

درس دوم: دامنه و برد توابع

فعالیت

در جدول زیر رابطه بین تعدادی چند ضلعی و مجموع زوایای داخلی آنها داده شده است. جدول را کامل کنید.

پنج ضلعی	لوزی	مربع	مثلث	چندضلعی
۵۴۰	۳۶۰	۳۶۰	۱۸۰°	مجموع زوایای داخلی (درجه)

این رابطه را به صورت زوج مرتبی نمایش دهید.

$$f = \{(540, \text{پنج ضلعی}), (360, \text{لوزی}), (360, \text{مربع}), (180, \text{مثلث})\}$$

چرا f یک تابع است؟ زیرا زوج های مرتب آن، مولفه اول یکسان ندارند.

مجموعه همه مؤلفه های اول زوج های مرتب تشکیل دهنده هر تابع را «دامنه» و مجموعه همه مؤلفه های دوم را «برد» آن تابع می نامند. در فعالیت بالا:

$$f \text{ دامنه} = \{\text{پنج ضلعی, لوزی, مربع, مثلث}\}$$

$$f \text{ برد} = \{180^\circ, 360^\circ, 540^\circ\}$$

کاردر کلاس

۱ در جدول زیر رابطه بین ضلع یک مربع و محیط آن داده شده است. جدول را کامل کنید.

طول ضلع	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲	۳	۵
محیط	۲	۴	۶	۸	۱۲	۲۰

نمایش رابطه داده شده را به صورت مجموعه زوج های مرتب بنویسید. چرا این رابطه تابع است؟ دامنه و برد این تابع را بنویسید. دامنه: $\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 5\right\}$

تابع است زیرا مولفه اول یکسان ندارد. برد: $\{2, 4, 6, 8, 12, 20\}$

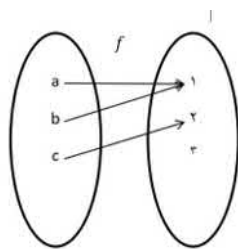
$$\{(1, 2), (3, 4), (4, 2)\}$$

۲ الف) تابعی مثال بزنید که دامنه آن سه عضو و برد آن دو عضو داشته باشد.

ب) آیا تابعی وجود دارد که دامنه آن دو عضو و برد آن سه عضو داشته باشد؟ خیر زیرا شرط تابع بودن برقرار نمی شود.

۳ اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد، می دانیم که دامنه f همان مجموعه A است. آیا همیشه برد تابع f با مجموعه B برابر

است؟ مثال بزنید. خیر، همیشه برابر نیست.



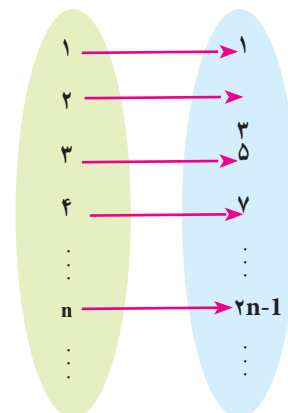
فعالیت

دنباله شکل های زیر را در نظر بگیرید :



جدول را کامل کنید.

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...	۱۰۰	...	n	...
تعداد دایره ها	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	...	۱۹۹	...	۲n-۱	...

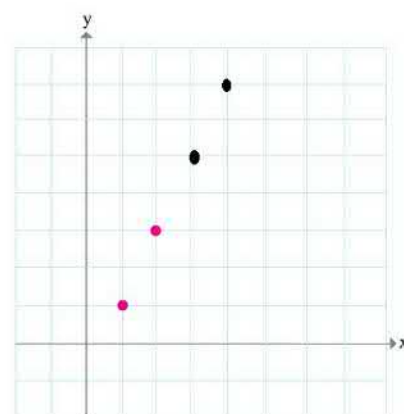


چرا این جدول یک تابع را نشان می دهد؟ نمایش زوج مرتبی این تابع : زیرا مولفه اول یکسان ندار

$$\{(1,1), (2,3), (3,5), \dots, (100,199), \dots, (n, 2n-1)\}$$

نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی این تابع را رسم کنید. دامنه: $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

دامنه و برد این تابع را بنویسید. دامنه و برد چه مجموعه هایی هستند؟ نام ببرید. برد: $\{1, 3, 5, \dots, 2n-1\}$. دامنه اعداد طبیعی و برد اعداد طبیعی فرد است.



