

ترسیم‌های هندسی

انسان از دوران باستان تاکنون همواره از هندسه و به‌ویژه از ترسیم‌های هندسی برای حل مسائل مختلف یاری گرفته است.
از تقسیم‌بندی زمین‌های کشاورزی تا طراحی انواع ابزارهای کاربردی پیشرفته کنونی، همگی نیازمند ترسیم‌های هندسی است.

فعالیت

(برای مراحل زیر از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.)

۱- نقطه‌ای مانند O را در صفحه در نظر بگیرید و برای رسم کردن از خط‌کش و پرگار استفاده کنید.

نقاطی را مشخص کنید که فاصله یکسانی از نقطه O دارند. (مثلاً همه نقاطی که فاصله‌شان از نقطه O برابر ۲ سانتی‌متر است.)

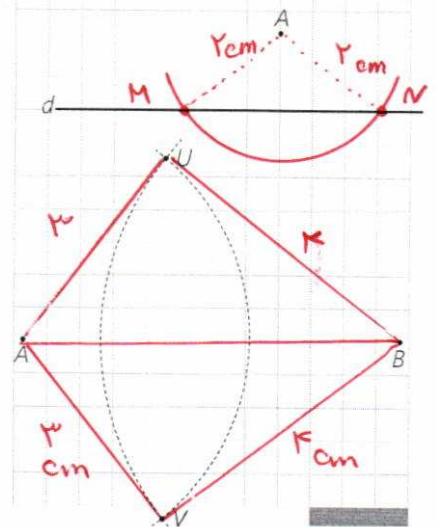
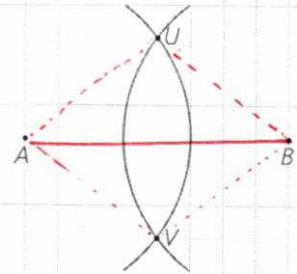
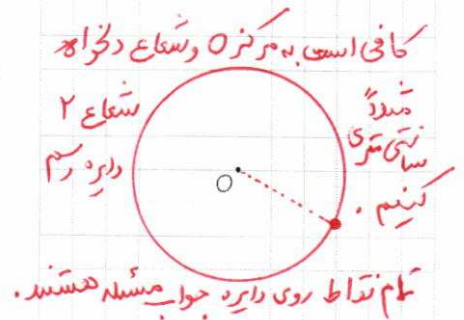
۲- نقاط A و B را در نظر بگیرید. دهانه پرگار را بیش از نصف طول پاره خط AB باز کنید و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B و با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاط U و V قطع کنند. U و V چه ویژگی مشترکی دارند؟

از دوسو پاره خط AB به یک فاصله هستند.

۳- نقطه A، مانند شکل مقابل به فاصله ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصله ۲ سانتی‌متر از نقطه A باشند. *کافی است به مرکز A و به شعاع ۲ سانتی‌متری رسم کنیم خط d را از نقاط M و N قطع کند.*

۴- نقاط A و B را به فاصله ۵ سانتی‌متر از هم در نظر بگیرید. دهانه پرگار را به اندازه ۳ سانتی‌متر باز کنید و از نقطه A یک کمان بزنید. سپس دهانه پرگار را به اندازه ۴ سانتی‌متر باز کنید و از نقطه B یک کمان بزنید.

الف) نقاط روی کمان اول چه ویژگی مشترکی دارند؟
همگی تا نقطه A به فاصله ۳ سانتی‌متر قرار دارند.



ب) نقاط روی کمان دوم چه ویژگی مشترکی دارند؟ **همگی تا نقطه B**
به فاصله ۴ سانتی متری قرار دارند.

پ) نقاط تقاطع دو کمان فاصله شان از نقاط A و B چگونه است؟ برای اینکه چنین نقاط تقاطعی وجود داشته باشند، اندازه شعاع آنها و فاصله نقاط A و B چه شرطی باید

داشته باشند؟

$$AU = 3 \text{ cm} \quad BU = 4 \text{ cm}$$

$$AV = 3 \text{ cm} \quad BV = 3 \text{ cm} \quad AU + BU > AB$$

ت) طول اضلاع مثلث AUB چقدر است؟

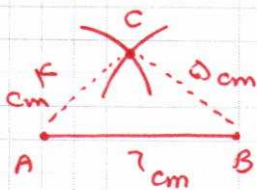
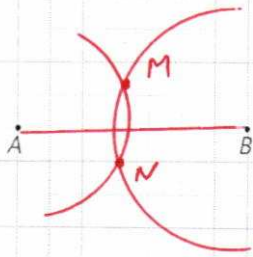
$$AU = 3$$

$$BU = 4$$

$$AB^2 = AU^2 + BU^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\Rightarrow AB = 5 \text{ cm}$$

