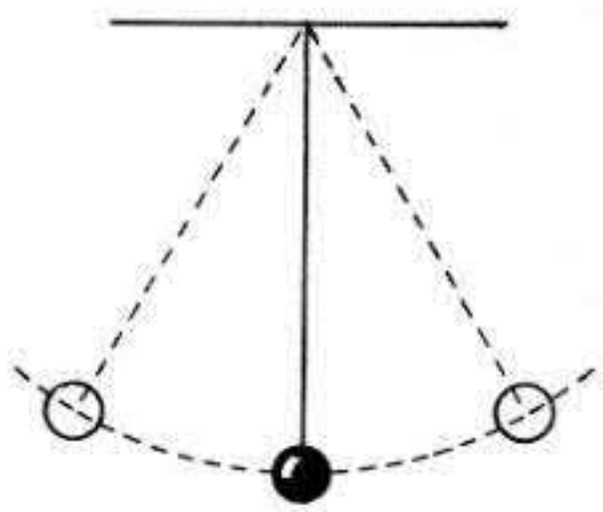
تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

## درس دوم: سهمی

آیا تاکنون به مسیری که یک اسکی باز در یک مسابقهٔ پرش ارتفاع یا یک گوی آونگ طی می‌کند، دقت کرده‌اید؟ هیچ کدام از این مسیرها، یک خط راست نیستند.

مسیر طی شده توسط اسکی باز یا گوی آونگ می‌تواند توسط معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ محاسبه شود که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند و البته $a\neq 0$ است.

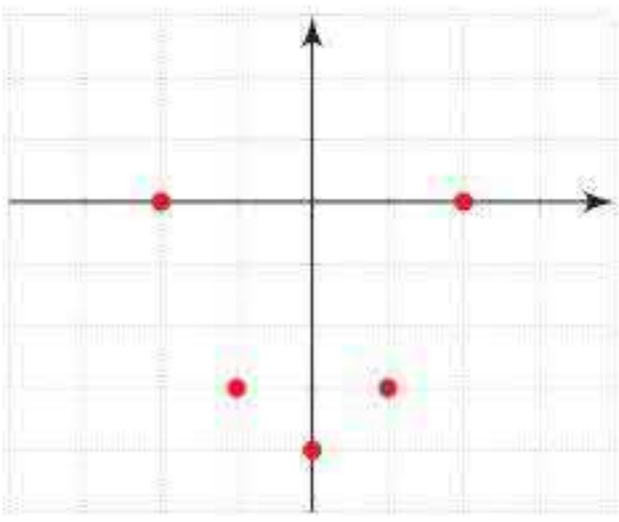


**فعالیت**

معادلهٔ $y=x^2-4$ را درنظر بگیرید.

الف) در جدول زیر، چند نقطه که در این معادله صدق می‌کنند، آمده است. این جدول را کامل کنید.

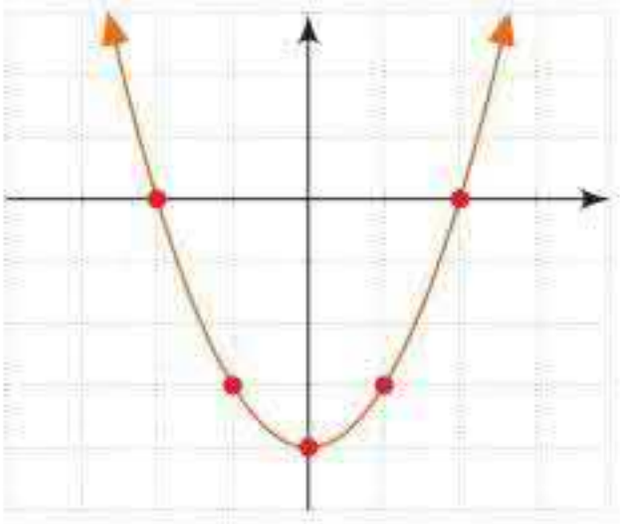
| x | $y=x^2-4$ | (x,y) |
|---|---|---|
| $-2$ | $y=(-2)^2-4=4-4=0$ | $(-2,0)$ |
| $-1$ | $y=(-1)^2-4=1-4=-3$ | $(-1,-3)$ |
| $0$ | $y=(0)^2-4=0-4=-4$ | $(0,-4)$ |
| $1$ | $y=(1)^2-4=1-4=-3$ | $(1,-3)$ |
| $2$ | $y=(2)^2-4=4-4=0$ | $(2,0)$ |



نقاط به‌دست آمده در جدول بالا را در یک دستگاه مختصات مشخص کرده و آنها را به یکدیگر وصل می‌کنیم (شکل‌های روبه‌رو).

