

درس سوم: انواع توابع

انواع متفاوتی از توابع وجود دارند. در این درس با برخی از آنها آشنا می‌شویم.

فعالیت

۱ جدول‌های زیر را کامل کنید.

طول ضلع مربع	۰/۱	$\frac{1}{2}$	۱	۳	۴	۲/۵	۱۰	۱۲	x
مساحت آن	۰/۰۱	۰/۲۵	۱	۹	۱۶	۶/۲۵	۱۰۰	۱۴۴	x^2

شعاع دایره	$\frac{1}{2}$	۲	۳	۵	۱۰	r
مساحت آن	$\frac{\pi}{4}$	4π	9π	25π	100π	$r^2\pi$

اگر x طول ضلع یک مربع باشد، مساحت آن تابعی از x است و به صورت $f(x) = x^2\pi$ قابل نمایش است.

اگر r شعاع یک دایره باشد، مساحت دایره تابعی از r است و به صورت $g(r) = r^2\pi$ قابل نمایش است. چون f و g به صورت یک چند جمله‌ای درجه دوم به ترتیب از x و r بیان شده‌اند، آنها را توابع درجه دوم می‌نامیم. حجم یک کره را برحسب یک تابع درجه سوم از r (شعاع کره) بنویسید:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

توابعی را که نمایش جبری آنها، چند جمله‌ای‌های جبری از یک متغیر هستند، توابع چند جمله‌ای می‌نامیم.

توابع زیر همگی توابع چند جمله‌ای‌اند:

$$f(x) = 2x^2 + 5x + 1$$

$$g(x) = 4x^2 - 3$$

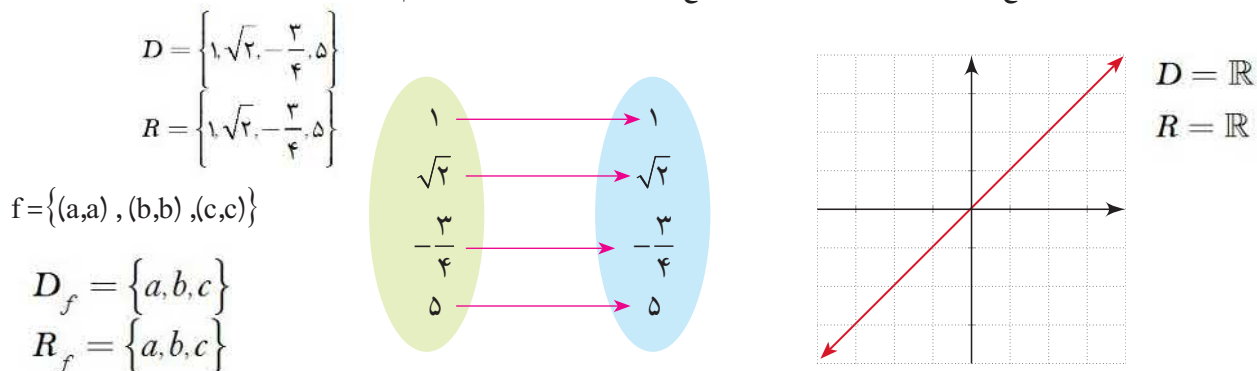
$$h(a) = a^2 + 2a^2 - 4a - 9$$

$$r(t) = -\frac{3}{5}t^4 + t + \sqrt{2}$$

تابع f را به صورت $y = 2x^2 + 5x + 1$ نیز نمایش می‌دهند. بقیه توابع را نیز به این صورت نمایش دهید.

شباهت : هر عدد دامنه به همان عدد نسبت داده می شود.

۲ دامنه و برد توابع زیر را به دست آورید. این سه تابع چه شباهت و چه تفاوتی با هم دارند؟ تفاوت: دامنه ها و در نتیجه بردها متفاوت هستند.



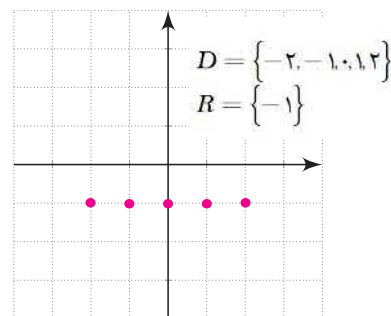
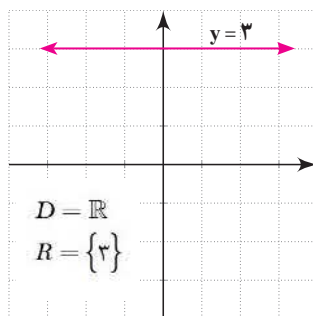
اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می نامند. اگر دامنه تابع همانی را $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم، نمودار آن همان خط $y = x$ است که با معادله $f(x) = x$ هم نمایش داده می شود.

۳ سه تابع زیر را با هم مقایسه کنید و دامنه و برد آنها را بنویسید. این سه تابع در چه ویژگی ای مشترک اند؟ در هر سه تابع، اعضای دامنه به یک عدد ثابت نسبت داده می شود.

