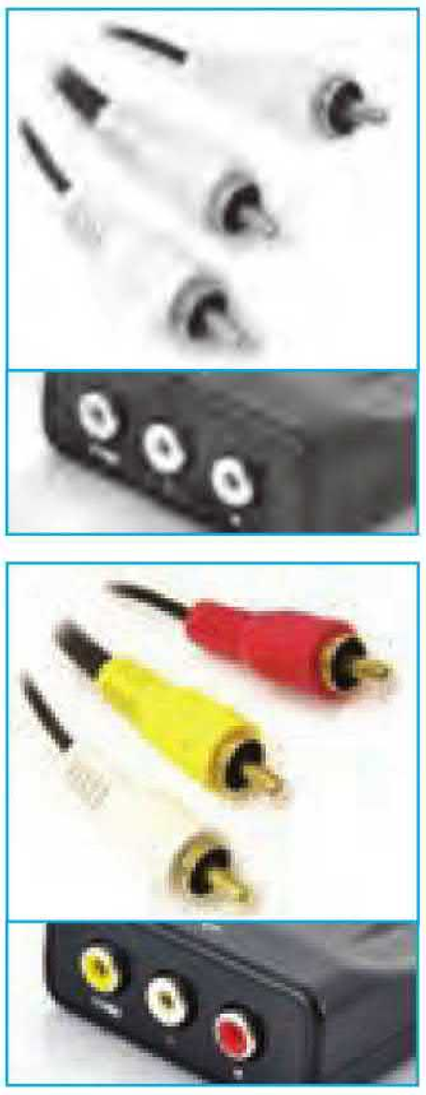
تهیه کنندگان:
جابر عامری، مریم غزنوی، آناهیتا کمیجانی، افشین ملاسعیدی

درس دوم: جایگشت



جایگشت

سه فیش و سه درگاه مانند شکل مقابل وجود دارند که باعث اتصال دو دستگاه الکتریکی به‌هم می‌شوند. برای اتصال درست دو دستگاه، باید هر فیش به‌درگاه مخصوص به‌خود وصل شده باشد. چند حالت مختلف برای اتصال سه فیش به سه درگاه وجود دارد؟ بین تمام حالت‌ها فقط یکی منجر به کارکردن درست دستگاه می‌شود. آیا می‌دانید برای راحت‌تر پیدا کردن حالت درست، شرکت‌های تولیدی چگونه عمل می‌کنند؟

فعالیت

۱ فرض کنید فیش‌ها را a و b و c بنامیم. حالت‌های مختلف قرار دادن آنها را درمربع‌های زیر بنویسید.

a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

۲ آیا در سه مربع به‌هم چسبیده، حرفی می‌تواند تکرار شود؟ خیر

۳ با توجه به اصل ضرب چگونه می‌توان تعداد این چینش‌ها را به‌دست آورد؟

۳ × ۲ × ۱ → ۶

درگاه اول　درگاه دوم　درگاه سوم

فعالیت

به چند حالت مختلف می‌توان چهار عدد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را کنار هم قرار داد؟

می‌خواهیم مسئلهٔ قبل را با استفاده از اصل ضرب حل کنیم. فرض کنید ۴ مربع به‌صورت مقابل وجود دارد که پرکردن هر کدام از مربع‌ها یک مرحله از چینش است. واضح است که هر چهار مرحله باید انجام شود؛ لذا تعداد حالت‌های ممکن برای پرکردن مربع‌ها باید در هم ضرب شود.

۱ اولین مربع (مثلاً مربع سمت چپ) به چند روش می‌تواند پرشود؟ ۴

ــ پس از پرشدن اولین مربع چند عدد چیده نشده باقی مانده است؟ ۳

ــ حال دومین مربع را به چند روش می‌توان پر کرد؟ ۳ سومین و چهارمین مربع را چطور؟

سومین مربع به ۲ روش و چهارمین مربع به ۱ روش

ــ حال با توجه به اصل ضرب، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با

۴ × ۳ × ۲ × ۱ = ۲۴

«اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالتِ چیدنِ آنها کنار هم، یک **جایگشت** از آن اشیاء می‌گوییم.»

بنابراین تعداد راه‌های چیدن چهار شیء متمایز یا به‌عبارتی تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز عبارت‌است از حاصل‌ضرب ۱ × ۲ × ۳ × ۴

۲ به‌نظر شما تعداد روش‌های چیدن پنج حرف یونانی α و β و γ و δ و θ (به‌ترتیب آلفا، بتا، گاما، دلتا و تِتا خوانده می‌شوند) کنار هم و بدون تکرار، یا به‌عبارتی تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز چندتاست؟ ۱×۲×۳×۴×۵

۳ تعداد کلمات هفت حرفی (با معنی و بدون معنی) که از کنار هم قرار دادن حروف «ت»، «ش»، «و»، «ا»، «ن»، «پ» و «ه» می‌توان ساخت چندتاست؟ (بدون تکرار حروف)

۱×۲×۳×۴×۵×۶×۷

۴ با استفاده از ارقام ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ چند عدد ۹ رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

۱×۲×۳×۴×۵×۶×۷×۸×۹

۵ تعداد جایگشت‌های ۱۰ شیء متمایز چندتاست؟

۱×۲×...×۹×۱۰

۶ اگر n یک عدد طبیعی باشد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز را با یک حاصل‌ضرب نشان دهید. $n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 2\times 1$

معرفی یک نماد

اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل‌ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را به‌صورت !n (n فاکتوریل) نمایش می‌دهیم. به طور مثال ۱ = !۱ ۲×۱ = !۲ ۳×۲×۱=!۳ و الی آخر قرار داد : ۱=!۰

حال با توجه به این نماد، تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با .. $n!$ ..