ب) پایین‌ترین نقطهٔ این نمودار چه نقطه‌ای است؟ $(0,-4)$

آیا می‌توانید محور تقارن این نمودار را مشخص کنید؟ محور y ها محور تقارن این شکل است.



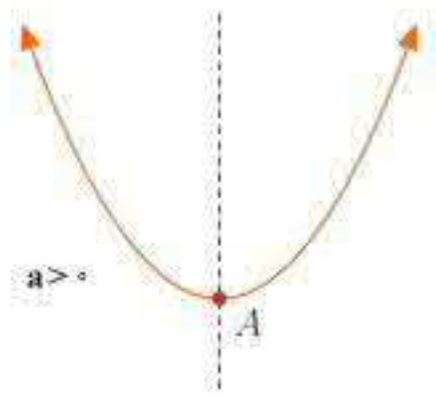
پ) برای رسم این نمودار، از چند نقطه استفاده کرده‌ایم؟ ۵ نقطه

آیا با نقاط کمتری نیز می‌توانیم این نمودار را رسم کنیم؟ بله با سه نقطه نیز امکان پذیر است

ت) محل برخورد منحنی رسم شده با محور xها در چه نقاطی است؟

طبق شکل در نقاط $(2,0)$ و $(-2,0)$ منحنی با محور x ها برخورد دارد.

نمودار هر معادله به شکل $y = ax^2 + bx + c$ را که در آن a و b و c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$ یک سهمی می‌گوییم که به یکی از دو صورت مقابل است:




محور تقارن

نقطهٔ A را در شکل‌های مقابل رأس سهمی می‌گوییم.

اگر $a > 0$ باشد، A پایین‌ترین نقطهٔ سهمی و اگر $a < 0$ باشد، A بالاترین نقطهٔ سهمی است.

همچنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، خط تقارن سهمی نامیده می‌شود.

**فعالیت**

معادلهٔ یک سهمی به‌صورت $y = x^2 - 4x + 5$ است.

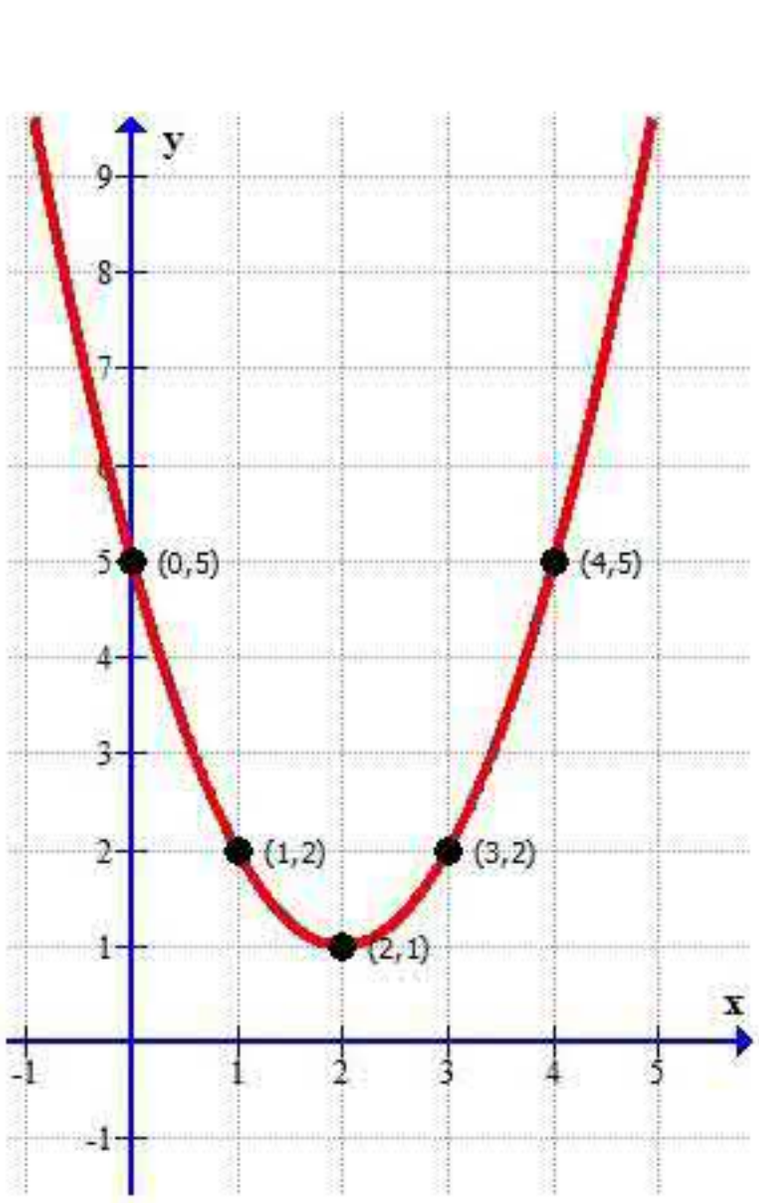
**الف** سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید.