ساعت	۸	۹	۱۰
دمای هوا	۱۹	۱۹	۱۹

$$D = \{8, 9, 10\}$$

$$R = \{19\}$$



تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادله $f(x) = k$ نمایش می دهیم.

کار در کلاس

$$y = 2x^3 - 3x^2 + x - 4$$

$$\{(\alpha, \alpha), (\beta, \beta), (2, 2), (5, 5)\}$$

$$\{(1, 3), (3, 1)\}$$

$$\{(4, 1), (3, 1), (-2, 1), (2, 1), (5, 1)\}$$

۱ برای هر مورد مثالی به دلخواه ارائه کنید.

مثالی از یک تابع چند جمله ای ارائه کنید.

یک تابع همانی مثال بزنید که دامنه آن $\{\alpha, \beta, 2, 5\}$ باشد.

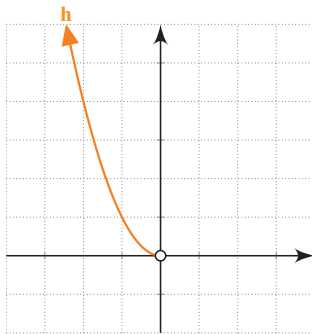
یک تابع مثال بزنید که دامنه و برد آن برابر باشند؛ ولی تابع همانی نباشد.

مثالی از یک تابع ثابت ارائه کنید که دامنه آن ۵ عضوی باشد.

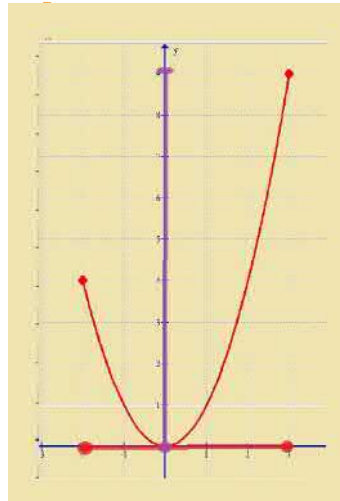
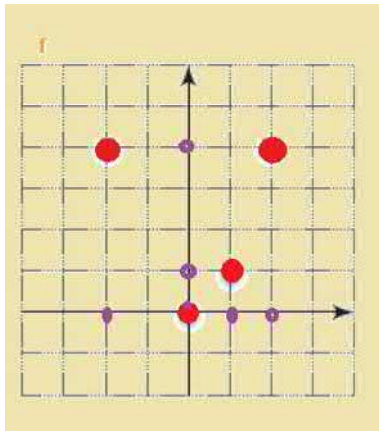
مثالی از تابع ثابت در دنیای واقعی ارائه کنید.

تابعی که دامنه اش افراد یک کلاس درس پایه دهم باشند و بردش دبیر ریاضی آن کلاس باشد.

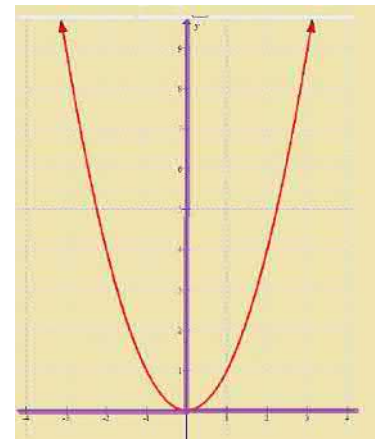
۲ نمودارهای توابع داده شده را رسم و با یکدیگر مقایسه کنید. نمودار تابع h رسم شده است. جدول را کامل کنید.



تابع	$f(x)=x^2$	$g(x)=x^2$	$h(x)=x^2$	$t(x)=x^2$
دامنه	$\{-2, 0, 1, 2\}$	$[-2, 3]$	مجموعه اعداد حقیقی منفی	مجموعه اعداد حقیقی
برد	$R = \{4, 0, 1\}$	$[0, 9]$	$(0, +\infty)$	$[0, +\infty)$



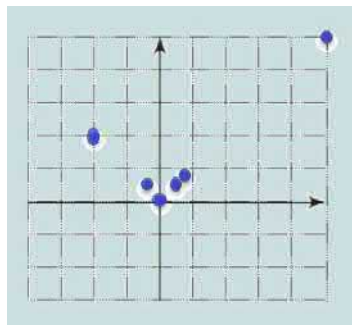
دامنه و برد را روی شکل نیز نشان دهید.



تذکر: اگر نمایش جبری تابعی داده شده باشد؛ ولی دامنه آن مشخص نشده باشد، معمولاً بزرگ‌ترین مجموعه ممکن را دامنه در نظر می‌گیریم. مثلاً دامنه تابع $f(x) = x^2$ را مجموعه اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم. در غیر این صورت باید دامنه را به طور دقیق مشخص کنیم.