کار در کلاس

۱ مانند نمونه هر قسمت را کامل کنید.

الف) $6! = 6\times\overbrace{5\times4\times3\times2\times1}^{5!} = 6\times5!$

ب) $8! = 8\times7!$

پ) $10! = 10\times9!$

ت) $n! = n\times(n-1)!$

۲ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{5!}{4!} = \frac{5\times\overbrace{4\times3\times2\times1}^{4!}}{\underbrace{4\times3\times2\times1}_{4!}} = 5$

ب) $\frac{10!}{9!} = \frac{10\times9!}{9!} = 10$

پ) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

ت) $\frac{8!}{6!} = \frac{8\times7\times6!}{6!} = 56$

ث) $\frac{10!}{8!} = \frac{10\times9\times8!}{8!} = 90$

ج) $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$

چ) $\frac{8!}{5!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{5!} = 336$

ح) $\frac{10!}{7!} = \frac{10\times9\times8\times7!}{7!} = 720$

خ) $\frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2)$

د) $\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!} = n(n-1)(n-2)(n-3)$

ذ) $\frac{n!}{(n-5)!} = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

ر) $\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$

۳ حاصل ضرب‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

الف) $۹\times۸ = \frac{۹!}{۷!}$

ب) $۹\times۸\times۷\times۶ = \frac{۹!}{۵!}$

پ) $۱۱\times۱۰\times۹ = \frac{۱۱!}{۸!}$

ت) $۸ = \frac{۸!}{۷!}$

ث) $n(n-۱) = \frac{n!}{(n-۲)!}$

ج) $n(n-۱)(n-۲)(n-۳) = \frac{n!}{(n-۴)!}$

فعالیت

۱ تعداد کلمات هفت حرفی که بدون تکرار حروف با حروف a , b ,d , e , f , s , t می‌توان نوشت؛ یعنی تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز برابر است با $۷!$

۲ حال با توجه به اصل ضرب می‌خواهیم تعداد کلمات سه حرفی با حروف متمایز را که با همان هفت حرف بالا می‌توان نوشت، به‌دست آوریم.

- برای انتخاب اولین حرف از حروف کلمهٔ سه حرفی چند انتخاب داریم؟ ۷

برای انتخاب دومین و سومین حرف چطور؟ برای دومین حرف ۶ انتخاب و برای سومین ۵ انتخاب داریم.

- بنابراین تعداد کلمات سه حرفیِ موردنظر برابر است با $۷\times۶\times۵$

در واقع آنچه به‌دست آمد، تعداد راه‌های چیدن سه شیء از هفت شیء متمایز یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از هفت شیء متمایز است.

۳ تعداد جایگشت‌های چهارتایی از نه شیء متمایز را به‌دست آورید. $۹\times۸\times۷\times۶$

۴ اعداد به‌دست آمده در مراحل ۲ و ۳ را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

مرحله دوم: $۷\times۶\times۵ = \frac{۷!}{۴!}$

مرحله سوم: $۹\times۸\times۷\times۶ = \frac{۹!}{۵!}$

۵ تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از n شیء متمایز را به‌دست آورید و آن‌را با استفاده از فاکتوریل بنویسید. $\frac{n!}{(n-۳)!}$

۶ تعداد جایگشت‌های rتایی از n شیء متمایز $(۰\le r\le n)$ را به‌دست آورید و آن‌را با استفاده از فاکتوریل بنویسید. $\frac{n!}{(n-r)!}$

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آنها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد، با p(n,r) نمایش می‌دهیم و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می‌شود.

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال

با حروف کلمهٔ «جهانگردی» و بدون تکرار حروف :

الف) چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها به «ی» ختم می‌شود؟

ب) چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار داشته باشند؟

پ) چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آنها به «گردی» ختم می‌شوند؟

ت) چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمهٔ «جهان» چهار حرف اول باشند؟

ث) چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمهٔ «جهان» کنار هم باشند؟

ج) چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حرف نقطه دار شروع شوند؟

حل :

الف) برای نوشتن تمام کلمات ۸ حرفیِ بدون حروف تکراری با این ۸ حرف کافی است تعداد جایگشت‌های ۸ شیء متمایز را به‌دست آوریم؛ لذا جواب برابر !۸ است.
در حالتی که حرف آخر «ی» باشد، کافی است تعداد جایگشت‌ها روی هفت حرف دیگر را به‌دست آوریم؛ لذا در این حالت جواب برابر !۷ است.

