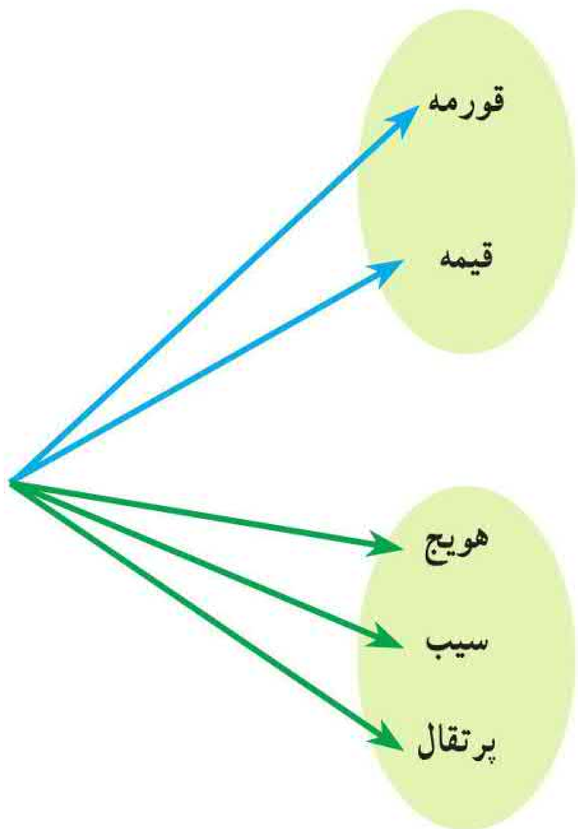
درس اول: شمارش

شاید شمارش درنظر برخی افراد، یک مهارت با اهمیت ریاضی نباشد و تنها یک عمل ساده باشد؛ امّا آیا واقعاً شمردن همیشه آسان است؟

می‌دانید که دو اتومبیل نباید پلاک یکسان داشته باشند. با پلاک‌هایی به‌صورت مقابل، با استفاده از حروف و اعداد، چند اتومبیل را می‌توان شماره گذاری کرد؟

اصل جمع و اصل ضرب

فعالیت

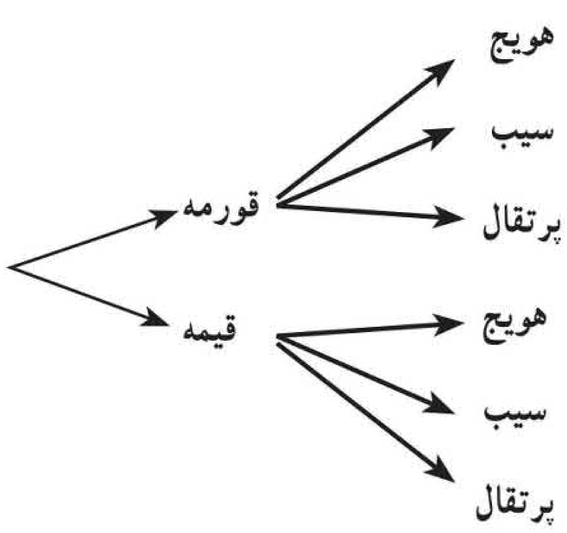


۱ امین قصد دارد به‌خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش پوریا، شیرینی بدهد. او با خود فکر می‌کند که پوریا را به یکی از دو مکان رستوران «یا» آب‌میوه‌فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود، تنها یکی از ۲ نوع غذای چلوخورشت قورمه سبزی و قیمه را می‌تواند انتخاب کند و اگر به آب‌میوه‌فروشی برود، تنها یکی از سه نوع آب‌میوهٔ هویج، سیب و پرتقال را می‌تواند انتخاب کند. چند انتخاب برای پوریا وجود دارد؟

طبق نمودار روبرو ۵ انتخاب وجود دارد

۲ هفتهٔ بعد پوریا قصد دارد به‌خاطر تولدش امین را دعوت کند. اما او می‌خواهد امین را هم به آن رستوران «و» هم به آن آب‌میوه‌فروشی ببرد و در رستوران یک انتخاب و در آب‌میوه‌فروشی هم یک انتخاب به او بدهد. امین چند نوع انتخاب خواهد داشت؟

با توجه به نمودار روبرو ۶ انتخاب خواهد داشت

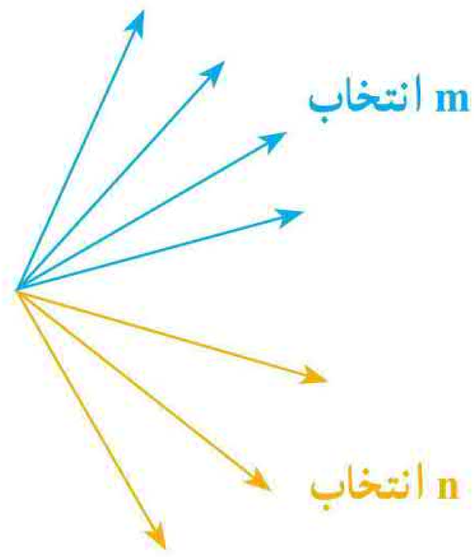


۳ چه تفاوتی در دو سؤال بالا وجود داشت که باعث شد تعداد حالت‌های موجود در دو مثال متفاوت باشد؟

در سوال اول امین فقط به یکی از دو روش کار را انجام می دهد، یا آنکه به رستوران رفته و یکی از دو غذا را انتخاب می کند و یا آنکه به آب میوه فروشی رفته و یکی از سه نوع آب میوه را انتخاب خواهد کرد. ولی در سوال دوم پوریا هر دو مکان را خواهد رفت که در اولی ۲ انتخاب و در دومی ۳ انتخاب دارد.