شعاعیت

جدول زیر تابعی را نشان می‌دهد که اعداد داده شده را به قدر مطلق آن نظیر می‌کند. جاهای خالی را پر و نمودار تابع را رسم کنید. دامنه و برد این تابع را معلوم کنید. دامنه این تابع اعداد سطر اول و برد آن اعداد سطر دوم جدول زیر می‌باشند.



x	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	5
$f(x)$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	5

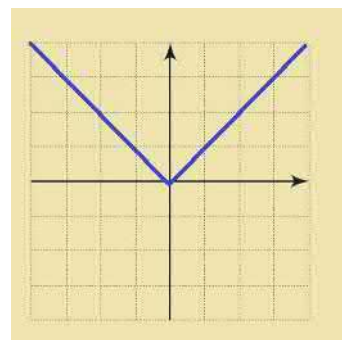
تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدر مطلق نامیده می‌شود. تابع قدر مطلق را با $f(x) = |x|$ یا $y = |x|$ نمایش می‌دهند.

اگر دامنه یک تابع قدرمطلق مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار آن را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

تابع قدرمطلق را به صورت نیز نمایش می دهند.

با توجه به اینکه برای $x \geq 0$ و $x < 0$ تابع دارای معادله های مختلفی است، این تابع یک تابع چند ضابطه ای (قطعه ای) نامیده می شود.

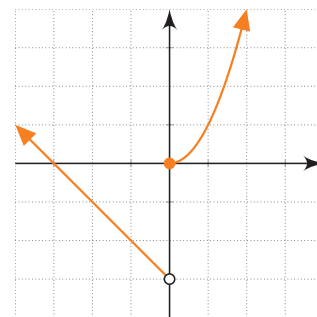


مثال

تابع مقابل نیز یک تابع قطعه ای است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x-3 & x < 0 \end{cases}$$

نمودار این تابع برای اعداد مثبت همان نمودار سهمی $y = x^2$ است و برای اعداد منفی نمودار تابع با نمودار خط $y = -x - 3$ برابر است. نمودار $f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است.

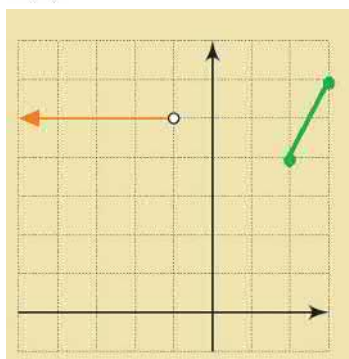


فعالیت

توابع f , g , h و نیز قسمتی از نمودارهای آنها داده شده اند. نمودارها را کامل و مشخص کنید هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ دامنه و برد هر تابع را نیز مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

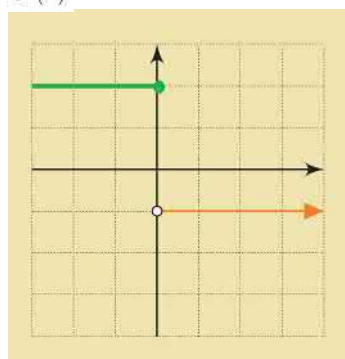
$h(x)$



$$D_h = (-\infty, 0) \cup [2, 3] \\ R_h = [2, 3]$$

$$g(x) = \begin{cases} x-4 & x > 1 \\ \frac{5}{2} & x = 1 \\ -x & -4 \leq x < 1 \end{cases}$$

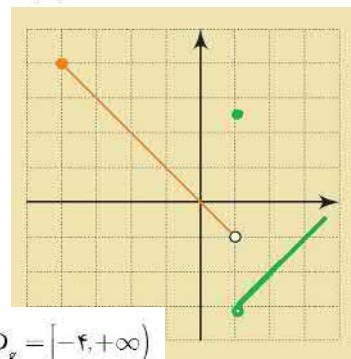
$f(x)$



$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ R_f = \{-1, 2\}$$

$$h(x) = \begin{cases} 2x & 2 \leq x \leq 3 \\ 5 & x < -1 \end{cases}$$

$g(x)$



$$D_g = [-4, +\infty) \\ R_g = [-2, +\infty)$$

مقادیر $f(3)$, $g(-2)$, $f(-\frac{1}{5})$, $h(\sqrt{5})$ و $g(0)$ را بیابید.

$$f(3) = -1 \quad g(-2) = 2 \quad f\left(-\frac{1}{5}\right) = 2$$

$$h(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \quad g(0) = 0$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \mathbb{R}$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$R_g = (-1, +\infty)$$

۱ نمودار تابع‌های زیر را رسم و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 3x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

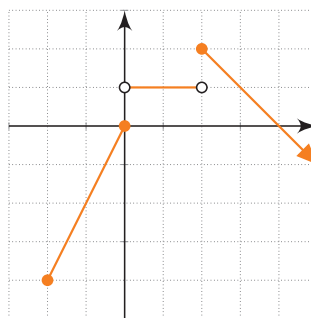
$$g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & x > 2 \\ 1 & -3 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x & x \leq -3 \end{cases}$$

مقادیر $f(0)$, $f(5)$, $g(2)$, $g(-\frac{1}{5})$ و $f(-2)$ را به دست آورید.