ب) حروف «د» و «ی» به دو حالتِ «دی» و «ید» می‌توانند کنار هم بیایند. برای پیداکردن تعداد کلماتی که در آنها این دو حرف به‌صورت «دی» در کنار هم آمده‌اند، کافی است این دوحرف را یک حرف درنظر بگیریم؛ لذا کافی است تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز را به‌دست آوریم که برابر است با !۷. چون همین تعداد هم برای حالت «ید» وجود دارد پس جواب کلی برابر است با !۷×۲.

پ) تعداد کلمات شش حرفی برابر است با تعداد جایگشت‌های شش‌تایی از هشت شیء متمایز یعنی $P(۸,۶)=\frac{۸!}{(۸-۶)!}=\frac{۸!}{۲!}$ در حالتی که کلمه بخواهد به «گردی» ختم شود، با توجه به اینکه چهار حرف آخر مشخص‌اند؛ لذا فقط باید تعداد حالت‌های نوشتن دو حرف اول توسط حروف کلمهٔ «جهان» را به‌دست آورد که برابر است با تعداد جایگشت‌های دوتایی از چهار شیء متمایز؛ یعنی : $P(۴,۲)=\frac{۴!}{(۴-۲)!}=۱۲$

ت) چهار حرف اول ، حروف کلمهٔ «جهان» هستند که به !۴ حالت می‌توانند بیایند. حال ۴ حرف آخر را باید با ۴ حرف باقی‌مانده (گ ر د ی) نوشت که این کار را هم به !۴ روش می‌توان انجام شود. بنابراین طبق اصل ضرب، نوشتن کلمهٔ مورد نظر به !۴ ×!۴ روش می‌تواند انجام شود.

ث) تعداد حالت‌های قرار گرفتن حروف کلمهٔ «جهان» در کنار هم برابراست با تعداد جایگشت‌های چهار شیء متمایز یعنی !۴. حال هر کدام از این جایگشت‌ها را که درنظر بگیریم، برای نوشتن کلمهٔ ۸ حرفی کافی است این چهار حرف کنار هم قرار گرفته (چهار حرف کلمهٔ «جهان») را یک حرف حساب کنیم؛ بنابراین کافی است تعداد جایگشت‌های پنج شیء متمایز را حساب کنیم که برابر است با !۵. پس طبق اصل ضرب جواب برابر است با : !۵×!۴.

ج) حروف اول باید یکی از سه حرف «ج»، «ن» و «ی» باشد. پس ۳ انتخاب برای حرف اول داریم. حال با انتخاب هرکدام از این ۳ حرف برای چینش ۷ حرف دیگر !۷ وجود دارد بنابراین جواب برابر است با : !۷×۳.

کار در کلاس

۱ یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش‌رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می‌توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟

$$P(۶,۴)=\frac{۶!}{۲!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times\cancel{۲!}}{\cancel{۲!}}=۳۶۰$$

۲ با عددهای ۵ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد سه رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

$$P(۴,۳)=\frac{۴!}{۱!}=\frac{۴\times۳\times۲\times۱}{۱}=۲۴$$

تمرین

۱ در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم‌های اول تا سوم به چند حالت مختلف می‌توانند مشخص شوند؟

$$P(۱۸,۳)=\frac{۱۸!}{۱۵!}=\frac{۱۸\times۱۷\times۱۶\times\cancel{۱۵!}}{\cancel{۱۵!}}=۴۸۹۶$$

۲ از بین تعدادی کتاب مختلف می خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب ها چند تاست؟

$$P(n,۳)=\frac{n!}{(n-۳)!}=n(n-۱)(n-۲)=\underbrace{۷\times۶\times۵}_{۲۱۰}\Rightarrow n=۷$$

۳ کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

$۶!=۶\times۵!$ درست

$۶!=۳!+۳!$ نادرست

$۶!=۲\times۳!$ نادرست

$۸!=۴!\times۲!$ نادرست

$۴!=\frac{۸!}{۲!}$ نادرست

$(۳!)^۲=۹!$ نادرست

۴ در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدام‌اند و بخواهد به‌طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می‌تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟ $۲ \times P(۲۰,۳) = ۱۳۶۸۰$ ثانیه

۵ با حروف کلمهٔ «گل پیرا» و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ $!۶$ چند تا از آنها با «گل» شروع می شود؟ $!۴$

ب) چند کلمهٔ ۴ حرفی می‌توان نوشت؟ $P(۶,۴) = ۳۶۰$

پ) چند کلمهٔ ۴ حرفی می‌توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

$۲ \times ۳ \times ۴ \times ۳$

ت) چند کلمهٔ ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آنها حروف کلمهٔ «پیرا» کنار هم آمده باشند؟

جابه‌جایی کُلی $\boxed{\text{گ یا ل}}$ و $\boxed{\text{پیرا}}$

$$!۴ \times ۲ \times ۲ = ۹۶$$