کاردرکلاس



- الف) ۵ و ۶ و ۴
- ب) ۳ و ۳ و ۳
- پ) ۵ و ۱ و ۲

۱- دو نقطه مانند A و B را به فاصله ۳ سانتی متر از هم در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله شان از A، ۲ و از B، ۲/۵ سانتی متر باشد. **کافی است به مرکز A**
دو به شعاع ۲ و از نقطه B شعاع ۲/۵ کمانی به شعاع ۲/۵ رسم کنیم. نقاط تقاطع دو کمان
جواب مسئله هستند.
 ۲- توضیح دهید که چگونه می توان مثلثی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد. **ابتدا با خط کشی یک پایه خط به اندازه ۶ سانتی متر رسم می کنیم. سپس از دو سر این پایه خط یک کمان به شعاع ۴ و از یک کمان به شعاع ۵ رسم می کنیم. مثلث**
 ۳- جاهای خالی را به گونه ای کامل کنید که مسئله زیر: **ABC جواب مسئله است.**

- الف) دو جواب داشته باشد.
- ب) یک جواب داشته باشد.
- پ) جواب نداشته باشد.

نقاط A و B به فاصله از هم قرار دارند. نقطه ای پیدا کنید که فاصله اش از نقطه A برابر و از نقطه B برابر باشد.

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

فعالیت

۱- زاویه xOy و نیم خط Oz را نیمساز آن در نظر بگیرید. فرض کنید نقطه A نقطه ای دلخواه روی Oz باشد. ثابت کنید که فاصله نقطه A از دو ضلع زاویه xOy یکسان است. (یعنی اگر از نقطه A عمودهایی بر نیم خط های Ox، Oy رسم کنیم طول آنها باهم برابر است.)

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \quad \left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OA \text{ (مشترک)} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle OAK \Rightarrow AH = AK$$

(دو کمان زاویه حاده)

نتیجه

اگر نقطه ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، **فاصله آن از دو ضلع**

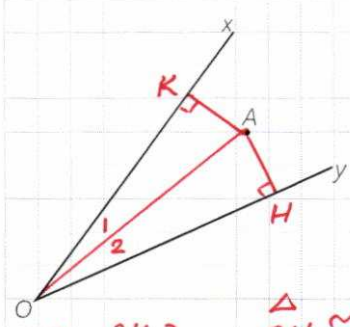
آن زاویه برابر فاصله هستند.

توجه: حالت همنهشتی (رضی ز) این دو کمان برابرند

۲- زاویه xOy و نقطه A را چنان در نظر می‌گیریم که فاصله نقطه A از نیم خط‌های Ox و Oy با هم برابر باشد.

نشان دهید که نقطه A روی نیمساز زاویه xOy قرار دارد.

(راهنمایی: پاره خط OA ، و دو عمود از نقطه A بر خطوط Ox و Oy رسم کنید و نشان دهید پاره خط OA همان نیمساز xOy است.)



$AH = AK$ } $\Rightarrow \triangle OAH \cong \triangle OAK \Rightarrow$
 (وگرنه ضلع) $OA = OA$ }
 $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$
 یعنی OA نیمساز زاویه xOy است.
 توجه: حالت (ض ز ض) را نیز می‌توان بکار برد.

نتیجه ۲
 اگر نقطه‌ای به فاصله یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه روی نیمساز زاویه قرار دارد.

نتیجه
 از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع زاویه به فاصله یکسان قرار دارد. و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

فعالیت

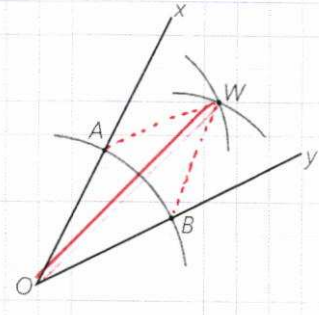
۱- زاویه xOy را در نظر بگیرید. دهانه پرگار را کمی باز کنید و به مرکز O کمانی بزنید تا نیم خط‌های Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند.

طول پاره خط‌های OA و OB نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
 $OA = OB$ چون توسط پرگار به مرکز O و شعاع یکسان رسم شده‌اند.