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 & g(0) &= 1 & g(-\frac{1}{5}) &= 1 \\ f(5) &= 25 & g(2) &= 1 & f(-2) &= -5 \end{aligned}$$

۲ نمودار تابع قطعه‌ای f داده شده است. ضابطه آن را به دست آورید. دامنه و برد این تابع را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \\ -x + 4 & 2 \leq x \end{cases}$$



$$D_f = [-2, +\infty)$$

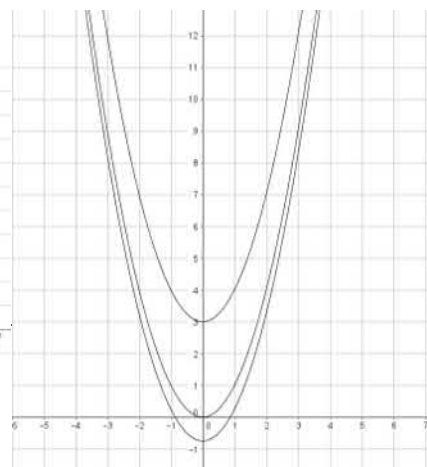
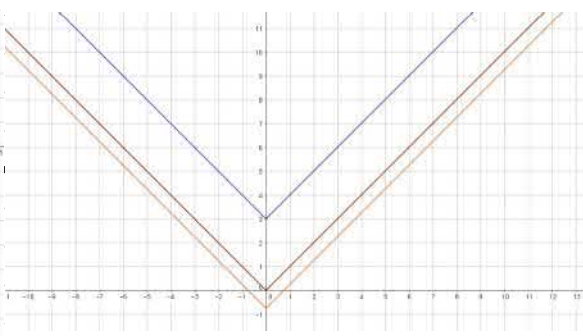
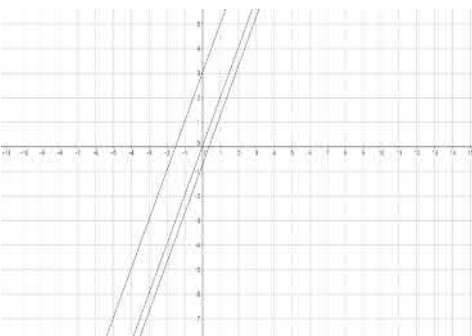
$$R_f = [-4, 2]$$

رسم برخی توابع به کمک انتقال

شعاعیت

نمودارهای توابع $f(x) = 2x$ و $g(x) = |x|$ و $h(x) = x^2$ و توابع $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = |x| + 3$ و $h(x) = x^2 + 3$ داده شده‌اند. توضیح دهید

که سه تابع آخر چگونه به کمک سه تابع اول رسم شده‌اند. سپس توابع $f(x) = 2x - \frac{3}{4}$ و $g(x) = |x| - \frac{3}{4}$ و $h(x) = x^2 - \frac{3}{4}$ را به همین روش رسم کنید. سه واحد در راستای محور عرض‌ها در جهت مثبت انتقال داده شده‌اند.



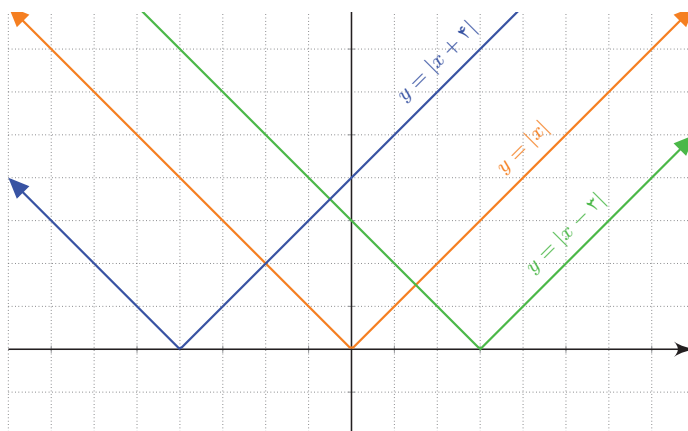
با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ ، می‌توان نمودار تابع $f(x) + k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در امتداد محور y به دست آورد. اگر $k > 0$ باشد انتقال در جهت مثبت و اگر $k < 0$ باشد انتقال در جهت منفی خواهد بود.