$y = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow y = (x-2)^2 + 1$

**ب** ریشهٔ عبارت داخل پرانتز را به‌دست آورید و آن را در ردیف وسط جدول زیر قرار دهید. جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

| x | $y = x^2 - 4x + 5$ | (x,y) |
|---|---|---|
| ۰ | $y = 0^2 - 4 \times 0 + 5 = 5$ | (۰,۵) |
| ۱ | $y = 1^2 - 4 \times 1 + 5 = 2$ | (۱,۲) |
| ۲ | $y = 2^2 - 4 \times 2 + 5 = 1$ | (۲,۱) |
| ۳ | $y = 3^2 - 4 \times 3 + 5 = 2$ | (۳,۲) |
| ۴ | $y = 4^2 - 4 \times 4 + 5 = 5$ | (۴,۵) |




**پ** پنج نقطهٔ حاصل شده در جدول بالا را به یکدیگر وصل کنید تا این سهمی رسم شود.

**ت** آیا می‌توانید پایین‌ترین نقطهٔ این سهمی را از معادلهٔ آن به شکل $y = (x-2)^2 + 1$ به‌دست آورید؟

طول این نقطه ریشه عبارت درون پرانتز است یعنی ۲

و عرض آن همان عدد تنهای بیرون پرانتز است یعنی ۱

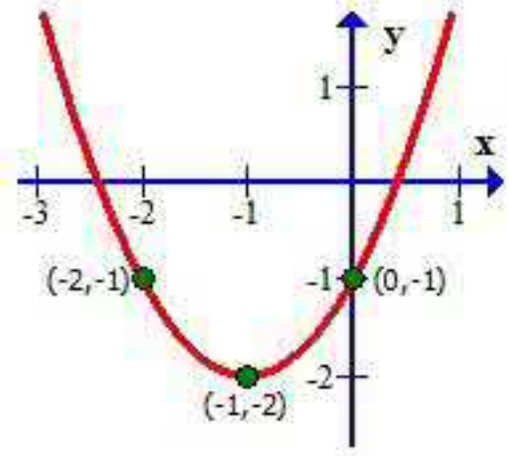
**هر سهمی به‌صورت $y = a(x-h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است ، رأسی به مختصات $(h , k)$ و خط‌تقارنی با معادلهٔ $x = h$ دارد.**

**کار در کلاس**

۱ در هر یک از سهمی‌های زیر، رأس را مشخص و سپس آن را رسم کنید.