همان گونه که از نمایش های مختلف تابع دیده می شود، عضو ۱ از دامنه به ۱ از برد و عضو ۲ از دامنه به ۳ از برد نظیر می شود. به جای این می توان با یک قرارداد کار را ساده تر کرد. معمولاً می نویسند $f(1)=1$ و $f(2)=3$ و گفته می شود که مقدار تابع f در نقطه ۱ برابر ۱ است و مقدار تابع f در نقطه ۲ برابر ۳ است. به همین ترتیب می توان نوشت :

$$f(3)=5, f(4)=7, \dots, f(n)=2n-1, \dots$$

رابطه بین دامنه و برد تابع f را می توان به صورت یک عبارت ریاضی به شکل $f(n)=2n-1$ نوشت که در آن n یک عدد طبیعی است. این گونه نمایش تابع را نمایش جبری می نامند. برای مشخص کردن تابع f به صورت جبری باید به دامنه و برد آن هم توجه کنیم. دامنه تابع f مجموعه اعداد طبیعی است.

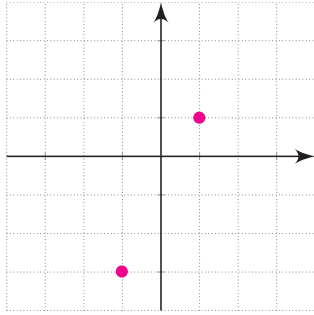
در بسیاری از موقعیت ها کار با نمایش جبری یک تابع، ساده تر و مناسب تر از کار با دیگر نمایش های تابع است.

کاردر کلاس

اگر تابعی با نمایش جبری $f(n) = n^2 + 1$ داده شده باشد و دامنه آن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد،

برد تابع f را به دست آورید.

$$\{2, 5, 10, 17\}$$



جدول را کامل کنید و از آن برای رسم نمودار خط $y = 2x - 1$ استفاده کنید.

x	۱	۲	۳	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-۲
y	۱	۳	۵	-۳	-۱	۰	-۲	-۵

آیا می‌توانید شباهت این جدول و تفاوت آن را با جدول فعالیت قبل نشان دهید؟ چرا این جدول

هم یک تابع را نشان می‌دهد؟ این تابع را g بنامید. شباهت: رابطه بین اعضای دامنه و برد است. تفاوت: دامنه قبلی اعداد طبیعی است و دامنه این تابع اعداد حقیقی تابع است زیرا دارای مولفه اول یکسان نیست.

نمودار این تابع و تابع داده شده در فعالیت قبل چه تفاوتی با هم دارند؟ این نمودار، نمودار یک خط است. نمودار قبلی نقطه ای بود.

دامنه و برد این تابع را به دست آورید و با دامنه و برد تابع $f(n) = 2n - 1$ که در آن $n \in \mathbb{N}$ مقایسه کنید.

جاهای خالی را کامل کنید.

$$g(-\frac{1}{5}) = -\frac{7}{5} \quad g(0) = -1 \quad g(\frac{2}{3}) = -\frac{3}{3} \quad g(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} - 1 \quad g(10) = 19$$

نمایش جبری تابع داده شده در این «کار در کلاس» را بنویسید. $g(x) = \dots 2x - 1 \dots$

در اینجا x یک عدد حقیقی... است.

$$D_g = \mathbb{R}, R_g = \mathbb{R}$$

$$D_f = \mathbb{N}, R_f = \{2n - 1 | n \in \mathbb{N}\}$$

هر تابع که بتوان آن را به شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

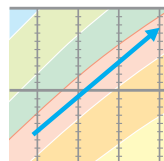
شاید بیشتر شما نمودارهای وزن یا قد یک کودک را از بدو تولد تا هنگام ورود به مدرسه دیده باشید. شکل زیر نمودار تغییرات وزن یک کودک طبیعی را از هنگام تولد تا یک سالگی نشان می‌دهد. وزن یک کودک تابعی از زمان است.



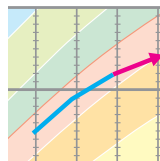
شکل ۱- نمودار تغییرات در وزن یک کودک طبیعی

۱- برای سادگی یک نمونه از نمودارهای واقعی ارائه شده است.