کار در کلاس

۱ در شکل زیر دامنه و برد تابعی را که به کمک تابع $f(x) = |x|$ رسم شده‌اند، بیابید. آیا می‌توانید توضیح دهید نمودار این توابع چگونه رسم شده‌اند؟ برای رسم نمودار تابع $|x - 3|$ ، نمودار تابع $|x|$ را به اندازه ۳ واحد در راستای محور طول‌ها در جهت راست انتقال می‌دهیم و برای رسم نمودار تابع $|x + 4|$ ، نمودار تابع $|x|$ را به اندازه ۴ واحد در راستای محور طول‌ها در جهت چپ انتقال می‌دهیم.

$$D = \mathbb{R}$$

$$R = [0, +\infty)$$

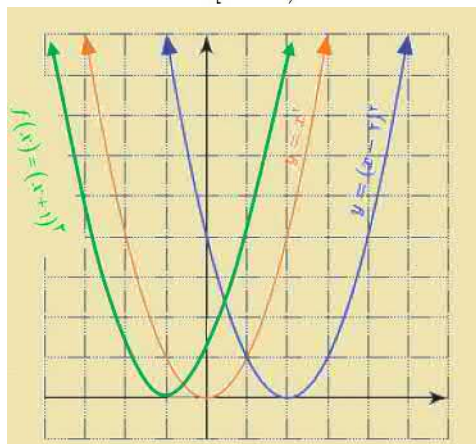


برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در امتداد محور x ‌ها انتقال دهیم. اگر $k > 0$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

۲ در شکل‌های زیر به کمک نمودار تابع $f(x) = x^2$ و $f(x) = -x^2$ نمودار توابع دیگری رسم شده‌اند. دامنه و برد آنها را بیابید. نمودار $f(x) = (x+1)^2$ را نیز رسم کنید.

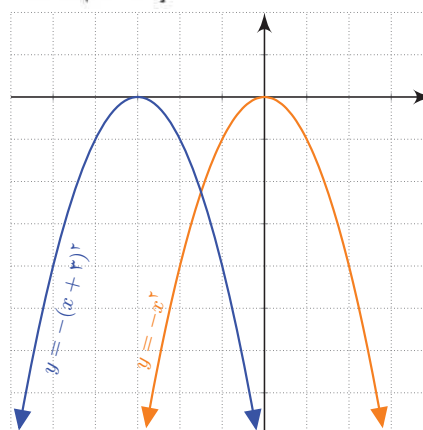
$$D = \mathbb{R}$$

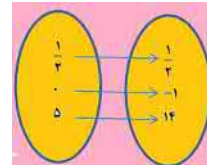
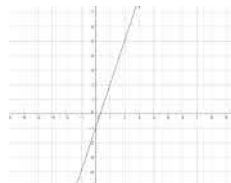
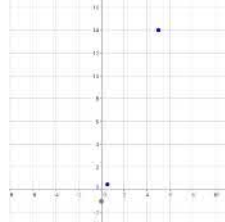
$$R = [0, +\infty)$$



$$D = \mathbb{R}$$

$$R = (-\infty, 0]$$





در شکل‌های زیر نمودار توابع درجه دوم f , g , h و t رسم شده‌اند.

$$f(x) = (x-5)^2 - 2$$

$$g(x) = (x+1)^2 - 1$$

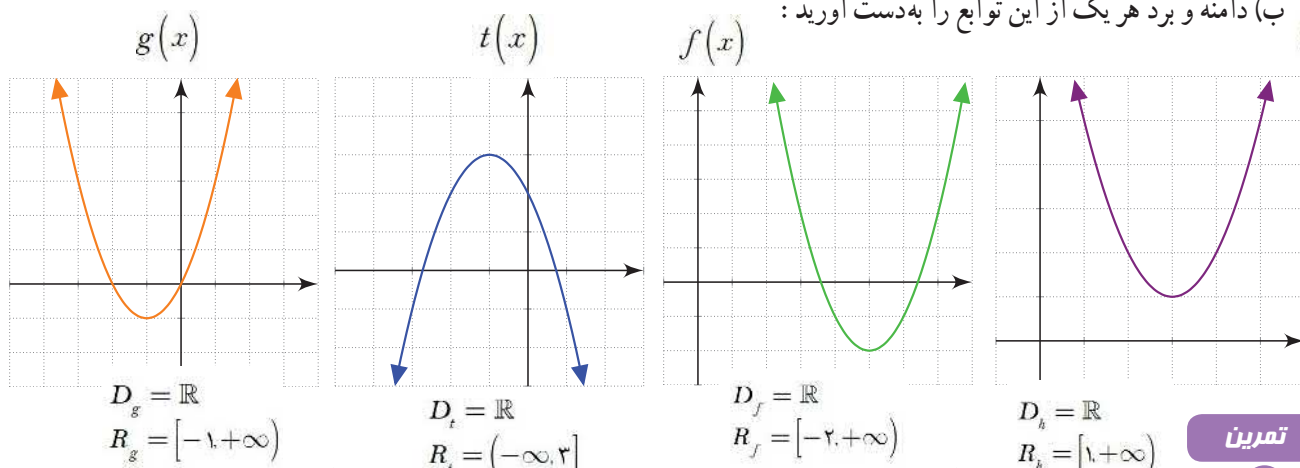
$$h(x) = (x-3)^2 + 1$$

$$t(x) = -(x+1)^2 + 3$$

الف) هر یک از نمودارها کدام تابع را نشان می‌دهند؟

ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را به دست آورید:

