$. از ساده کردن این معادله به معادله $s+t=۲۵$ می رسیم؛ بنابراین $t=۲۵-s$.

از سوی دیگر $st=۱۴۴$. با جای‌گذاری t برحسب s در این معادله به شکل $s(۲۵-s)=۱۴۴$ می رسیم که بعد از ساده شدن، معادلهٔ درجه دوم $s^۲-۲۵s+۱۴۴=۰$ به‌دست می‌آید.

در این معادله $a=۱, b=-۲۵, c=۱۴۴$؛ بنابراین

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۲۵)^۲-۴(۱)(۱۴۴)=۶۲۵-۵۷۶=۴۹$$

پس $\Delta>۰$ و معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} s_۱=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{۲۵+۷}{۲}=\dfrac{۳۲}{۲}=۱۶ \\ s_۲=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{۲۵-۷}{۲}=\dfrac{۱۸}{۲}=۹ \end{cases}$$

و چون $t=۲۵-s$، پس برای t نیز دو جواب به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} s_۱=۱۶\Rightarrow t_۱=۲۵-۱۶=۹ \\ s_۲=۹\Rightarrow t_۲=۲۵-۹=۱۶ \end{cases}$$

بنابراین در هر حالت یک مستطیل با اضلاع ۹ و ۶ سانتی‌متر به‌دست می‌آید.

تمرین

۱ معادله‌های زیر را به کمک تجزیه حل کنید.

۱) $x^۲-۱۱x=-۱۰ \Rightarrow x^۲-۱۱x+۱۰=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۱۰)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=۱۰ \end{cases}$

۲) $۵t^۲=۲۰ \Rightarrow ۵t^۲-۲۰=۰ \Rightarrow ۵(t-۲)(t+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t-۲=۰\Rightarrow t=۲ \\ t+۲=۰\Rightarrow t=-۲ \end{cases}$

۳) $۵a^۲-۷a=۲a(a-۳) \Rightarrow ۵a^۲-۷a=۲a^۲-۶a \Rightarrow ۳a^۲-a=۰ \Rightarrow a(۳a-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۰ \\ ۳a-۱=۰\Rightarrow a=\frac{۱}{۳} \end{cases}$

۴) $۴k^۲-۱۲k+۸=۰ \Rightarrow ۴(k-۱)(k-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} k-۱=۰\Rightarrow k=۱ \\ k-۲=۰\Rightarrow k=۲ \end{cases}$

---

۲ هر یک از معادله‌های زیر را با ریشهٔ دوم گرفتن حل کنید.

۱) $n^۲-۲=۲۶ \Rightarrow n^۲=۲۸ \Rightarrow n=\pm\sqrt{۲۸}=\pm۲\sqrt{۷}$

۲) $x^۲+۱۲=۳ \Rightarrow x^۲=-۹ \Rightarrow$ غیر ممکن است و معادله جواب حقیقی ندارد

۳) $(۳t-۲)^۲=۴ \Rightarrow ۳t-۲=\pm۲ \Rightarrow \begin{cases} ۳t-۲=۲\Rightarrow t=\frac{۴}{۳} \\ ۳t-۲=-۲\Rightarrow t=۰ \end{cases}$

۴) $۳-۳k=۳k(۲k-۱) \Rightarrow ۳-۳k=۶k^۲-۳k \Rightarrow ۳=۶k^۲$
$\Rightarrow k^۲=\frac{۱}{۲} \Rightarrow k=\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

---

۳ معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

۱) $x^۲-۶x=۷$

$x^۲-۶x+۹=۷+۹$

$\Rightarrow (x-۳)^۲=۱۶$

$\Rightarrow x-۳=\pm۴$

$\Rightarrow \begin{cases} x-۳=۴\Rightarrow x=۷ \\ x-۳=-۴\Rightarrow x=-۱ \end{cases}$

۲) $s^۲-۳s+۳=۰$

$s^۲-۳s=-۳$

$\Rightarrow s^۲-۳s+\frac{۹}{۴}=-۳+\frac{۹}{۴}$

$\Rightarrow (s-\frac{۳}{۲})^۲=-\frac{۳}{۴}$

$\Rightarrow$ غیر ممکن است

$\Rightarrow$ معادله جواب حقیقی ندارد

۳) $r^۲+۴r+۴=۰$

$\Rightarrow (r+۲)^۲=۰$

$\Rightarrow r+۲=۰$

$\Rightarrow r=-۲$

۴) $۲a^۲+۵a-۳=۰$

$\xrightarrow{\div ۲} a^۲+\frac{۵}{۲}a=\frac{۳}{۲} \Rightarrow a^۲+\frac{۵}{۲}a+\frac{۲۵}{۱۶}=\frac{۳}{۲}+\frac{۲۵}{۱۶}$

$\Rightarrow (a+\frac{۵}{۴})^۲=\frac{۴۹}{۱۶} \Rightarrow a+\frac{۵}{۴}=\pm\frac{۷}{۴}$