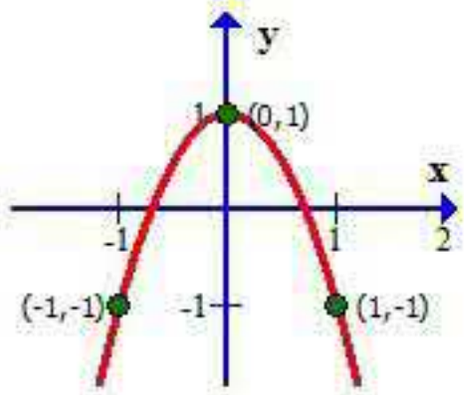
الف) $y = (x+1)^2 - 2$

راس سهمی نقطه ی $(-2, -2)$ است




| x | -۲ | -۱ | ۰ |
|---|---|---|---|
| y | -۱ | -۲ | -۱ |

ب) $y = -2x^2 + 1$ راس سهمی نقطه ی $(0, 1)$ است .




| x | y |
|---|---|
| ) | -) |
| ۰ | ) |
| -) | -) |

**فعالیت**

معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید. **الف** سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید و نشان دهید :

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a\left[(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c \Rightarrow y = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$

$$\Rightarrow y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c \Rightarrow y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

**ب** با استفاده از قسمت قبل، نشان دهید که رأس این سهمی، نقطهٔ $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ و خط تقارن آن نیز $x = -\frac{b}{2a}$ است.[1]

راس سهمی $S(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ ، معادله محور تقارن $y = a(x - (-\frac{b}{2a}))^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$

**مثال**

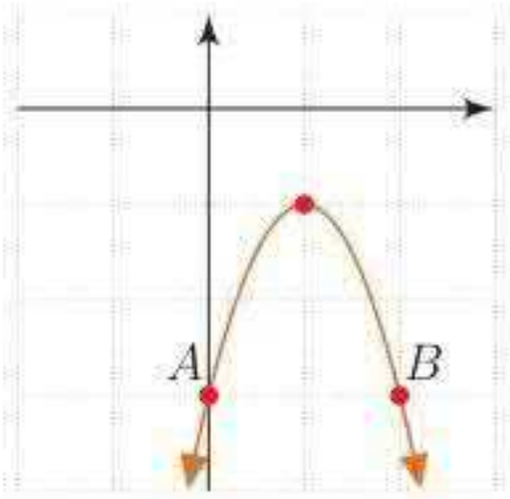
سهمی $y = -2x^2 + 4x - 3$ را رسم می کنیم.

در این سهمی $a = -2$، $b = 4$ و $c = -3$ است. مختصات رأس سهمی را به‌دست می‌آوریم.

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{-4} = 1$$

اکنون در جدول زیر، سه نقطه از آن را پیدا می کنیم.

| x | $y=-2x^2+4x-3$ | (x,y) |
|---|---|---|
| ۰ | $-2(0)^2+4(0)-3=-3$ | $(0,-3)$ |
| ۱ | $-2(1)^2+4(1)-3=-1$ | $(1,-1)$ |
| ۲ | $-2(2)^2+4(2)-3=-3$ | $(2,-3)$ |




بنابراین نمودار این سهمی به‌صورت مقابل خواهد بود.

دقت کنید نقاط A و B از این سهمی که عرض یکسان دارند، نسبت به خط تقارن یعنی خط $x=1$ قرینه‌اند.

---

۱ـ عرض رأس سهمی یعنی $\frac{4ac - b^2}{4a}$ را می‌توانید از قرار دادن $x = -\frac{b}{2a}$ در معادلهٔ سهمی به‌دست آورید.