۲- دهانه پرگار را کمی باز کنید (بیش از نصف طول AB) و یک بار به مرکز A و بار دیگر با همان اندازه و به مرکز B یک کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل در نقطه‌ای مانند W همدیگر را قطع کنند.

طول پاره خط‌های AW و BW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
 $AW = BW$ چون شعاع پرگار ثابت مانده است.

پاره خط‌های WA و WB و WO را رسم کنید. دو مثلث OAW و OBW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
 به حالت تساوی سه ضلع



$OA = OB$
 $AW = BW$
 $OW = OW$ مشترک } $\Rightarrow \triangle OAW \cong \triangle OBW$
 (ض ض ض)
 $\Rightarrow \hat{AOW} = \hat{BOW}$

اندازه زاویه‌های AOW و BOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ مساوی چون دو مثلث مناسبت هستند.

پاره خط OW برای زاویه xOy چه نوع پاره خطی است؟
 نیمساز زاویه

\hat{xOy} است.

کاردرکلاس

روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید. ابتدا این زاویه دلخواه رسم کنیم. از رأس زاویه یک کمان پس از نقاط به سمت آمده دو کمان با شعاع‌ها مساوی رسم می‌کنیم طوری که این دو کمان متقاطع باشند. اگر نقطه‌ی تقاطع این دو کمان را به رأس زاویه وصل کنیم، نصف زاویه به دست می‌آید.

برخی خواص عمودمنصف و ترسیم آن

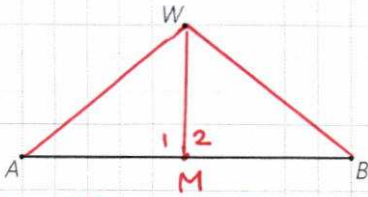
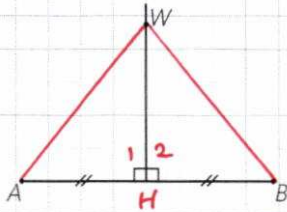
فعالیت

۱- پاره خط AB و عمودمنصف آن را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید و فرض کنید W نقطه‌ای روی عمودمنصف AB باشد. نشان دهید نقطه W از دوسر پاره خط AB به یک فاصله است. $\Rightarrow AW = BW$

$AH = BH$
 $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$
 $WH = WH$ (مترک)
 $\Rightarrow \triangle AWH \cong \triangle BWH \Rightarrow AW = BW$ (ض.ض.ض)

نتیجه ۱

اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره خط قرار داشته باشد، از دوسر آن پاره خط ... به یک فاصله است.



۲- پاره خط AB و نقطه W را به گونه‌ای در نظر بگیرید که نقطه W از A و B به یک فاصله باشد (یعنی $WA = WB$) نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.

(راهنمایی: از نقطه W به A و B و به وسط پاره خط AB وصل کنید و نشان دهید مثلث‌های ایجاد شده باهم هم‌نهشت هستند و از این مطلب استفاده کنید و نشان دهید W روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد.)

نتیجه ۲

اگر نقطه‌ای از دوسر یک پاره خط به یک فاصله باشد ... به نقطه وسط پاره خط قرار دارد.

نتیجه

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره خط باشد ... از دوسر آن پاره خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دوسر پاره خط به یک فاصله باشد ... روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

فعالیت

۱- یک نقطه را در صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از نقطه مورد نظر بگذرد؟ **بی شمار**

۲- دو نقطه را در یک صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن دو نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطه مورد نظر بگذرد؟ **فقط یک خط**

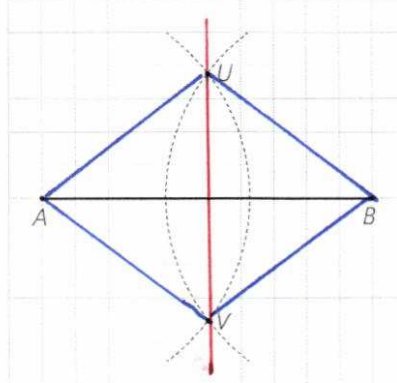
۳- به نظر شما برای اینکه یک خط به طور کامل مشخص باشد، حداقل چند نقطه از آن خط را باید داشته باشیم؟ **دو نقطه**

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

فعالیت

پاره خط AB را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید.
 ۱- دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار از نقطه A و بار دیگر با همان اندازه از نقطه B کمان بزنید تا یکدیگر را در دو نقطه مانند U و V قطع کنند.



۲- طول پاره خط‌های AU و BU نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟ مساوتند، زیرا اندازه شعاع دایره ثابت است.