۴ در هر یک از دو سؤال بالا چه رابطه‌ای بین تعداد گزینه‌های فهرست‌های انتخابی رستوران و آب‌میوه‌فروشی و تعداد حالات جواب وجود دارد؟ چرا؟

در سوال اول ۵=۳+۲ حالت وجود داشت چون فقط یکی از دو مکان را انتخاب می‌کرد، ولی در سوال دوم ۶=۳×۲ حالت، چون هر دو مکان را خواهد رفت که در مقابل هر انتخاب در مکان اول، ۳ انتخاب در مکان دوم دارد.

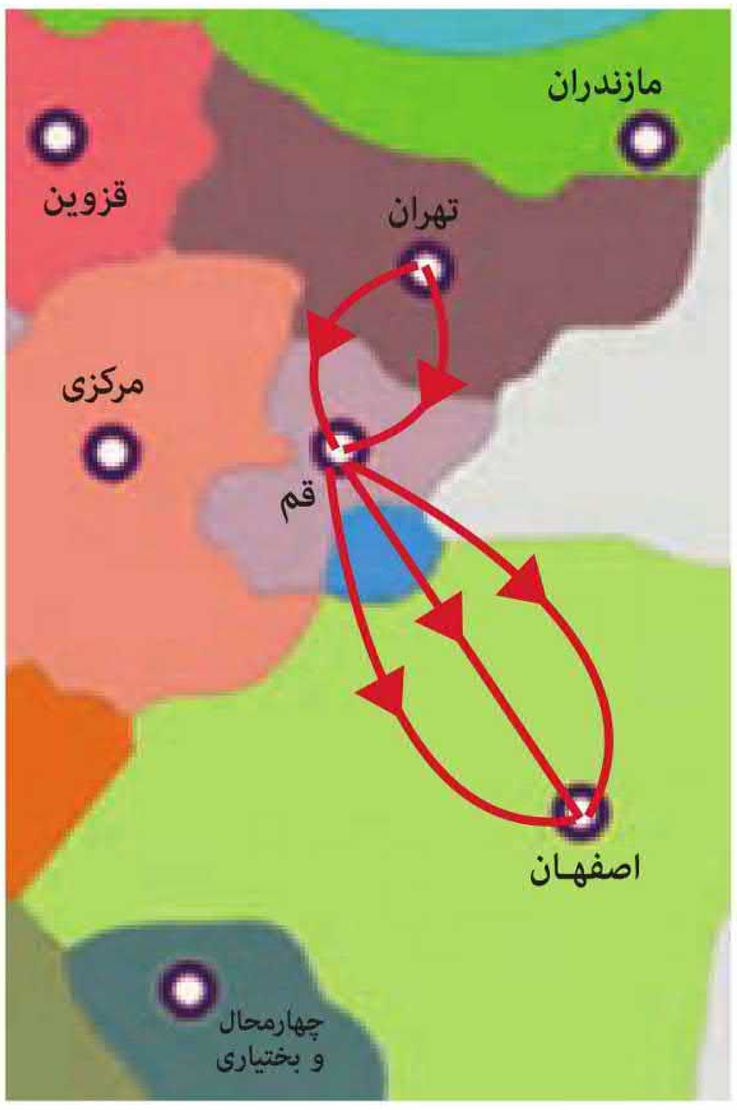


اصل جمع : اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به‌طوری‌که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر m+n روش وجود دارد.

«توجه کنید که نهایتاً قرار است کار مورد نظر فقط با یکی از شیوه‌ها انجام شود. مثلاً در قسمت اول فعالیت قبل، امین فقط یکی از کارهای «دعوت به رستوران یا دعوت به آب‌میوه‌فروشی» را انجام می‌دهد».

تعمیم اصل جمع : اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد، به‌طوری‌که در روش اول m_1 انتخاب، در روش دوم m_2 انتخاب، ... و در روش kام m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ روش وجود دارد.

اصل ضرب : اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحلهٔ اول m انتخاب و برای هر کدام از این m روش، مرحلهٔ دوم را بتوان به n روش انجام داد، در کل کار موردنظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.



«توجه کنید که هر دو مرحله باید انجام پذیرد. مثلاً در مثال ۲ هم دعوت به رستوران که مرحلهٔ اول است انجام می‌گیرد و هم دعوت به آب‌میوه‌فروشی که مرحلهٔ دوم است، صورت می‌پذیرد».