$\Rightarrow \begin{cases} a+\frac{۵}{۴}=\frac{۷}{۴}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲} \\ a+\frac{۵}{۴}=-\frac{۷}{۴}\Rightarrow a=-۳ \end{cases}$

۴ هر یک از معادله‌های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

۱) $4x^2-13x+3=0 \xrightarrow{\Delta=169-48=121} x=\frac{13\pm11}{8} \Rightarrow x=3\ ،\ x=\frac{1}{4}$

۲) $r-r^2=3 \Rightarrow r^2-r+3=0 \Rightarrow \Delta=1-12=-11 \Rightarrow$ معادله جواب حقیقی ندارد

۳) $a^2+2\sqrt{3}a=9 \Rightarrow a^2+2\sqrt{3}a-9=0 \xrightarrow{\Delta=48} a=\frac{-2\sqrt{3}\pm\sqrt{48}}{2}=\frac{-2\sqrt{3}\pm4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{3} \\ a=-3\sqrt{3} \end{cases}$

۴) $\frac{t^2}{3}-\frac{t}{2}-\frac{3}{2}=0 \xrightarrow{\times6} 2t^2-3t-9=0 \xrightarrow{\Delta=81} t=\frac{3\pm9}{4} \Rightarrow t=3\ ،\ t=\frac{-3}{2}$

---

۵ هر یک از معادله‌های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

۱) $2x^2=250 \xrightarrow{\div2} x^2=125 \Rightarrow x=\pm\sqrt{125}=\pm5\sqrt{5}$

۲) $9-6z+z^2=0 \Rightarrow (z-3)^2=0 \Rightarrow z-3=0 \Rightarrow z=3$

۳) $4a^2+3a=1 \Rightarrow 4a^2+3a-1=0 \xrightarrow{\Delta=25} a=\frac{-3\pm5}{8} \Rightarrow a=\frac{1}{4}\ ،\ a=-1$

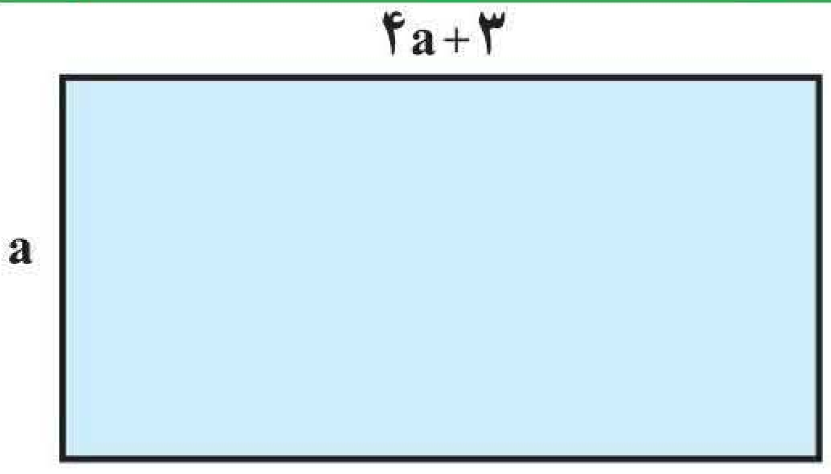
۴) $b^2+\sqrt{2}b-4=0 \xrightarrow{\Delta=18} b=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{18}}{2}=\frac{-\sqrt{2}\pm3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b=\sqrt{2}\ ،\ b=-2\sqrt{2}$

---

۶ مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی ۲۹۰ است. این دو عدد را پیدا کنید. گیریم آن دو عدد k و $k+2$ باشند، بنابراین:

$k^2+(k+2)^2=290 \Rightarrow k^2+k^2+4k+4=290 \Rightarrow 2k^2+2k-286=0 \xrightarrow{\div2} k^2+k-143=0 \Rightarrow (k+13)(k-11)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} k=-13 \Rightarrow & \text{آن دو عدد فرد عبارتند از ۱۳- و ۱۱-} \\ k=11 \Rightarrow & \text{آن دو عدد فرد عبارتند از ۱۱ و ۱۳} \end{cases}$



۷ طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی‌متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

$S=a(4a+3)=45 \Rightarrow 4a^2+3a-45=0 \xrightarrow{\Delta=729} a=\frac{-3\pm27}{8} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{15}{4} & \text{غیر قابل قبول} \\ a=3 \Rightarrow & \text{عرض مستطیل ۳ و طول آن ۱۵ است} \end{cases}$

---

۸ اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر حاصل‌ضرب سن آنها ۶۰ شود، سن هر کدام چقدر است؟