۳- طول پاره خط‌های AV و BV نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟ مساوتند، زیرا اندازه شعاع دایره ثابت است.

۴- آیا می‌توان گفت نقاط U و V روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارند؟ چرا؟
بله، چون از دوسر پاره خط AB به یک فاصله هستند.

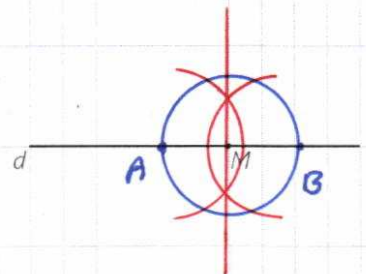
۵- عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.

کاردرکلاس

مراحل رسم عمود منصف یک پاره خط را توضیح دهید. پرگار را به اندازه بیش از نصف پاره خط AB باز کرده از هر طرف یک کمان رسم می‌کنیم (از نقاط A و B) خط حاصل از اتصال نقاط تقاطع این دو کمان عمود منصف AB است.
 ■ رسم خط عمود بر یک خط و رسم خط موازی با یک خط

فعالیت

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن خط d و نقطه M را روی آن، مانند شکل مقابل در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد.

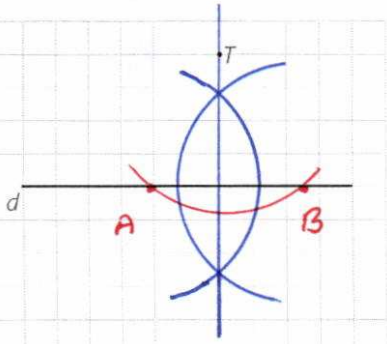


- ۱- به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d بیابید؛ به گونه‌ای که M وسط پاره خط AB باشد. به شعاع دلخواه که نامی به مرکز M رسم می‌کنیم تا خط d از نقاط A و B قطع کند.
- ۲- عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.
- ۳- عمود منصف پاره خط AB خطی است که بر خط d عمود... و از نقطه M بگذرد.

کاردرکلاس

مراحل رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن را توضیح دهید. ابتدا نقطه M دلخواه روی خط d در نظر بگیریم. به شعاع دلخواه یک دایره به مرکز M رسم می‌کنیم. حال عمود منصف پاره خط AB که از M می‌گذرد را رسم می‌کنیم.

فعالیت



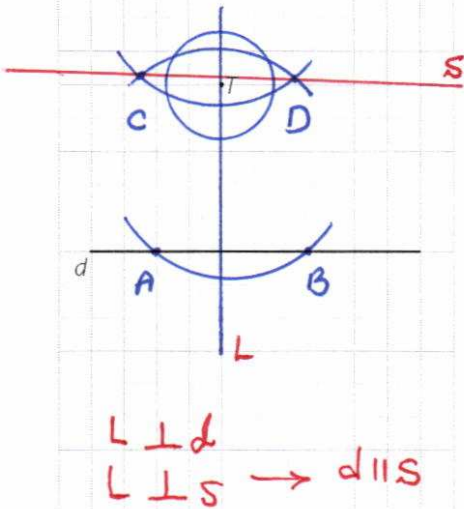
رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن خط d و نقطه T را که غیر واقع بر آن است، مانند شکل مقابل در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱- به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d به گونه‌ای بیابید که از نقطه T به یک فاصله باشند. به مرکز T کمانی رسم می‌کنیم که خط d را در دو نقطه متماثل قطع کند.

۲- عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.
 ۳- آیا عمود منصف پاره خط AB از نقطه T می‌گذرد؟ چرا؟ بله، زیرا نقطه T از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است. و از نقطه T بگذرد.

کاردکلاس

روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید. ابتدا از نقطه T کمانی رسم می‌کنیم که خط d را در دو نقطه A و B قطع کند. عمود منصف پاره خط AB خطی را رسم می‌کنیم که بر خط d عمود است.



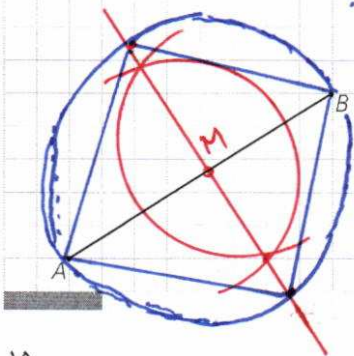
فعالیت

رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطه غیر واقع بر آن خط d و نقطه T مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه T بگذرد و با خط d موازی باشد.
 ۱- خط d_1 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه T بگذرد و بر خط d عمود باشد.
 ۲- خط d_2 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه T بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.
 ۳- خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورب در نظر بگیرید.)