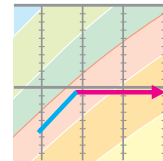
هنگامی که پزشکان می‌خواهند درباره رشد یک کودک اظهارنظر کنند، نمودار وزن او را با نمودار شکل (۱) مقایسه می‌کنند. در مقایسه نمودار وزن هر کودک با نمودار شکل (۱)، چهار وضعیت متفاوت ممکن است رخ دهد که در شکل (۲) نشان داده شده‌اند.



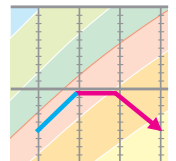
الف) رشد مطلوب



ب) کندی رشد



پ) توقف رشد



ت) افت رشد

شکل ۲

فعالیت

جدول زیر نشان دهنده وزن یک کودک است که آن را پزشک (یا مرکز بهداشتی) در پایان هر ماه طی یک سال، ثبت کرده است. این جدول یک تابع را نشان می‌دهد.

زمان (ماه)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
وزن (کیلوگرم)	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{2}$	۵	۵	۵	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{2}$	۸	$\frac{8}{5}$

الف) به نظر شما در فاصله زمانی تولد تا سه ماهگی، رشد کودک با کدام یک از چهار وضعیت نشان داده شده در شکل (۲) مطابقت دارد؟ رشد مطلوب

ب) در چه فاصله زمانی ای وزن او ثابت مانده است؟ ۳ تا ۵ ماهگی

پ) اعداد داده شده در جدول را روی شکل (۱) مشخص کنید. نقاط به دست آمده را به یکدیگر وصل کنید تا نمودار جدیدی به دست آید. با مقایسه این نمودار با نمودار اصلی، رشد کودک از نظر وزن را در طی یک سال بررسی کنید.

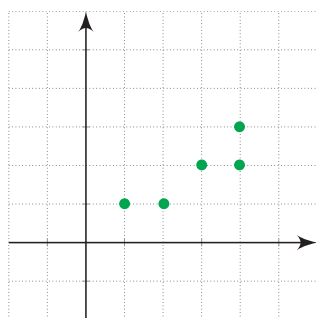
وزن کودک در فاصله بین ماه‌ها اندازه‌گیری نشده بود؛ ولی به کمک نموداری که رسم کرده‌اید، می‌توانید وزن او را در فاصله بین ماه‌ها نیز به صورت تقریبی تعیین کنید.

ت) دامنه و برد این تابع را به دست آورید و نمودار پیکانی آن را نیز رسم کنید.

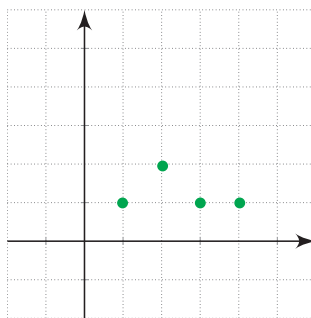
$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \quad R = \{2/8, 3/3, 4/2, 5/4, 6/5, 7/5, 8/6, 9/7, 10/8, 11/8, 12/5\}$$

کار در کلاس

کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟ توضیح دهید.



تابع نیست



تابع است

می‌توانید نمایش زوج مرتبی نمودارهای بالا را بنویسید و به کمک آن تابع بودن یا تابع نبودن آنها را معلوم کنید. دامنه و برد هر کدام را که تابع است، مشخص کنید.

با تکمیل جمله زیر معیاری برای تشخیص تابع بودن یک رابطه که به صورت نمودار ارائه می‌شود، به دست آورید.

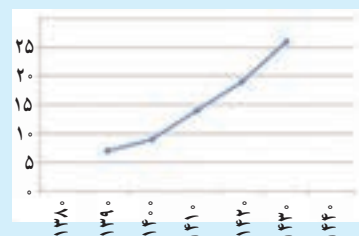
$$D = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R = \{1, 2\}$$

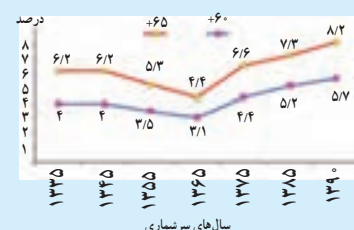
اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها، نمودار را حداکثر در ... یک نقطه ... قطع کند.