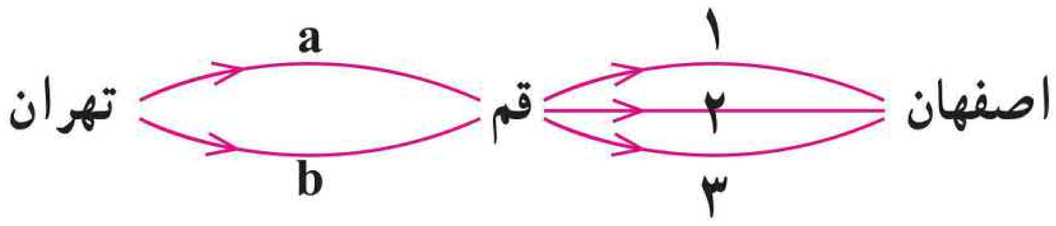
مثال

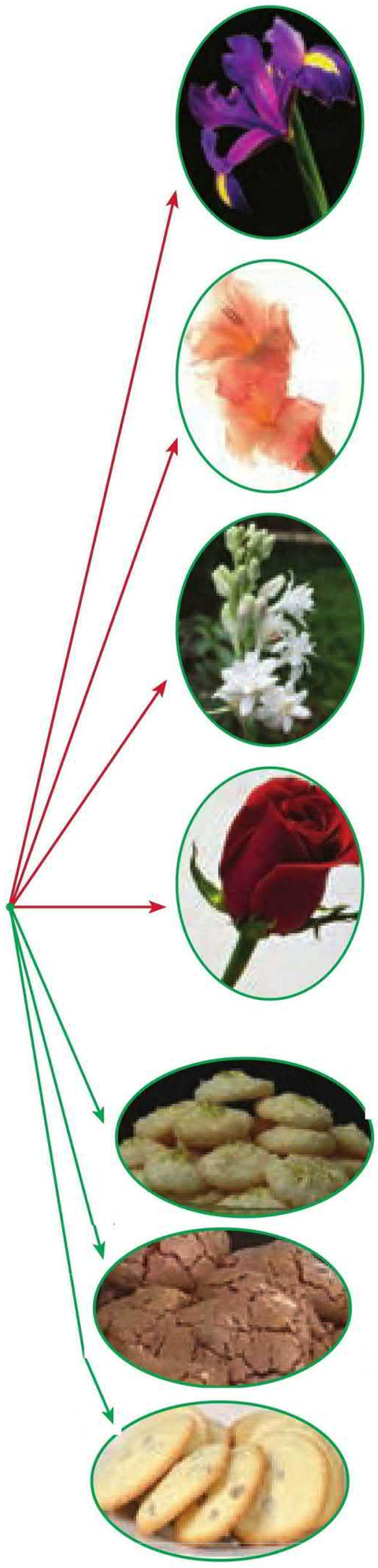
فردی می‌خواهد با اتومبیل خود از تهران به اصفهان برود و برای این‌کار قصد دارد از قم عبور کند. اگر از تهران به قم دو مسیر a و b و از قم به اصفهان سه مسیر ۱ و ۲ و ۳ وجود داشته باشند، این فرد به چند طریق می‌تواند از تهران به اصفهان سفر کند؟

حل : طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها ۶=۳×۲ است که عبارت‌اند از :

a,۱ a,۲ a,۳

b,۱ b,۲ b,۳





تعمیم اصل ضرب : اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد؛ به‌طوری‌که برای انجام مرحلهٔ اول m_1 روش، برای انجام مرحلهٔ دوم m_2 روش ، ... و برای انجام مرحلهٔ kام m_k روش وجودداشته باشد (با فرض اینکه در هر مرحله انتخاب تمام روش‌های آن مرحله ممکن باشد)، کار موردنظر با $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_k$ روش قابل انجام است.

کار در کلاس

۱ پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. او به یکی از دو انتخاب «یک شاخهٔ گل» یا «یک نوع شیرینی» برای بردن به خانهٔ دوستش فکر می‌کند. گل‌هایی که او در نظر دارد، عبارت‌انداز : مریم، گلایل، زنبق و رُز. شیرینی‌هایی که او درنظر دارد، عبارت‌اند از : گردویی، نارگیلی و کشمشی. او چند انتخاب دارد؟ ۴+۳=۷ بنابراین ۷ انتخاب دارد

۲ هفتهٔ بعد پژمان می‌خواهد به دیدن خانهٔ جدید یکی از دوستانش برود. او این‌بار می‌خواهد «یک شاخه گل» و «یک نوع شیرینی» بخرد و همان گزینه‌ها را در ذهن دارد. او این‌بار به چند حالت می‌تواند خرید کند؟ آنها را بنویسید. ۴×۳=۱۲ بنابراین ۱۲ انتخاب دارد

{(مریم وگردویی)و(مریم و نارگیلی)و(مریم و کشمشی)و(گلایل و گردویی)و(گلایل و نارگیلی)و(گلایل و کشمشی)و

(زنبق وگردویی)و(زنبق و نارگیلی)و(زنبق و کشمشی)و(رُز و گردویی)و(رُز و نارگیلی)و(رُز و کشمشی)}

۳ در هر یک از قسمت های (۱) و (۲) از چه اصلی استفاده کردید؟ چرا؟

در سوال (۱) پژمان می‌تواند یکی از دو روش را انتخاب کند که یکی ۴ و دیگری ۳ حالت دارد، لذا طبق اصل جمع ۷=۳+۴ انتخاب دارد ولی در سوال (۲) پژمان می‌خواهد هر دو کار را انجام دهد، هم انتخاب گل و هم انتخاب شیرینی که طبق اصل ضرب ۱۲=۳×۴ انتخاب دارد.