کاردکلاس

روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید. ابتدا از نقطه T خط عمود بر d رسم می‌کنیم. خط دیگر عمود بر خط عمود بر d رسم می‌کنیم.

فعالیت



پاره خط داده شده AB در شکل مقابل را با اندازه 4 واحد در نظر بگیرید. الف) عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید و فرض کنید نقطه برخورد این عمود منصف با پاره خط AB ، M باشد.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

ب) به مرکز M و به شعاع AM دایره ای رسم کنید تا عمود منصف AB را در نقاط C و D قطع کند.

ب) چهار ضلعی ACBD چگونه چهار ضلعی ای است؟ چرا؟ مربع است
 زیرا قطرهای مربع چهار ضلعی هم بر هم عمودند و هم همدیگر را نصف می کنند.

کاردرکلاس

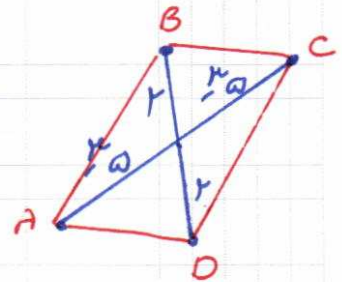
طریقه رسم مربعی را که طول قطر آن داده شده باشد، توضیح دهید. ابتدا عمود منصف قطر مربع را رسم می کنیم. از نقطه تقاطع عمود منصف و قطر (قطب) یک دایره با مرکز این نقطه و به شعاع نصف قطر رسم می کنیم. نقاط تقاطع دایره با عمود منصف را به نقاط دایره وصل می کنیم.



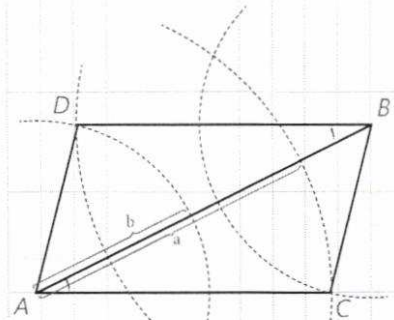
تمرین

۱- می دانیم چند ضلعی ای که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی الاضلاع است. متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می توان رسم کرد؟ دو باره خط طوری رسم می کنیم

که همدیگر را نصف کنند. با اتصال متوازی دایره ها چهار ضلعی مورد نظر (متوازی الاضلاع) حاصل می شود. بیانشمار
 ۲- می دانیم چند ضلعی ای که قطرهایش با هم برابر و منصف هم باشند، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی متر باشد.

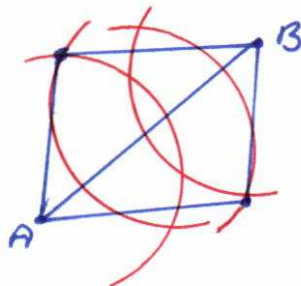


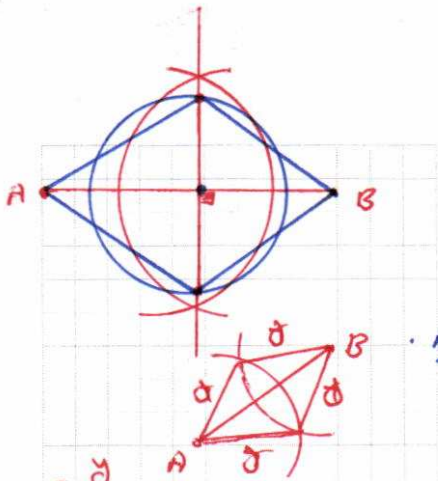
۳- پاره خط AB داده شده است. دهانه برگار را یک بار به اندازه a و بار دیگر به اندازه b باز می کنیم و از نقطه A دو کمان می زنیم. (به طوری که مجموع a و b از اندازه AB بزرگ تر باشد) سپس کمان هایی با همان اندازه ها، این بار از نقطه B می زنیم و مانند شکل، دو نقطه از نقاط برخورد را C و D می نامیم. چهار ضلعی ACBD چه نوع چند ضلعی ای است؟ چرا؟ (راهنمایی: ابتدا بررسی کنید که مثلث های ABC و ABD و زوایای A₁ و B₁ نسبت به هم چگونه اند.)



$$\left. \begin{array}{l} AC = BD \\ BC = AD \\ AB = AB \text{ مشترک} \end{array} \right\} \rightarrow \triangle ABC \cong \triangle ABD \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow AC \parallel BD \left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{چهار ضلعی} \\ \text{ACBD متوازی} \\ \text{الاضلاع است.} \end{array} \right\} \text{ چون } AC = BD$$

۴- متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد. مشابه تمرین ۳ ابتدا قطر را رسم می کنیم.