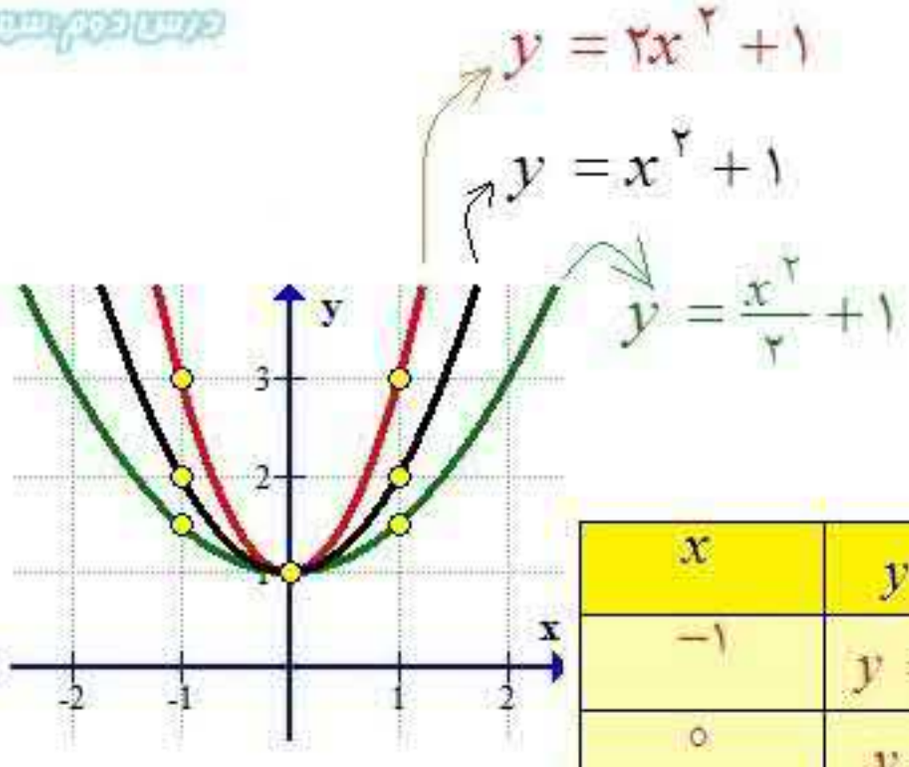
## فعالیت

معادلهٔ دو سهمی به‌صورت $y=\frac{x^2}{2}+1$ و $y=2x^2+1$ است.

**الف** مختصات رأس و دو نقطه دیگر از این دو سهمی را در جدول زیر مشخص کنید و سپس نمودار هر دو سهمی را در شکل مقابل رسم کنید و نشان دهید که مختصات رأس هر دو سهمی نقطهٔ $A(0,1)$ است.

| $x$ | $y=\frac{x^2}{2}+1$ | $(x,y)$ |
|---|---|---|
| $-1$ | $y=\frac{(-1)^2}{2}+1$ | $(-1,\frac{3}{2})$ |
| $0$ | $y=\frac{(0)^2}{2}+1$ | $(0,1)$ |
| $1$ | $y=\frac{(1)^2}{2}+1$ | $(1,\frac{3}{2})$ |

| $x$ | $y=2x^2+1$ | $(x,y)$ |
|---|---|---|
| $-1$ | $y=2(-1)^2+1$ | $(-1,3)$ |
| $0$ | $y=2(0)^2+1$ | $(0,1)$ |
| $1$ | $y=2(1)^2+1$ | $(1,3)$ |




**ب** معادلهٔ سهمی دیگری را که نقطهٔ A رأس آن است، بنویسید و آن را در دستگاه بالا رسم کنید.

$y=x^2+1$

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $2$ | $1$ | $2$ |

**پ** ضرایب $x^2$ در معادلات سهمی‌هایی که رسم شده‌اند، چه نقشی در نمودار آنها داشته است؟

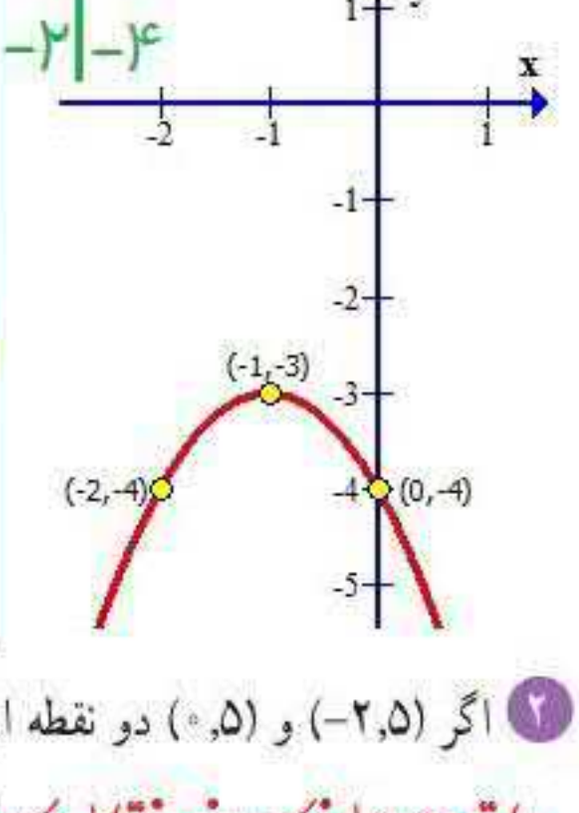
اگر ضریب $x^2$ مثبت باشد، با زیاد شدن آن دهانه ی سهمی تنگ تر می شود.