۴ دو مسئله طرح کنید که یکی با اصل جمع و یکی با اصل ضرب حل شود.

اصل جمع : کتابخانه مدرسه ای ۴۰ کتاب در زمینه ریاضی و ۵۰ کتاب در زمینه ادبیات دارد. اگر یک دانش آموز بخواهد یکی از کتاب های کتابخانه را در زمینه ریاضی یا ادبیات انتخاب کند به چند راه می‌تواند این کار را انجام دهد؟ ۹۰=۵۰+۴۰ بنابراین ۹۰ راه وجود دارد

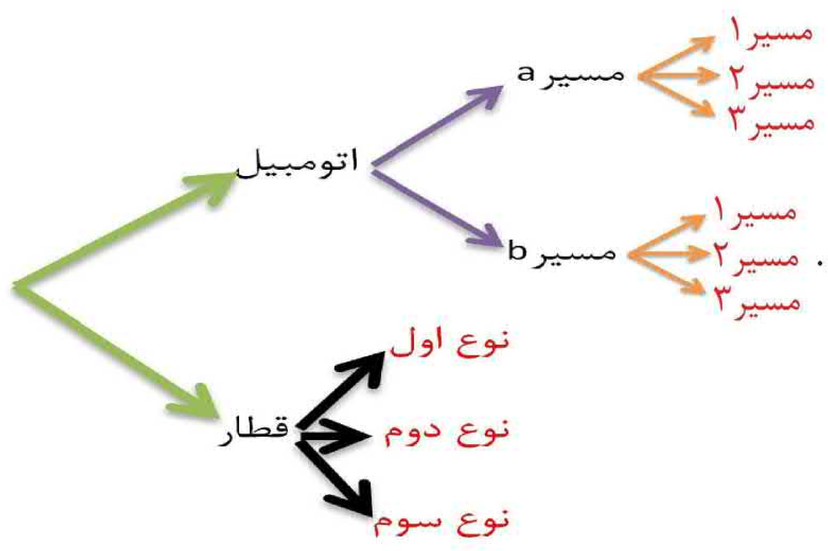
اصل ضرب : از بین ۴ نوع غذای مختلف و ۵ نوع سالاد در یک رستوران به چند طریق می‌توان غذایی به همراه سالاد سفارش داد؟ ۲۰=۵×۴ بنابراین ۲۰ نوع سفارش مختلف داریم

در برخی مسائل لازم است از هر دو اصل جمع و ضرب استفاده شود.

مثال

فردی می‌خواهد از تهران به اصفهان برود. او قصد دارد با اتومبیل خود یا با قطار این سفر را انجام دهد. اگر با اتومبیل خود به این سفر برود، مسیرها و انتخاب‌های او مانند مثال قبل است و اگر تصمیم بگیرد با قطار برود، سه نوع قطار می‌تواند انتخاب کند. او در کل چند انتخاب دارد؟

حل : اگر با اتومبیل برود، طبق اصل ضرب به ۶ طریق ممکن است و اگر قطار را انتخاب کند سه طریق. لذا طبق اصل جمع در کل ۹ انتخاب دارد. با رسم یک شکل این پاسخ را توجیه کنید.



مثال : رمزی از سه حرف تشکیل شده است که هر کدام می توانند از حروف فارسی یا حروف کوچک انگلیسی باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، برای این رمز چند حالت ممکن وجود دارد؟

حل :

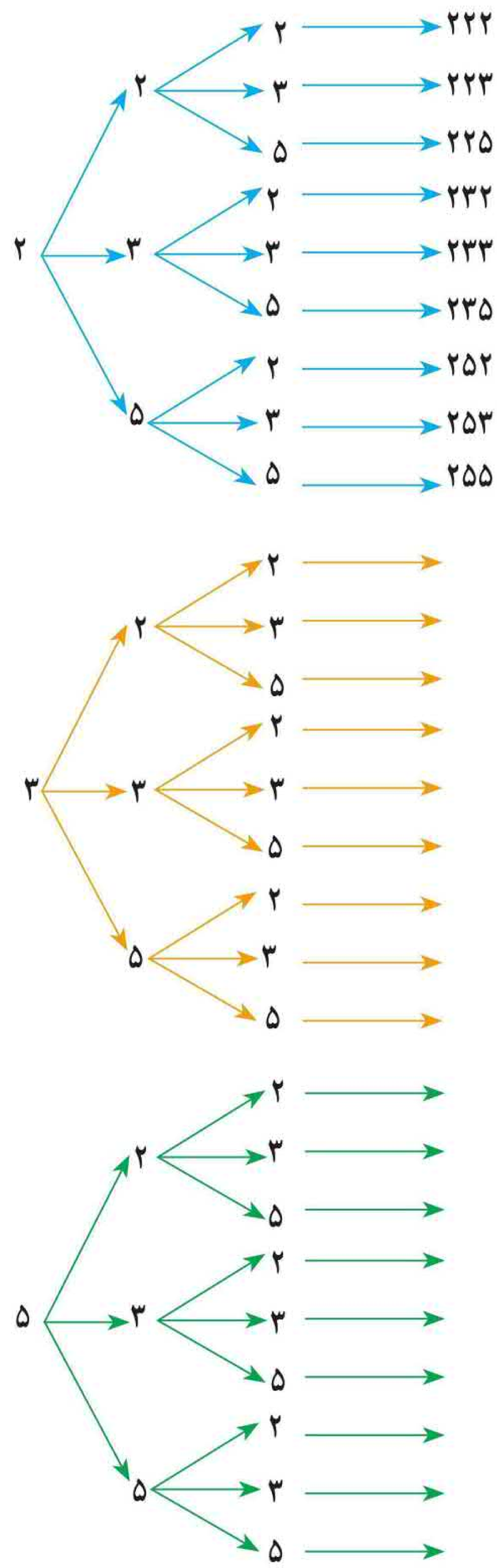
حالت اول : اگر گزینهٔ سمت چپ حرف فارسی باشد : ۳۲ × ۲۶ × ۳۲ = ۲۶۶۲۴