از سال ۱۹۹۹، کمیسیون جمعیت و توسعه سازمان ملل شصت سالگی را به عنوان آستانه سالمندی در نظر گرفته است که هر روز افراد بیشتری در جهان به آن می‌رسند. منظور از سالمندی جمعیت، افزایش نسبت تعداد افراد ۶۰ ساله و بالاتر به ازای هر ۱۰۰ نفر جمعیت زیر ۱۵ سال است. طبق آمارهای سازمان ملل در سال ۲۰۱۲، در صورت تثبیت وضعیت حاضر، کشور ایران در سال ۲۰۵۰ میلادی (۱۴۳۰ شمسی) جزء پیرترین کشورها خواهد بود و حدود ۳۰٪ جمعیت را افراد مسن تشکیل خواهند داد. این در حالی است که در زمان انتشار این آمار (۲۰۱۲)، کشور ما با نسبت سالمندی ۸٪ جزء جوان‌ترین کشورها بوده است. نتایج پیش‌بینی‌های اخیر سازمان ملل در سال ۲۰۱۰ در مورد تحولات حجم جمعیت ایران تا ۱۰۰ سال آینده نشان می‌دهد که با ادامه روند کنونی سال ۱۴۸۰ جمعیت به حدود ۳۱ میلیون نفر با شاخص سالخوردگی ۴۷/۴ درصد کاهش خواهد یافت.

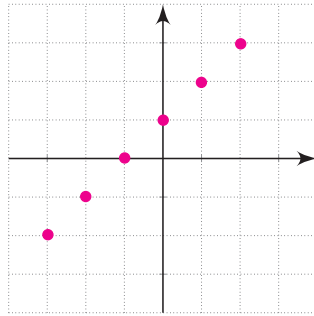
نمودار پیش‌بینی گروه سنی ۶۰ سال و بالاتر



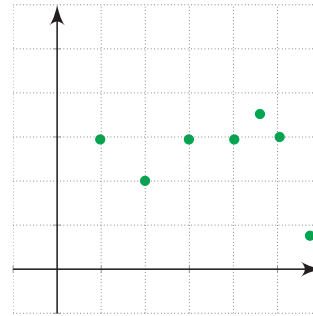
نسبت جمعیت سالمند ایران در طی سال‌های سرشماری



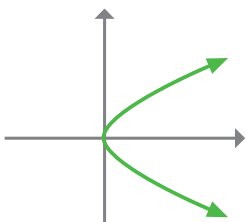
کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟



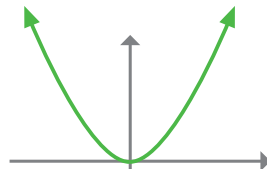
تابع است



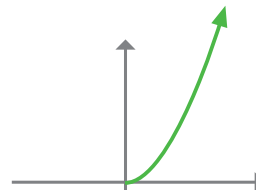
تابع است



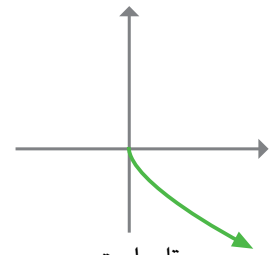
تابع نیست



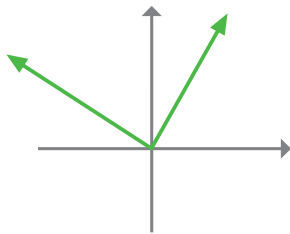
تابع است



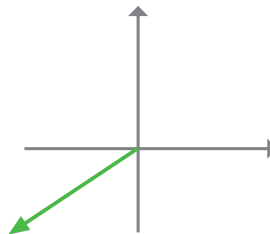
تابع است



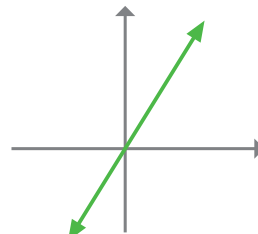
تابع است



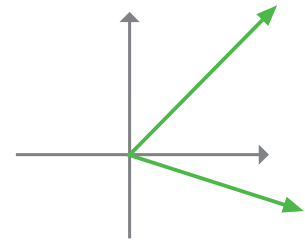
تابع است



تابع است



تابع است

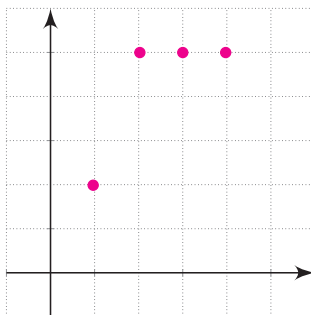


تابع نیست

تمرین

۱ کدام یک تابع است؟

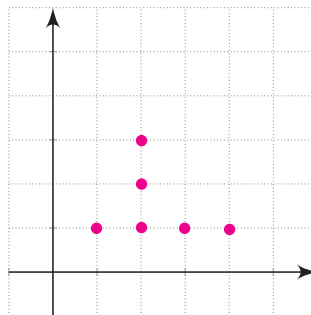
دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید.



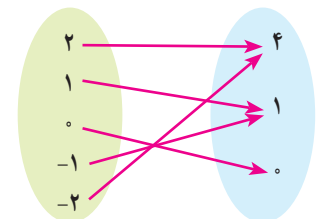
تابع است

$$D = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R = \{2, 5\}$$



تابع نیست



تابع است

$$D = \{1, 2, 0, -2, -1\}$$

$$R = \{4, 1, 0\}$$

۲ تابعی مثال بزنید که :

(الف) دامنه آن تنها شامل دو عضو باشد. $\{(2,1), (3,4)\}$

(ب) برد آن تنها از یک عضو تشکیل شده باشد. $\{(1,1), (2,1)\}$

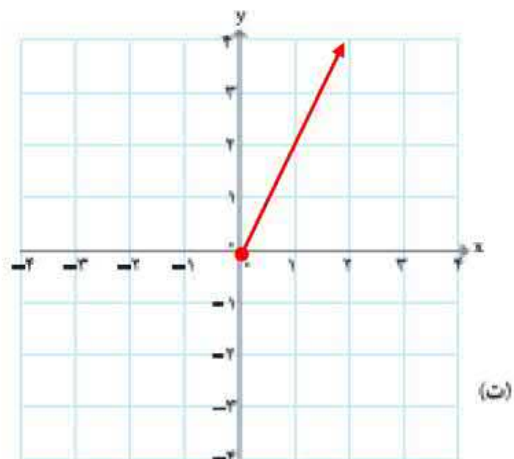
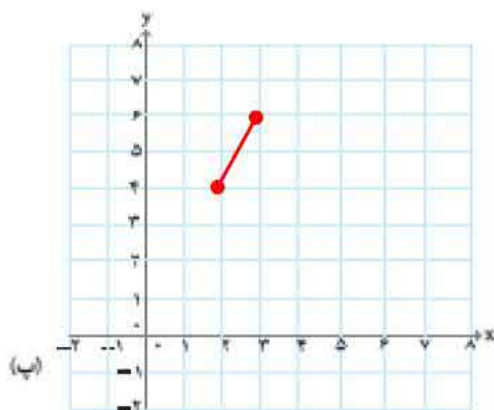
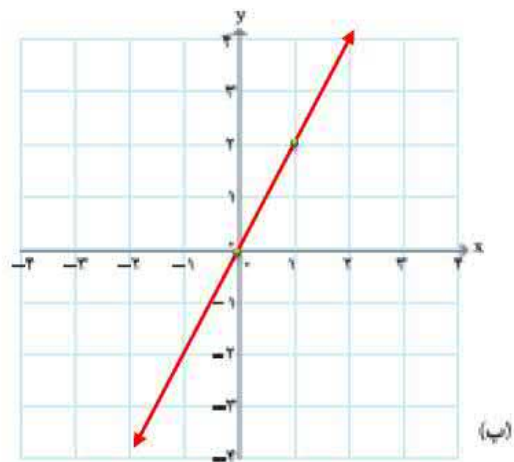
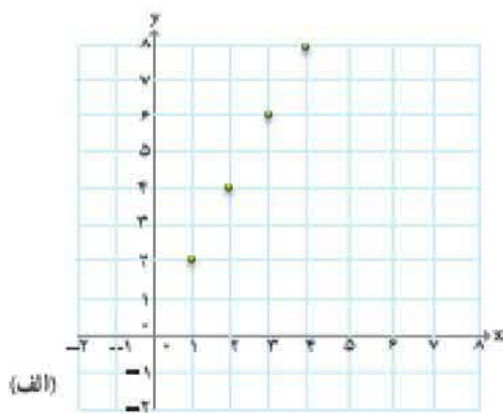
(پ) دامنه آن تنها یک عضو داشته باشد. $\{(5,1)\}$