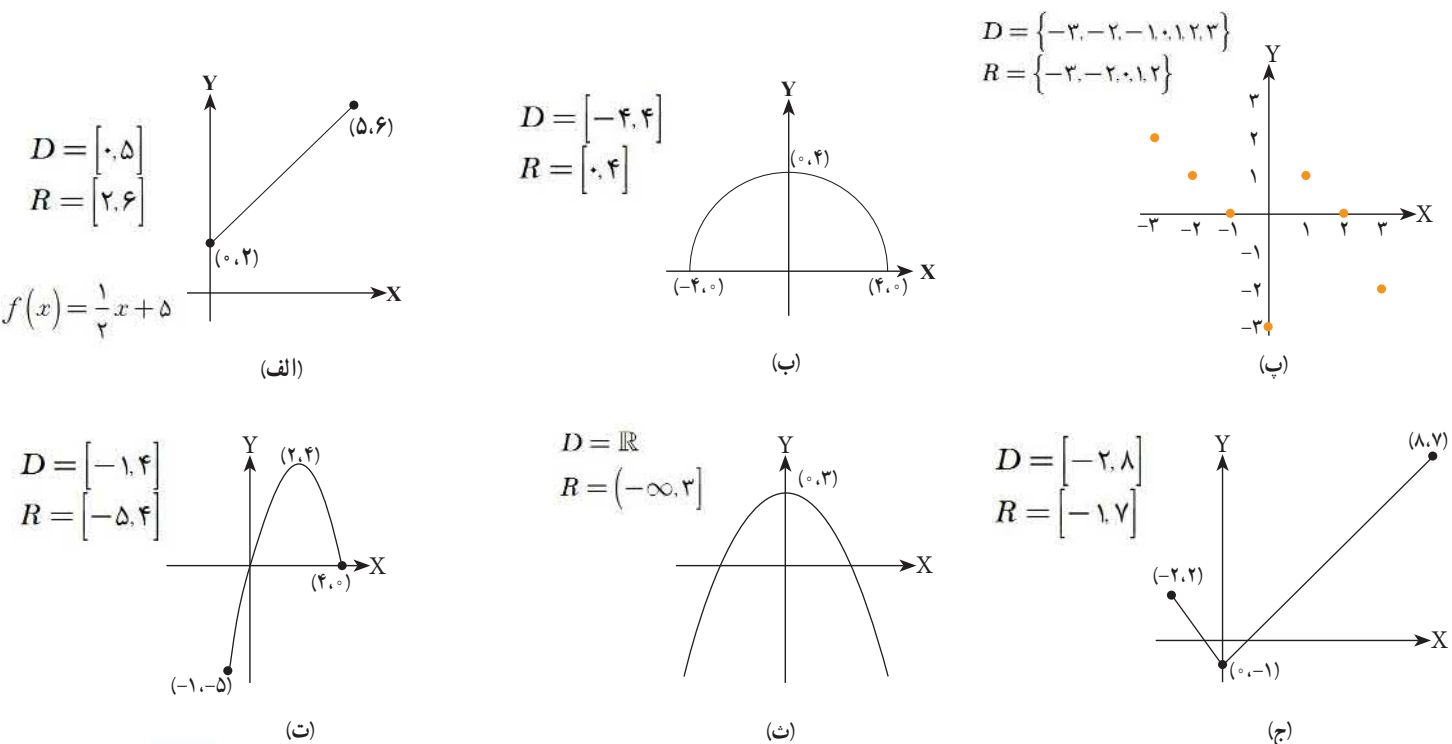
$h(x)$



تمرین

۱) تابع $1 - x - 1$ یا نه دامنه آن مجموعه $\{\frac{1}{2}, 0, 5\}$ است، رسم کنید. برد این تابع را به دست آورید و نمایش زوج مرتبی و نمودار آن را ارائه دهید. اگر دامنه این تابع $\mathbb{R}$ باشد، پاسخ‌ها چگونه خواهد بود؟ برد نیز اعداد حقیقی خواهد بود.

۲) در شکل‌های زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده‌اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری توابع (الف) و (ج) را بنویسید.