حالت دوم : اگر گزینهٔ سمت چپ حرف انگلیسی باشد : ۲۶ × ۳۲ × ۲۶ = ۲۱۶۳۲

تعداد حالات ممکن : ۲۶۶۲۴ + ۲۱۶۳۲ = ۴۸۲۵۶

کار در کلاس

الف با سه رقم ۵ و ۳ و ۲ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ به‌طور مثال ۲۳۵ و ۳۵۲ و ۳۳۵ سه نمونه از این اعدادند. برای این‌کار می‌توان نوشتن عدد سه رقمی را به‌صورت پرکردن سه جایگاه مقابل با ارقام مذکور درنظر گرفت.



پس این کار سه مرحله دارد و هر سه مرحلهٔ آن باید انجام شود، برای به‌دست آوردن جواب، تعداد راه‌های پرکردن هر جایگاه باید مشخص شود و با استفاده از اصل ضرب درهم ضرب شود.

هر جایگاه را به سه حالت می‌توان پر کرد؛ لذا ۲۷ عدد وجود دارد.

۵یا۳یا۲ ۵یا۳یا۲ ۵یا۳یا۲

۳ × ۳ × ۳ = ۲۷ تعداد حالت‌ها

با نمودار درختی در سال‌های پیش آشنا شده‌اید. از این نمودار نیز می‌توان برای به‌دست آوردن تعداد اعداد موردنظر و نیز نوعی از نمایش آنها استفاده کرد. به نمودار درختی کشیده شده در حاشیهٔ صفحه دقت و آن را تکمیل کنید.

ب با همان سه رقم چند عدد سه رقمی می‌توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد؟

۱ــ برای پرکردن جایگاه اول از سمت چپ (صدگان) چند حالت امکان دارد؟

تعداد حالت ها ← ۳ حالت

۲ــ حال فرض کنیم یکی از اعداد را در اولین جایگاه گذاشته‌ایم. برای پرکردن جایگاه دوم چند حالت امکان دارد؟

۳ــ برای پرکردن جایگاه سوم چند حالت وجود دارد؟

یک عدد قرار گرفته است	یک عدد قرار گرفته است	
		۱

تعداد حالت ها ←

لذا ..۶... = ...۱.. × ...۲.. × ...۳.. عدد سه رقمی توسط ۲ و ۳ و ۵ با ارقام غیرتکراری وجود دارد.

پ با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت؟

۱ــ جایگاه سمت راست به چند روش می‌تواند پر شود، به گونه‌ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟ در این جایگاه فقط عدد ۲ می‌تواند قرار بگیرد، لذا ۱ حالت وجود دارد.

۲ــ دو جایگاه دیگر هر یک به چند روش می‌توانند، پر شوند؟ در جایگاه های دیگر هر کدام از سه عدد می‌توانند قرار گیرند، پس هر کدام دارای سه حالت است.

لذا تعداد اعداد در این حالت برابر است با ..۹... = ...۱.. × ..۳... × ...۳..

ت با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

		۱ حالت

۱ــ جایگاه سمت راست به چند روش می‌تواند پر شود به‌گونه‌ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟

۲ــ پس از پرکردن جایگاه سمت راست، جایگاه سمت چپ، به چند طریق می‌تواند پر شود؟

در جایگاه سمت چپ فقط یکی از اعداد ۳ یا ۵ می‌توانند باشند پس ۲ حالت داریم

۳ــ حال جایگاه وسط به چند طریق می‌تواند پرشود؟

با قرار گرفتن یکی از اعداد ۳ یا ۵ در جایگاه سمت چپ، فقط یک عدد برای جایگاه وسط باقی می‌ماند، لذا در این جایگاه فقط ۱ حالت داریم.

۴ــ لذا تعداد اعداد مورد نظر در این حالت برابر است با ..۲.. = ..۱.. × ..۱.. × ..۲..

مثال

با ارقام ۷ و ۳ و ۲ و ۰

الف) چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد سه رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

پ)چند عدد سه رقمی فرد با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

ت) چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

حل :

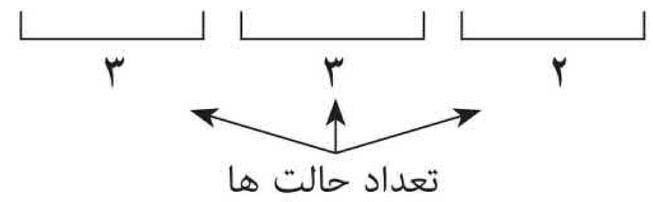
۳	۴	۴

تعداد حالت ها

الف) با توجه به اصل ضرب و چون رقم صفر در جایگاه صدگان نمی‌تواند باشد؛ بنابراین تعداد حالت‌ها مطابق شکل مقابل است.