۵- می دانیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمود منصف یکدیگر باشند. ترسیم های زیر را انجام دهید.

الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد. دوباره خط عمود بهم کین به طول ۳ و دیگری به طول ۵ رسم می کنیم. چه وضعی به دست می آید.

ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.

ما تئد رسم متوازی الاضلاع ابتدا قطر را رسم می کنیم.

۶- دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

الف) نقطه ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه مورد نظر ۲ واحد باشد.

ب) نقطه ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه مورد نظر ۴ واحد باشد.

پ) با استفاده از الف) و ب) نیمساز زاویه مورد نظر را رسم کنید.

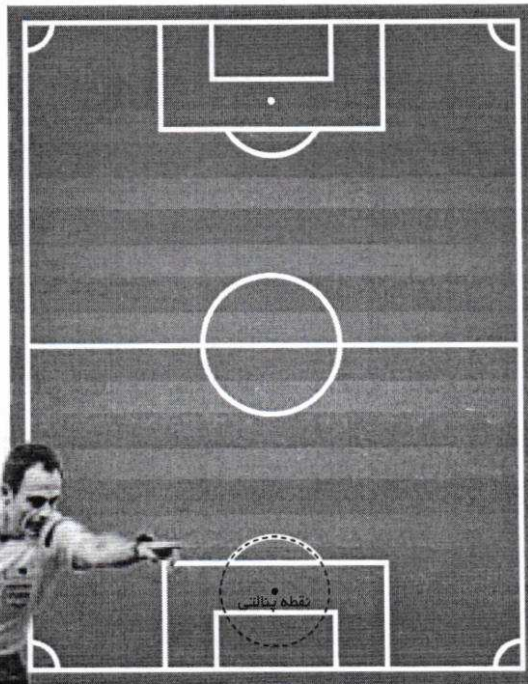
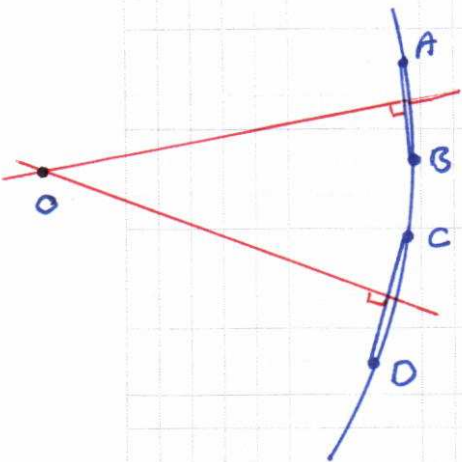
ابتدا از نقطه ی دلخواه روی ضلع OC خطی موازی AB و به فاصله 2 سانتی متر رسم می کنیم. سپس از نقطه ی دلخواه دیگری روی ضلع OC خطی موازی AB و به فاصله 4 سانتی متر رسم می کنیم. وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمود منصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه اند؟ چرا؟

عمود منصف AB از نقطه O می گذرد. چون O از هر دو پاره خط AB می گذرد.

آیا می دانستید که در زمین فوتبال نقطه پنالتی مرکز دایره ای است که قسمتی از قوس آن در جلوی محوطه جریمه کشیده شده است؟

یک داور فوتبال لحظه ای که اعلام پنالتی می کند، متوجه می شود که نقطه پنالتی مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد، چگونه می تواند با استفاده از قوس جلوی محوطه هجده قدم، نقطه پنالتی را مشخص کند.

نقطه پنالتی محل تقاطع دو دایره از قوس جلوی محوطه هجده قدم است.



اگر به همیچ کرکتی موارد قبل را بر خط OC انجام دهیم و محل تقاطع خطوط را A و B بنا کنیم. در این صورت نقطه A (به فاصله 2 سانتی متر از هر ضلع زاویه) و نقطه B (به فاصله 4 سانتی متر از هر ضلع زاویه) به دست می آید. طبق ویژگی نیمساز زاویه نقطه A و B از هر ضلع زاویه به یک فاصله اند. پس ابتدا دایره خط AB عمود بر آنیله از نقطه O می گذرد، نیمساز زاویه OC می باشد.