(ت) دامنه آن نامتناهی باشد، ولی برد آن تنها یک عضو داشته باشد. $\{(1,1), (2,1), (3,1), \dots\}$

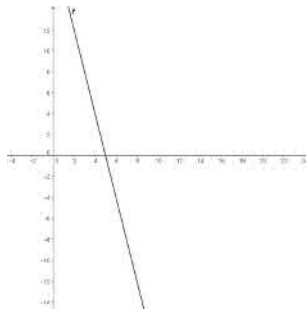
(ث) دامنه و برد آن نامتناهی باشند. $\{(1,1), (2,2), (3,3), \dots\}$

۳ جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی را که در جدول، توصیف شده‌اند، رسم کنید.

	(الف)	(ب)	(پ)	(ت)
تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = 2x$	$h(x) = 2x$	$y = 2x$
دامنه	$\{1, 2, 3, 4\}$	مجموعه اعداد حقیقی	$[2, 3]$	مجموعه اعداد حقیقی نامنفی
برد	$\{2, 4, 6, 8\}$	مجموعه اعداد حقیقی	$[4, 6]$	مجموعه اعداد حقیقی نامنفی



۴ یک شمع ۲۰ سانتی متر ارتفاع دارد و در هر ساعت ۴ سانتی متر آن می سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟ جدولی تنظیم کنید و در ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.



x (زمان)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (ارتفاع شمع)	۲۰	۱۶	۱۲	۸	۴	۰

نمودار این تابع را رسم کنید.

چرا این تابع، یک تابع خطی است؟ زیرا نمودار آن، خط راست است.

۵ آیا خط $x = 2$ را می توان به عنوان یک تابع در نظر گرفت؟ چرا؟ خط $y = 5$ را چطور؟ در حالت کلی چه موقع یک خط را می توان

یک تابع نیز در نظر گرفت؟ بله زیرا خط موازی محور عرض هاست و خط موازی این محور این خط را در بیش از یک نقطه قطع می کند. یک خط اگر موازی محور عرض ها نباشد تابع است.

۶ نمایش جبری سه تابع خطی را بنویسید که دامنه آن بازه $[-3, 5]$ باشد. چه تعداد از این گونه توابع وجود دارند؟ هرتعداد که بخواهیم.

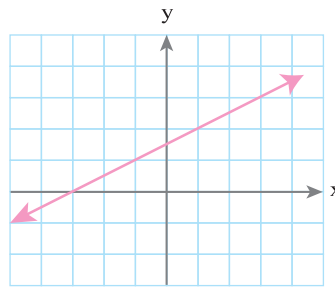
$$f(x) = 2x + 4, D_f = [-3, 5]$$

$$g(x) = x - 3, D_g = [-3, 5]$$

$$h(x) = -3x + 2, D_h = [-3, 5]$$

۷ نمایش جبری تابع زیر را که نمودار آن ارائه شده است، به دست آورید.

از بین نمایش های مختلفی که برای این تابع می دانید، کدام یک مناسب تر است؟ نمایش جبری



$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

۸ جدول زیر دمای سنگ ها در عمق های متفاوت زیر سطح زمین را نشان می دهد.

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به دست می دهد. نمودار آن را رسم کنید. زیرا اعداد سطر اول تکراری نیستند.

ب) معادله ای برای این تابع به دست آورید. $f(x) = 35x + 20$

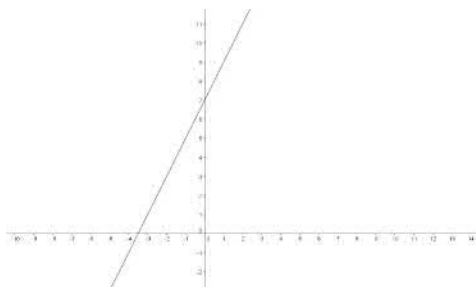
پ) دمای یک سنگ را که در عمق ۱۰ کیلومتری زیر زمین است، بیابید. $f(10) = 35 \times 10 + 20 = 370$

۹ الف) تابع $f(x) = -3$ را رسم کنید و مقادیر $f(2)$ و $f(100)$ و $f(-5)$ و $f(\sqrt{5})$ و $f(\frac{3}{4})$ را به دست آورید.