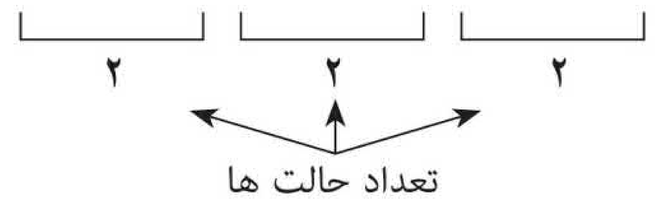
لذا ۴۸ عدد سه رقمی با ارقام مذکور می‌توان نوشت.

$۳ \times ۴ \times ۴ = ۴۸$



ب) طبق اصل ضرب و با توجه به اینکه رقم صفر در سمت چپ نمی‌تواند بیاید و ارقام نباید تکراری باشند؛ لذا تعداد حالت‌ها مطابق شکل مقابل است؛ بنابراین ۱۸ عدد می‌توان نوشت.

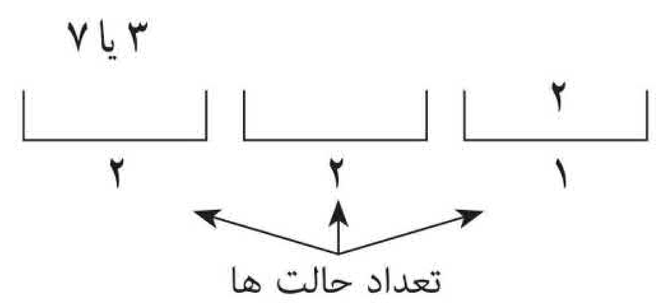
$۳ \times ۳ \times ۲ = ۱۸$



پ) با توجه به اینکه رقم سمت راست باید ۳ یا ۷ باشد و رقم صفر هم نمی‌تواند رقم سمت چپ باشد؛ لذا تعداد حالت‌ها به‌صورت مقابل است.

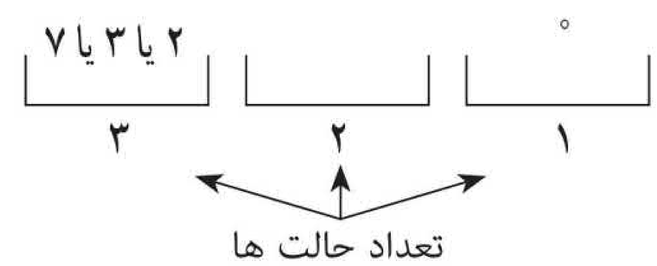
$۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$

ت) چون عدد موردنظر باید زوج باشد؛ لذا رقم سمت راست باید ۰ یا ۲ باشد و چون در حالتی که رقم ۲سمت راست باشد، رقم ۰ سمت چپ هم نمی‌تواند باشد، لذا باید دو حالت زیر را درنظر بگیریم و طبق اصل جمع تعداد حاصل در دو حالت را با هم جمع کنیم.



حالت اول : اگر رقم سمت راست ۲ باشد؛ یعنی رقم سمت راست یک حالت می‌تواند باشد؛ لذا طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها به‌صورت مقابل است.

$۲ \times ۲ \times ۱ = ۴$



حالت دوم : اگر رقم سمت راست ۰ باشد، حالت‌های جایگاه‌ها به‌صورت مقابل است.

$۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$

لذا در کل ۱۰ عدد می‌توان نوشت.

راه حل دوم : با توجه به صورت سؤال‌های (ب)، (پ) و (ت) می‌توان به‌صورت زیر جواب را حساب کرد :

جواب قسمت (ت) = جواب قسمت (ب) – جواب قسمت (پ) = ۱۸–۸=۱۰

تمرین

۱ تعداد حالت‌های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت‌های زیر به‌دست آورید. مشخص کنید برای این‌کار از اصل جمع استفاده می شود یا از اصل ضرب یا از هر دو.

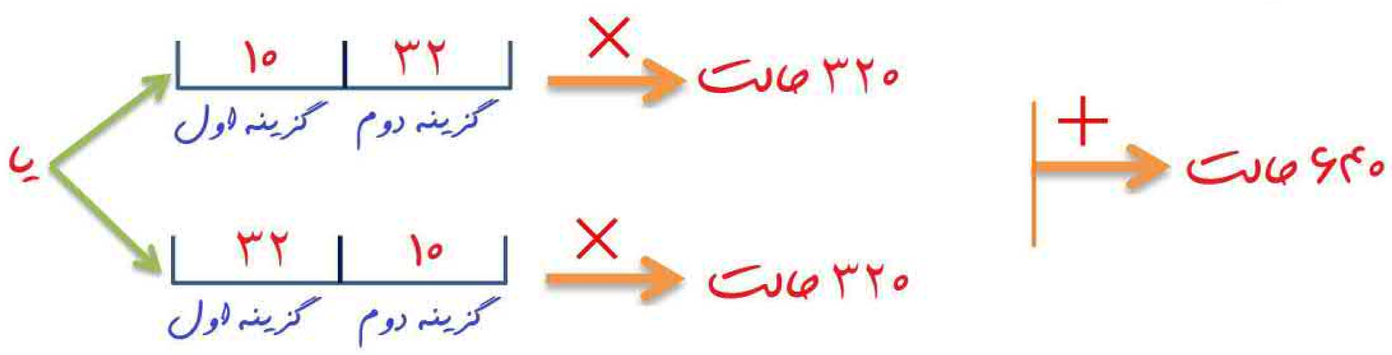
الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده، که یک عدد یا یک حرف الفبای فارسی است.