## تمرین

**۱** نمودار هر یک از سهمی‌های زیر را رسم کنید.

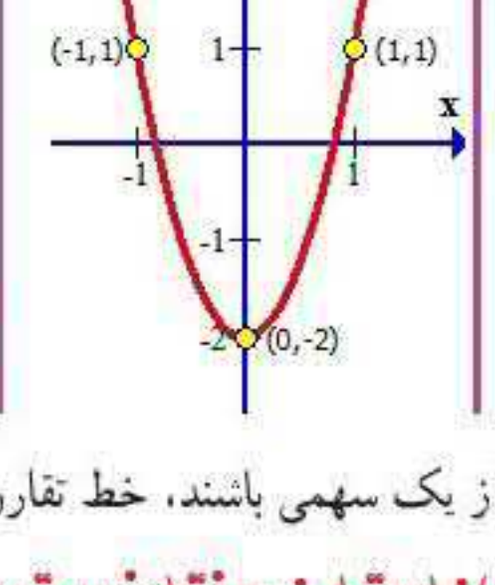
الف) $y=-(x+1)^2-3$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $0$ | $-4$ |
| $-1$ | $-3$ |
| $-2$ | $-4$ |



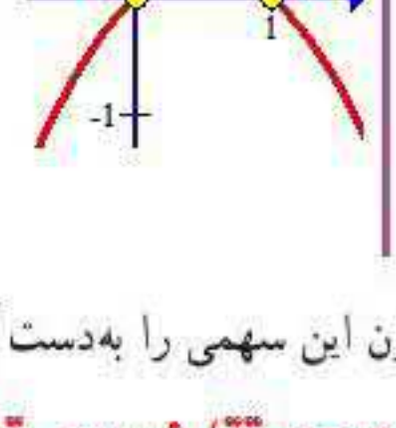

ب) $y=3x^2-2$

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $1$ | $-2$ | $1$ |



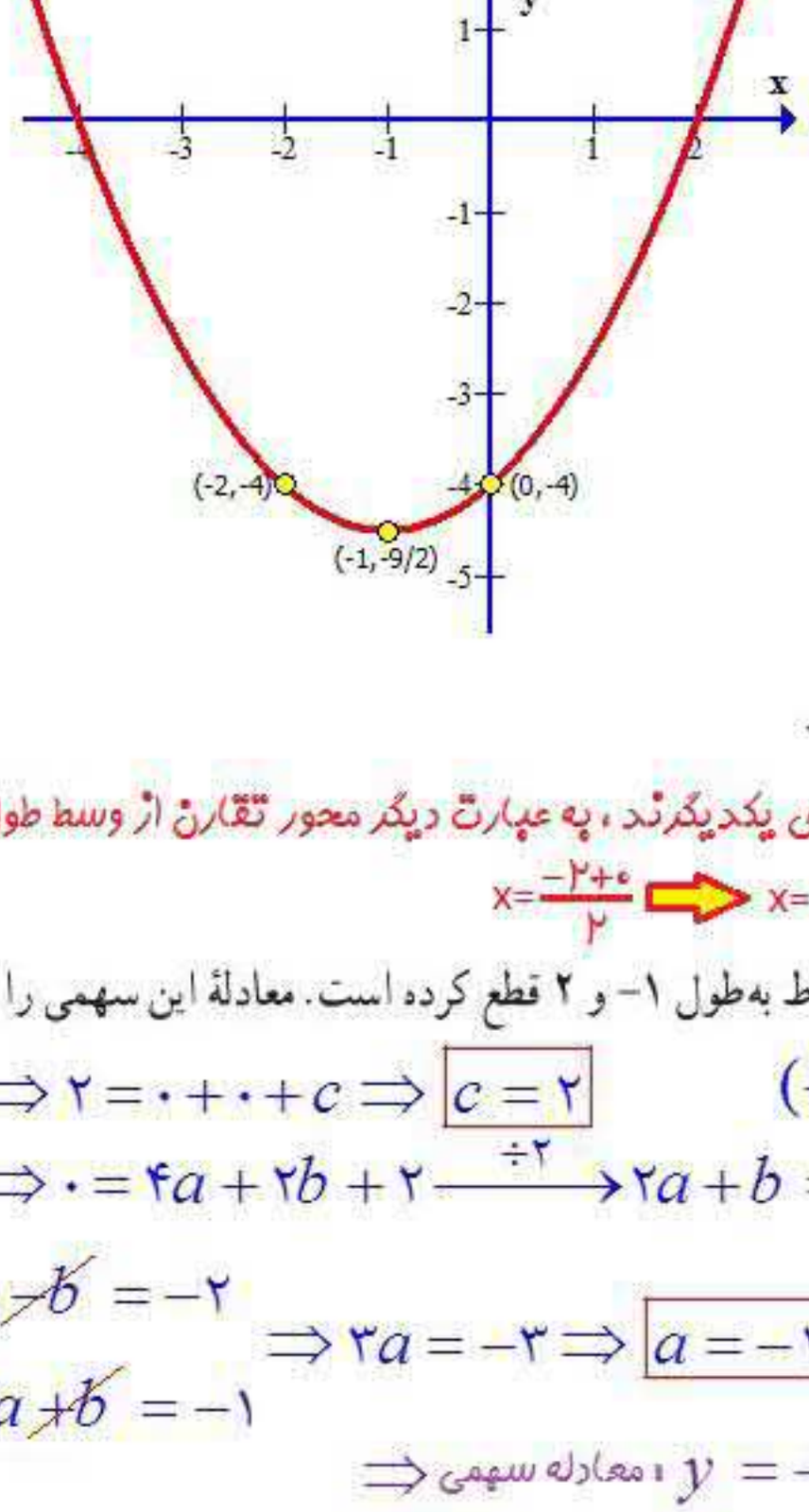

پ) $y=x-x^2$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $0$ | $0$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $1$ | $0$ |




ت) $y=\frac{x^2}{2}+x-4$

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $-4$ | $-\frac{9}{2}$ | $-4$ |




**۲** اگر $(-2,5)$ و $(0,5)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به‌دست آورید.

با توجه به اینکه عرض نقاط یکسان است این دو نقطه نسبت به محور تقارن سهمی قرینه ی یکدیگرند، به عبارت دیگر محور تقارن از وسط طول های این دو نقطه می گذرد

$x=\frac{-2+0}{2}=-1$ ⟹ معادله خط تقارن $x=-1$

**۳** نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور xها را در نقاط به‌طول ۱- و ۲ قطع کرده است. معادلهٔ این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

$(0,2)\Rightarrow 2=0+0+c\Rightarrow \boxed{c=2}$

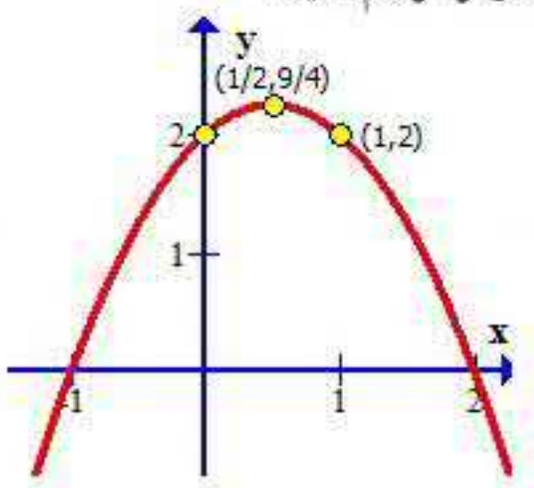
$(-1,0)\Rightarrow 0=a-b+2\Rightarrow a-b=-2$