سن برادر کوچک $=x \xrightarrow{\text{چهار سال بعد}} =x+4$

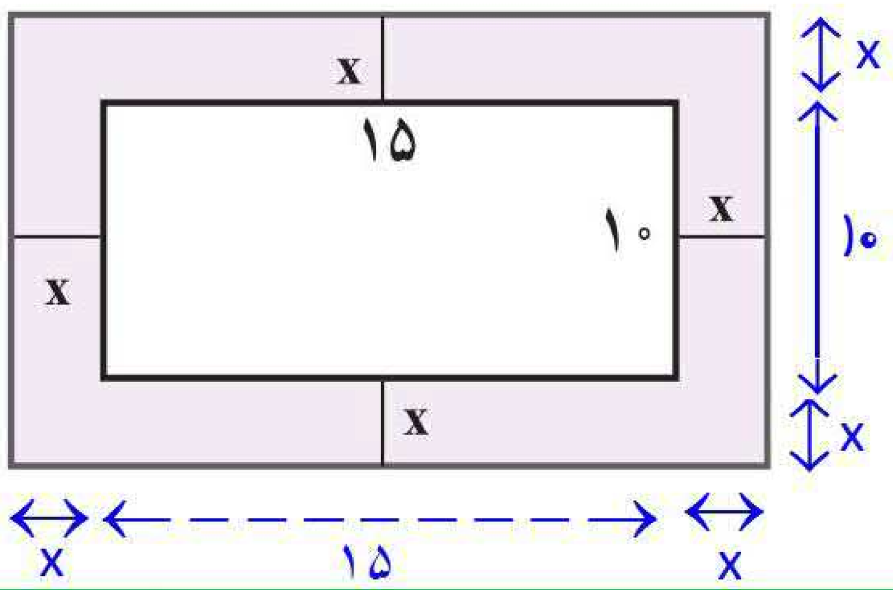
سن برادر بزرگ $=x+4 \longrightarrow =x+8$

$\Rightarrow (x+4)(x+8)=60 \Rightarrow x^2+12x+32=60 \Rightarrow x^2+12x-28=0 \Rightarrow (x-2)(x+14)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x=-14 & \text{غیر قابل قبول چون سن منفی نداریم} \\ x=2 \Rightarrow & \text{برادر کوچک ۲ ساله و برادر بزرگ ۶ ساله اند.} \end{cases}$

---

۹ یک عکس به اندازهٔ ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع، قرار دارد. اگر فاصلهٔ همهٔ لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.



طبق شکل، طول مستطیل $2x+15$ و عرض آن $2x+10$ است. بنابراین طبق فرمول مساحت:

$(2x+10)(2x+15)=300 \Rightarrow 4x^2+50x+150=300 \Rightarrow 4x^2+50x-150=0 \xrightarrow{\div2} 2x^2+25x-75=0$

$\xrightarrow{\Delta=1225} x=\frac{-25\pm35}{4} \Rightarrow \begin{cases} x=-15 & \text{غیر قابل قبول} \\ x=\frac{5}{2} \Rightarrow & \text{طول قاب عکس برابر ۲۰ و عرض آن برابر ۱۵ می باشد.} \end{cases}$

---

۱۰ در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های تیمگان، تنها یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم‌های این تیمگان را به‌دست آورید.

اگر تعداد بازی‌های تیمگان N و تعداد تیم‌ها n باشد، الگویی برای تعداد بازی‌ها به‌دست آورید.

اگر تعداد تیم ها n، هر تیم با $n-1$ تیم بازی دارد. پس با توجه به اینکه بین هر دو تیم تنها یک بازی صورت میگیرد و اصطلاحاً رفت و برگشتی نیست، تعداد کل بازی ها برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ است. بنابراین:

$\frac{n(n-1)}{2}=45 \Rightarrow n^2-n=90 \Rightarrow n^2-n-90=0 \Rightarrow (n-10)(n+9)=0 \Rightarrow \begin{cases} n=-9 & \text{غیر قابل قبول} \\ n=10 & \text{تیمگان مورد نظر دارای ۱۰ تیم است} \end{cases}$

---

۱۱ فشار خون نرمال یک شخص مذکر[1]، که بر حسب میلی‌متر جیوه (mmHg) اندازه‌گیری می‌شود، با رابطهٔ $P=0/006s^2-0/02s+120$ محاسبه می‌شود که در آن، P فشار خون نرمال یک فرد با سن s است. سن شخصی را پیدا کنید که فشار خون آن ۱۲۵ میلی‌متر جیوه باشد. (از ماشین حساب استفاده کنید.)

$p=125 \Rightarrow 0/006S^2-0/02S+120=125 \Rightarrow 0/006S^2-0/02S-5=0 \xrightarrow{\Delta=0/1204} S=\frac{0/02\pm0/3469}{0/012}$

$\Rightarrow \begin{cases} S=30/575 & \text{شخص مورد نظر تقریباً ۳۰ سال و ۲۰۷ روز سن داشته است.} \\ S=-27/241 & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$

توجه: قرار داد کرده ایم که S بر حسب سال است.

۱ــ منظور از این نوع فشار خون، فشار خون سیستولیک است.