رمز یکی از اعداد ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و . . . و یا یکی از ۳۲ حرف الفبای فارسی خواهد بود

بنابراین: ۳۲+۱۰=۴۲ حالت داریم.

ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که گزینهٔ اول یک عدد و گزینهٔ دوم یک حرف الفبای فارسی است.

پ) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه‌ها یک عدد و گزینهٔ دیگر یک حرف الفبای فارسی است.



ت) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یا هر دو گزینه عددند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی‌اند.

یا ← هر دو عدد باشند: $۱۰ \times ۱۰ = ۱۰۰$

یا ← هر دو حرف باشند: $۲۶ \times ۲۶ = ۶۷۶$

$\xrightarrow{+}$ ۷۷۶

ث) این رمز از ۴ گزینه تشکیل شده است که دو گزینهٔ اول اعداد غیرتکراری و دو گزینهٔ دوم حروف انگلیسی غیرتکراری‌اند.

۱۰	۹	۲۶	۲۵
اعداد		حروف	

$\xrightarrow{\times}$ ۵۸۵۰۰ حالت

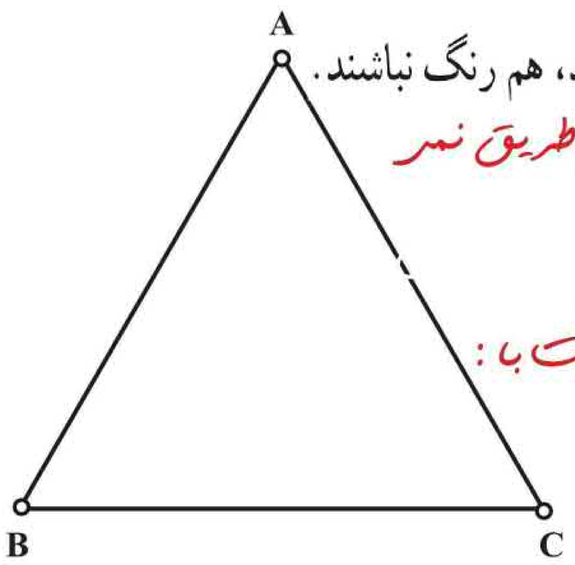
۲ در یک شهرک صنعتی ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان، و در هر خیابان بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، چند تاست؟

حداکثر: $۵ \times ۱۰ \times ۱۲ \times ۳۰ = ۱۸۰۰۰$

حداقل: $۵ \times ۸ \times ۱۰ \times ۲۰ = ۸۰۰۰$

۳ می‌خواهیم رأس‌های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.

الف) به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟ برای آنکه راس A رنگ متفاوت با رئوس B و C داشته باشد ۲ حالت داریم (A به رنگ آبی و دو راس دیگر قرمز باشند و برعکس) به همین ترتیب برای متفاوت بودن رئوس B و C نیز هر کدام دو حالت داریم. پس طبق اصل ضرب $۲ \times ۲ \times ۲ = ۸$ طریق این کار امکان پذیر است.



ب) به چند طریق می‌توان این رنگ‌آمیزی را انجام داد، به‌گونه‌ای که رأس‌هایی که به هم‌وصل‌اند، هم رنگ نباشند.

با توجه به اینکه هر راس به دو راس دیگر وصل است، این خواسته غیر ممکن است و در نتیجه به هیچ طریق نمی توان این کار را انجام داد.

پ) هر دو قسمت (الف) و (ب) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می‌کنیم، بررسی کنید.

حالت الف: با توجه به این که مجبور به استفاده از هر سه رنگ هستیم تعداد انتخاب ها برابر است با:

$۳ \times ۳ \times ۳ = ۲۷$

حالت ب: جواب همان جواب قسمت (الف) یعنی ۶ می باشد زیرا با وجود سه راس و ۳ رنگ متمایز، خود به خود رئوس هم‌رنگ نخواهند بود.

۴ با پلاک‌هایی به‌صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آنها از مجموعهٔ A انتخاب شوند و سایر ارقام از مجموعهٔ B انتخاب شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعهٔ C انتخاب شود، چند ماشین را می‌توان شماره گذاری کرد؟

$A=\{۱۱,۲۲,.....,۹۹\}$

$B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$

$C=\{$ی, ه, و, ن, م, ل, ق, ط, ص, س, د, ج, ب$\}$

$۹ \times ۹ \quad ۱۳ \quad ۹ \times ۹ \times ۹ \quad ۹$

$\xrightarrow{\times} ۱۳ \times ۹^۶ = ۶۹۰۸۷۳۳$

۵ در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می شود.

الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می شود؟

$۵ \times ۱۰ \times ۳ \times ۲ = ۳۰۰$

مُدل، رنگ، حجم موتور، دنده

ب) اگر یکی از رنگ های تولید شده مشکی باشد، چند نوع از این اتومبیل بارنگ مشکی تولید می شود؟

$۵ \times ۱ \times ۳ \times ۲ = ۳۰$

مُدل، رنگ، حجم موتور، دنده

پ) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده اتوماتیک تولید می شود؟

$۵ \times ۱ \times ۳ \times ۱ = ۱۵$

مُدل، رنگ، حجم موتور، دنده

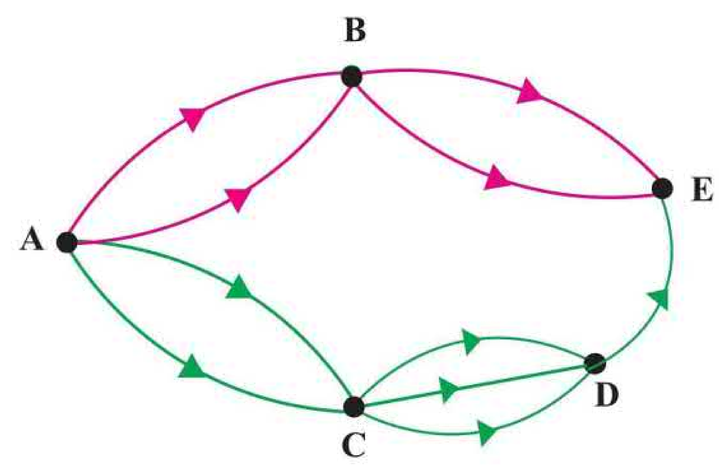
۶ یک آزمون چندگزینه‌ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه‌ای و ۵ سؤال ۲ گزینه‌ای (بله – خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال‌ها به‌صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می تواند این کار را انجام دهد اگر :

الف) اگر مجبور باشد به همهٔ سؤال‌ها جواب دهد؟

$$\underbrace{\overbrace{۴\times۴\times\cdots\times۴}^{\text{۱۰ بار}}}_{\text{سوالات چهار گزینه ای}}\ \underbrace{\overbrace{۲\times۲\times\cdots\times۲}^{\text{۵ بار}}}_{\text{سوالات دو گزینه ای}} \longrightarrow = ۲^{۲۵}$$

ب) بتواند سؤال ها را بدون جواب هم بگذارد؟

$$\underbrace{\overbrace{۵\times۵\times\cdots\times۵}^{\text{۱۰ بار}}}_{\text{سوالات چهار گزینه ای}}\ \underbrace{\overbrace{۳\times۳\times\cdots\times۳}^{\text{۵ بار}}}_{\text{سوالات دو گزینه ای}} \longrightarrow = ۵^{۱۰}\times۳^{۵}$$



۷ اگر شکل مقابل نشان دهندهٔ جاده‌های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همهٔ جاده‌ها یک طرفه باشند، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر E رفت؟

$$\left.\begin{array}{l} \text{مسیر } ABE : ۲\times۲=۴ \\ \text{مسیر } ACDE : ۲\times۳\times۱=۶ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} ۱۰$$

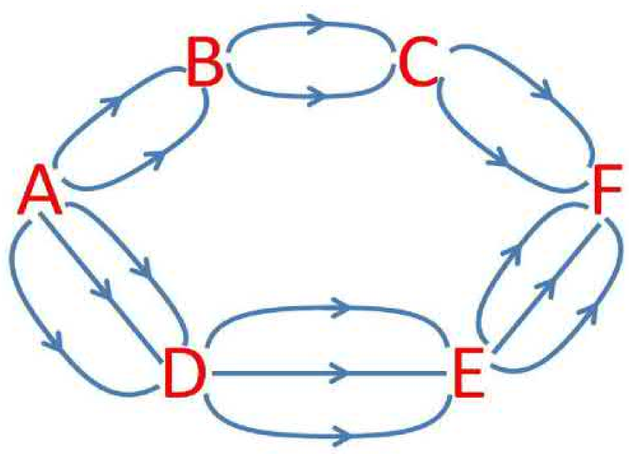
۸ مسئله زیر را به گونه ای کامل کنید که جواب ارائه شده، درست باشد.

مسئله : چند عدد دو رقمی زوج می توان نوشت؛ به‌طوری که ..از عدد ۶۰ بزرگتر یا مساوی آن باشند..؟

حل : تعداد راه های نوشتن یکان برابر ۵ تاست و تعداد راه‌های نوشتن دهگان برابر ۴ تاست . لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط مورد نظر وجود دارد.

۹ مسئله‌ای طرح کنید که با استفاده از اصل جمع یا اصل ضرب و یا هردوی آنها حل شود و جواب آن به صورت زیر باشد.

$$۲\times۲\times۲ + ۳\times۳\times۳ = ۳۵$$



مسئله برای سوال ۹ : اگر شکل مقابل نشان دهنده راه های بین شهر های A,B,C,D,E,F باشد و همه راه ها یک طرفه فرض شوند، به چند طریق می توان از شهر A به شهر F رفت؟