$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x - 1 & -2 \leq x \leq 0 \\ x - 1 & 0 < x \leq 8 \end{cases}$$

۳) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

- الف) دامنه تابع $f(x) = x^2 - 1$ برابر $(0, +\infty)$ و بُرد آن نیز $(0, +\infty)$ است. نادرست
 ب) دامنه تابع $f(x) = |x| - \frac{1}{3}$ همه اعداد حقیقی و بُرد آن $(2, +\infty)$ است. نادرست
 پ) دامنه تابع ثابت $f(x) = 2$ برابر $(-\infty, +\infty)$ است. درست

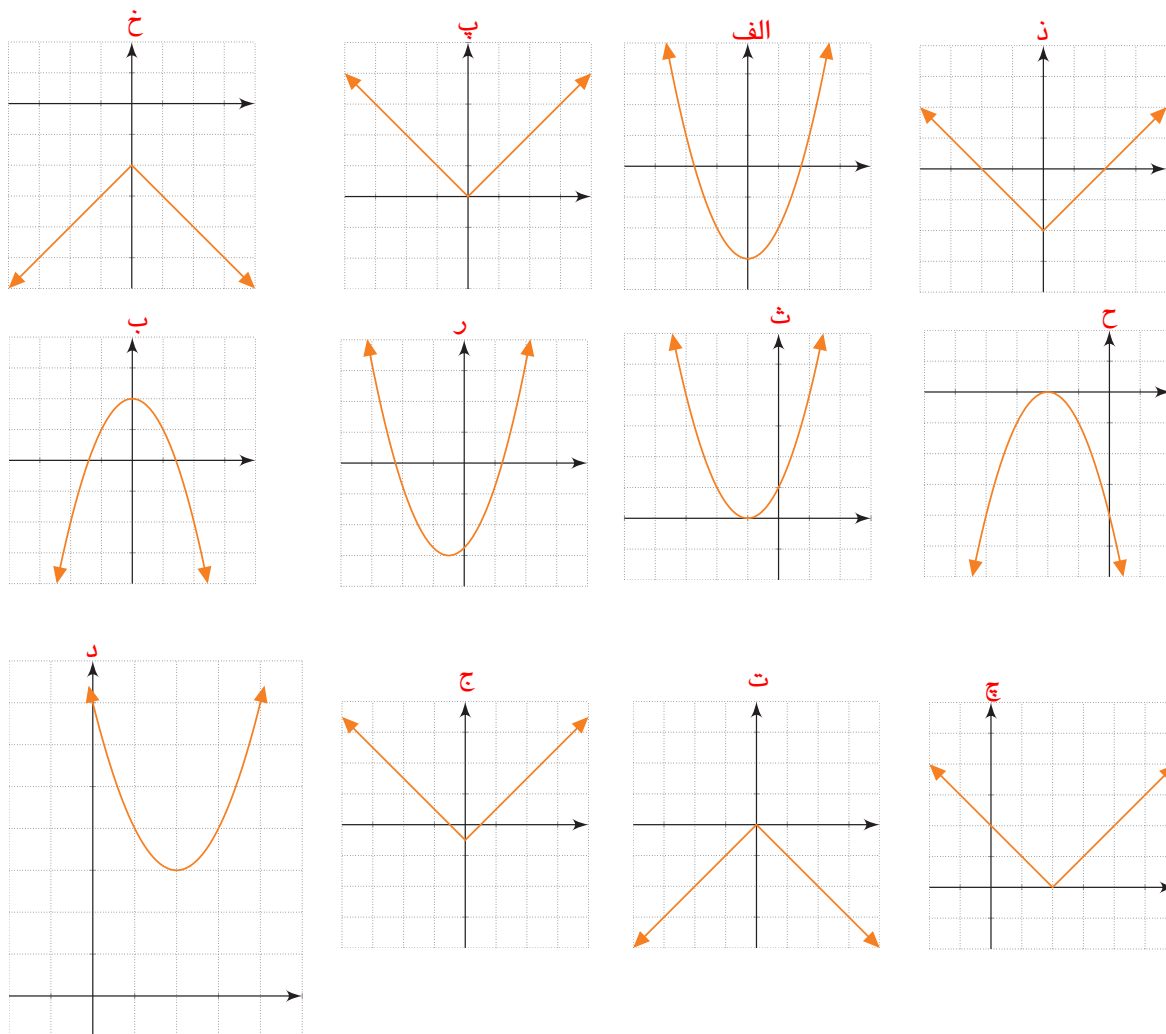
ت) اگر $f(x) = 2x + 1$ آنگاه، $f(1) = \frac{f(2)}{2}$. نادرست

۴) یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه 3° متر باشد، حجم

تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 + 3 \cdot \pi r^2$$

۵) هریک از نمودارهای زیر کدام یک از تابع‌های (الف) تا (ر) را نمایش می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟



الف) $y = x^2 - 3$

ث) $y = (x + 1)^2$

خ) $y = -|x| - 2$

ب) $y = -x^2 + 2$

ج) $y = |x| - \frac{1}{3}$

د) $y = (x - 2)^2 + 3$

پ) $y = |x|$

چ) $y = |x - 2|$

ذ) $y = |x| - 2$

ت) $y = -|x|$

ح) $y = -(x + 2)^2$

ر) $y = (x + \frac{1}{3})^2 - 3$

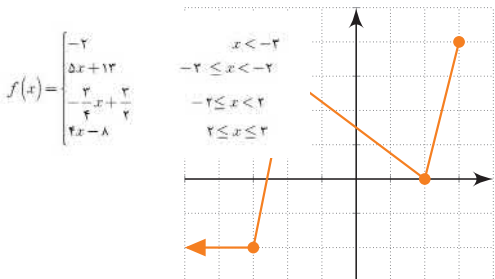
$$\begin{array}{cccccc} \left[-\frac{1}{2}, 1 \right] & \left[-\frac{1}{2}, 0 \right] & \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] & \left[-\frac{1}{2}, 1 \right] & \left[-\frac{1}{2}, 1 \right] & \left[-\frac{1}{2}, 1 \right] \\ \left[-\frac{1}{2}, 1 \right] & \left[-\frac{1}{2}, 0 \right] & \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] & \left[-\frac{1}{2}, 1 \right] & \left[-\frac{1}{2}, 1 \right] & \left[-\frac{1}{2}, 1 \right] \\ \left[-\frac{1}{2}, 1 \right] & \left[-\frac{1}{2}, 0 \right] & \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] & \left[-\frac{1}{2}, 1 \right] & \left[-\frac{1}{2}, 1 \right] & \left[-\frac{1}{2}, 1 \right] \end{array}$$

۶ فرض کنیم دامنه هریک از توابع تمرین ۵ به بازه $[-2, 3]$ محدود شده باشد. در این صورت برد هر تابع را پیدا کنید. از نمودارها کمک بگیرید.

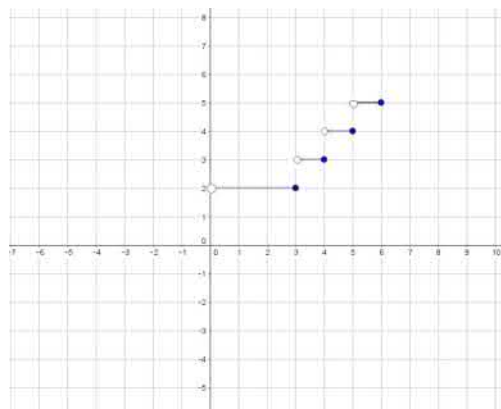
۷ نمودار تابع f داده شده است. ضابطه این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته شده را حساب کنید. تعریف نشده: $f(6)$

$$f(\sqrt{5}) = 4\sqrt{5} - 8 \quad f(3) = 4 \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{8}$$

$$f(0) = \frac{3}{2} \quad f\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$$



$$f(x) = 3 \quad f(-4) = 3 \quad f(-1) = 3$$



۸ نمودار یک تابع خطی از نقاط $(0, 3)$ و $(4, 2)$ می‌گذرد. $f(-1)$ و $f(-4)$ را به دست آورید.

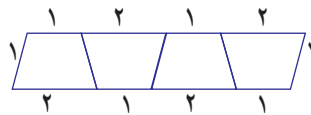
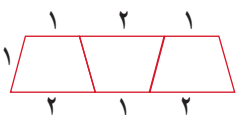
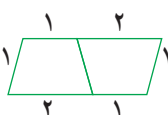
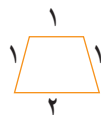
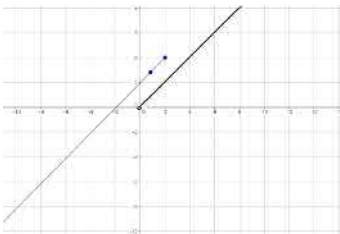
۹ هزینه مکالمه تلفنی با کشور دیگر، از زمان برقراری تماس برای ۳ دقیقه یا کمتر، ۲ هزار تومان است و پس از آن برای هر دقیقه یک هزار تومان به هزینه آن اضافه می‌شود. مثلاً برای زمان بیشتر از ۳ دقیقه تا دقیقاً ۴ دقیقه، ۳ هزار تومان دریافت می‌شود. نمودار هزینه را برحسب زمان تا پایان زمان ۶ دقیقه رسم کنید.

۱۰ کدام یک از معادله‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟ نمودار هر دو معادله را رسم کنید. $f(x)$ تابع نیست زیرا اگر خطی به موازات محور عرض‌ها رسم کنیم، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x+2 & x \leq 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$$

۱۱ الگوی زیر از تعدادی دوزنقه تشکیل شده است.



الف) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد دوزنقه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	n
محیط شکل	۵	۸	۱۱	۱۴	۱۷	$3n+2$

ب) چرا رابطه بین تعداد دوزنقه‌ها و محیط شکل، یک تابع را معلوم می‌کند؟ دامنه و برد این تابع چیست؟ نمودار آن را رسم کنید زیرا سطر اول، اعداد تکراری ندارد. دامنه اعداد سطر اول و برد اعداد سطر دوم است.

۱۲ نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(-2, 1)$ و $(2, -3)$ می‌گذرد و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

$$y = x^2 - 4x + 1$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$R = [-3, +\infty)$$