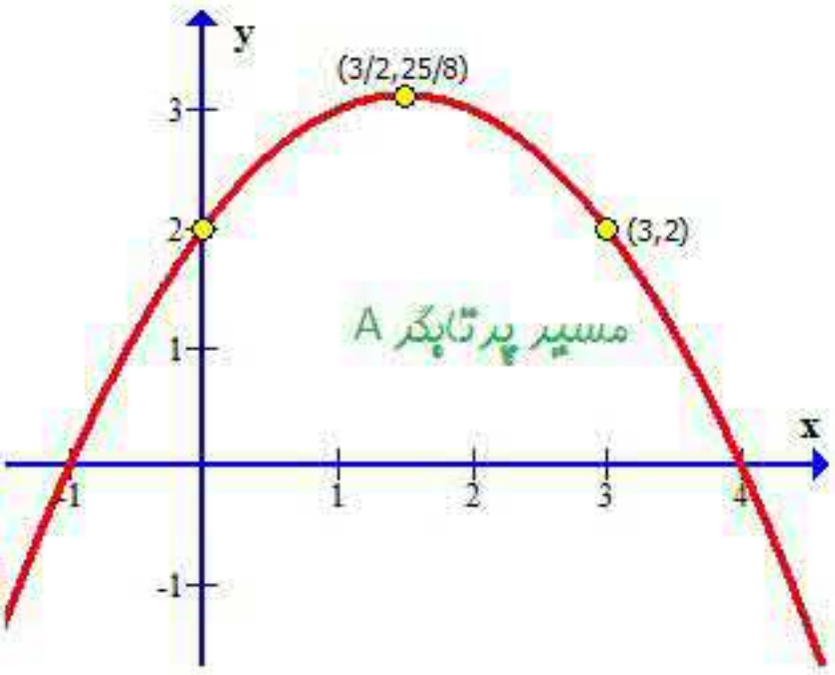
$(2,0)\Rightarrow 0=4a+2b+2\xrightarrow{\div 2} 2a+b=-1$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-b=-2\\2a+b=-1\end{cases}\Rightarrow 3a=-3\Rightarrow \boxed{a=-1}\Rightarrow -2+b=-1\Rightarrow \boxed{b=1}$$

$\Rightarrow$ معادله سهمی: $y=-x^2+x+2$

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $2$ | $\frac{9}{4}$ | $2$ |



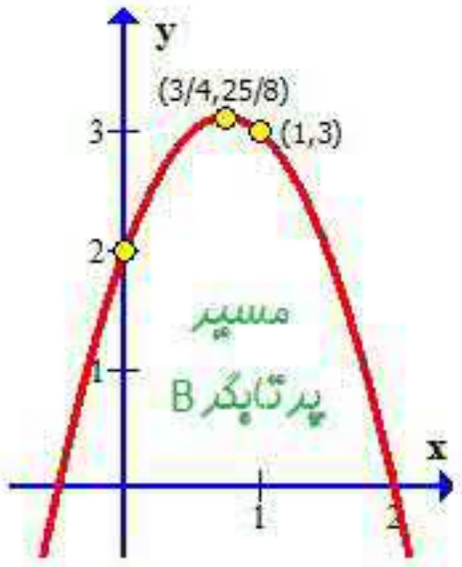



۴ دو پرتابگر وزنه در یک مسابقهٔ ورزشی، وزنه‌های خود را با زاویه‌های متفاوت $\alpha$ و $\beta$ که $\alpha < \beta$ است، پرتاب کرده‌اند. پرتابگر A، زاویهٔ $\alpha$ را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطهٔ $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2$ به‌دست می‌آید. پرتابگر B نیز زاویهٔ $\beta$ را انتخاب می‌کند و مسیر طی شده از رابطهٔ $y = -2x^2 + 3x + 2$ به‌دست می‌آید. در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی شده، بر حسب متر است.

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین یا محور xها درچه نقاطی است؟ کدام یک از وزنه‌ها مسافت افقی بیشتری را طی کرده است؟

پ) کدام یک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است؟ اندازهٔ آنها را مشخص کنید.




ب) $-\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + 2 = 0 \xrightarrow{\times 2} -x^2 + 3x + 4 = 0 \xrightarrow{\Delta = 25} x = -1, x = 4$

محل برخورد وزنه A با زمین در نقاط ۱- و ۴ بوده یعنی ۵ متر مسافت پیموده است

$-2x^2 + 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\Delta = 25} x = -\frac{1}{2}, x = 2$

محل برخورد وزنه B با زمین در نقاط $\frac{1}{2}$- و ۲ بوده یعنی $\frac{5}{2}$ مسافت پیموده است

بنابراین پرتابگر A مسافت بیشتری پیموده است.

پ) میزان ارتفاع، همان عرض نقطه ی راس سهمی است که در این مورد هر دو عرض یکسان است پس ارتفاع یکسانی پیموده شده است.

یعنی ارتفاع پیموده شده ی آنها $\frac{25}{8}$ است.