چون تابع ثابت است، تمام مقادیر برابر ۳- است.

ب) اگر دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار تابع را رسم کنید. همان شکل فوق

پ) نمودار این تابع را وقتی که دامنه آن بازه $[-2, 5]$ باشد، نیز رسم کنید.



۱۰ برای یک تابع خطی می‌دانیم که: $f(2) = 11$ و $f(0) = 7$. نمودار این تابع را رسم کنید

۱۱ آیا جدول زیر یک تابع را نشان می‌دهد؟ چرا؟ زیرا اعداد سطر اول تکراری نیستند.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۹	۱۵	۲۵	۳۶

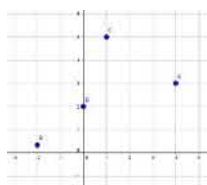
۱۲ علی در هر دقیقه پیاده‌روی، مسافت $\frac{1}{2}$ کیلومتر را طی می‌کند. اگر مسافتی را که علی در t دقیقه طی می‌کند، با $f(t)$ نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به دست می‌دهد؟ قسمت ب

الف) $f(t) = t - \frac{1}{2}$

ب) $f(t) = \frac{1}{2}t$

پ) $f(t) = t + \frac{1}{2}$

ت) $f(t) = \frac{1}{2} - t$



۱۳ اگر درباره تابع g داشته باشیم: $g(4) = 3$, $g(-2) = \frac{1}{3}$, $g(1) = 5$, $g(0) = 2$; g را به صورت مجموعه‌ای از زوج بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

$$\left\{ (4, 3), \left(-2, \frac{1}{3}\right), (1, 5), (0, 2) \right\}$$

۱۴ برای اندازه‌گیری دما از واحدهای «سانتی گراد C» و «فارنهایت F» استفاده می‌شود که با رابطه $F = \frac{9}{5}C + 32$ به یکدیگر وابسته‌اند.

الف) 20° درجه سانتی گراد، چند درجه فارنهایت است؟ -4° درجه

ب) 104° درجه فارنهایت چند سانتی گراد است؟ 40° سانتی گراد

پ) معادله‌ای بنویسید که سانتی گراد را برحسب فارنهایت به دست دهد.

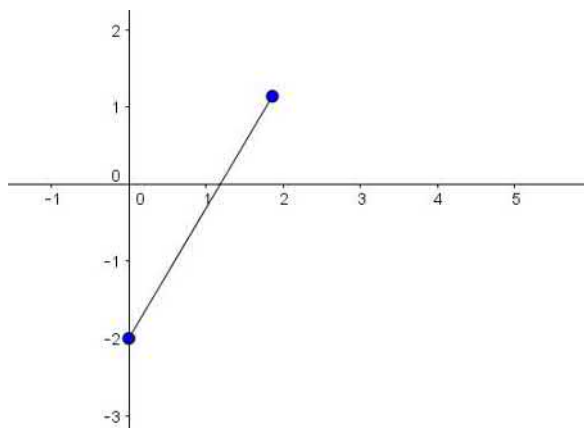
ت) آیا رابطه بین این دو واحد، یک تابع خطی را معلوم می‌کند؟ بله، یک تابع خطی است.

۱۵ طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که محیط این مستطیل را برحسب تابعی از عرض آن بیان کند.

$$P = 2(x + y) = 2(x + 3 + x) = 2(2x + 3) = 4x + 6$$

۱۶ دو تابع مثال بزنید که دامنه و برد آنها یکی باشد، ولی هیچ دو زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

۱۷ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $[0, 2]$ و برد آن $[-2, 1]$ باشد. چه تعداد از این گونه توابع می‌توان رسم کرد؟ هر تعداد که بخواهیم.



حل ۱۷:

$$f = \left\{ (2, 1), (3, 4) \right\}$$

$$g = \left\{ (3, 1), (2, 4) \right\}$$

حل ۱۶: