درس دوم

استدلال

شیوهٔ درست استدلال در زندگی هر فرد و نیز در جامعهٔ انسانی اهمیت فراوانی دارد. استدلال نادرست در بسیاری مواقع، نتیجه‌گیری‌های غلط، تیره‌شدن روابط، ایجاد باورهای نادرست و پیامدهای خطرناک فردی و اجتماعی دیگری را در پی خواهد داشت و حتی ممکن است به ایجاد مشکلات شخصیتی در افراد بینجامد. ممکن است فردی با استدلال‌هایی این‌گونه، همواره راه موفقیت را بر خود بسته ببیند :

ــ من در اولین امتحانم موفق نشدم، پس در امتحان‌های بعدی نیز موفق نخواهم شد.

ــ تیم مورد علاقهٔ من از ابتدای فصل در تمام بازی‌هایش شکست خورده است، پس در بازی‌آینده نیز شکست خواهد خورد.

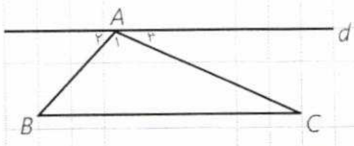
استقرا و استنتاج

در سال‌های قبل تاحدی با استدلال و اثبات آشنا شدید. نوعی از استدلال، که با آن روبه‌رو شدید به این صورت بود که از مشاهدات و بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع گرفته می‌شود یا به اصطلاح «از جزء به کل می‌رسیم». البته با چنین استدلالی نمی‌توان همواره به درستیِ نتیجهٔ گرفته‌شده مطمئن بود.

به‌طور مثال اگر فردی با مشاهدهٔ اینکه سه نفر از افراد یک کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، نتیجه‌گیری کند که همهٔ افراد آن کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، فرد مورد نظر از **استدلال استقرایی** استفاده کرده است.

نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شدید، براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم و به آن **استدلال استنتاجی** گفته می‌شود.

به‌طور مثال با دانستن رابطهٔ بین خطوط موازی و مورّب و زوایای بین آنها، اثبات اینکه مجموع زوایای داخلی یک مثلث 180° است به طریق مقابل، یک استدلال استنتاجی است که با نمادهای ریاضی نوشته شده است. توجه کنید که استدلال استنتاجی را به صورت کلامی نیز می‌توان انجام داد.



$$d \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \hat{B}=\hat{A}_2 \\ \hat{C}=\hat{A}_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{A}_3=180^\circ$$

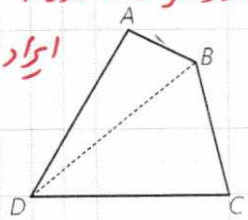
فعالیت

به استدلال‌هایی که دو دانش‌آموز برای مسئلهٔ زیر ارائه داده‌اند، دقت کنید و در مورد میزان اعتبار هریک از آنها گفت‌وگو کنید.

مسئله : مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

پژمان : در تمام چهارضلعی‌های مربع، مستطیل، لوزی و متوازی‌الاضلاع با توجه به اینکه زاویه‌های مجاور مکمل یکدیگرند به‌سادگی ثابت می‌شود که مجموع زوایای داخلی آنها 360° است. بنابراین مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

در استدلال پژمان فقط چهارضلعی‌های خاص در نظر گرفته شده است. بنابراین ایراد دارد.



پیمان : می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است. یک چهارضلعی دلخواه مانند ABCD در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم و دو رأس مقابل آن، مثلاً D و B را به هم وصل می‌کنیم.

مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD با مجموع زاویه‌های داخلی دو مثلث $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{BCD}$ برابر است؛ بنابراین مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD برابر است با 360°.

استدلال پیمان از کل به جزء است و کاملاً درست می‌باشد.

پیمان ادعا می‌کند که با این استدلال ثابت می‌شود که مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی برابر 360° است. آیا به نظر شما این ادعای او درست است؟

آیا همین استدلال را برای هر چهارضلعی دیگری که به شما بدهند، می‌توانید به‌کار ببرید؟ اگر جواب شما مثبت است، پس این ویژگی را که «مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی ABCD در مسئلهٔ قبل برابر 360° است»، به سایر چهارضلعی‌های محدب می‌توان تعمیم داد.

ــ نوع استدلال ارائه‌شده توسط هرکدام از دانش‌آموزان را بیان کنید.

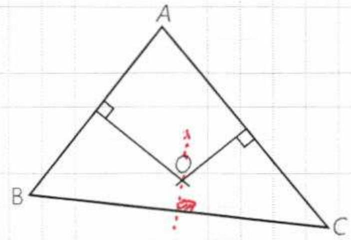
پژمان : استدلال استقرائی (از جزء به کل)

پیمان : استدلال استنتاجی (از کل به جزء)

مثال : می‌دانیم که هر نقطهٔ روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سرِ آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که **سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث همرس‌اند (در یک نقطه به هم می‌رسند).**

استدلال : مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. چون پاره‌خط‌های AB و AC متقاطع‌اند، عمودمنصف‌های آنها نیز در نقطه‌ای مانند O متقاطع‌اند.

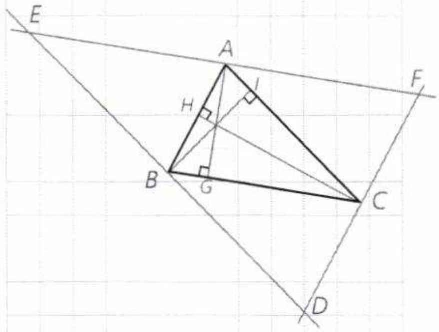


۱ــ نقطهٔ O روی عمودمنصف پاره‌خط AC است؛ بنابراین $OA = OC$

۲ــ نقطهٔ O روی عمودمنصف پاره‌خط AB است؛ بنابراین $OA = OB$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : $OB = OC$. بنابراین نقطهٔ O روی عمود منصف قرار دارد. درنتیجه نقطهٔ O محل برخورد عمود منصف های اضلاع مثلث ABC است.

مثال : استدلال استنتاجی زیر را کامل کنید و نتیجه بگیرید که سه ارتفاع هر مثلث همرس‌اند.



استدلال : مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید و از هر رأس آن خطی به موازات ضلع مقابل به آن رأس رسم کنید تا مطابق شکل مقابل مثلثی مانند DEF به‌وجود آید.

چهارضلعی ABCF چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ چرا؟ متوازی الاضلاع، اضلاع مقابل موازنند.

بنابراین $BC = AF$ ❶

ــ چهارضلعی ACBE چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ چرا؟ متوازی الاضلاع، اضلاع مقابل موازنند

بنابراین $BC = AE$ ❷

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : $AE = AF$؛ بنابراین نقطهٔ A وسط پاره‌خط EF است.

$$\left.\begin{matrix} AG \perp BC \\ BC \parallel EF \end{matrix}\right\} \Rightarrow AG \boxed{\perp} EF$$

لذا خط AG عمود منصف پاره‌خط EF است.

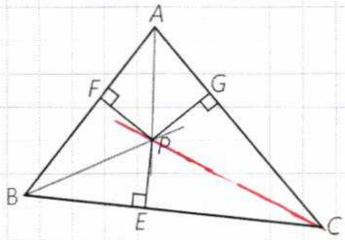
به‌طور مشابه می‌توان نشان داد :

پاره‌خط BI، عمود منصف پاره‌خط DE است.

پاره‌خط CH، عمود منصف پاره‌خط DF است.

بنابراین، ارتفاع‌های مثلث ABC، روی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث DEF هستند و درنتیجه همرسند.

مثال : می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث همرس‌اند.



استدلال : مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. نیمسازهای زوایای A و B مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کنند. از نقطهٔ P، مانند شکل سه عمود به اضلاع مثلث رسم می‌کنیم.

۱ــ نقطهٔ P روی نیمساز زاویهٔ A است؛ بنابراین ...P.F... = ...P.G...

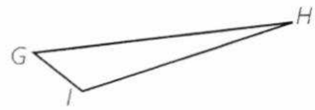
۲ــ نقطهٔ P روی نیمساز زاویهٔ B است؛ بنابراین ...P.F... = ...P.E...

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : ...P.G... = ...P.E... بنابراین نقطهٔ P روی نیمساز زاویهٔ C است.

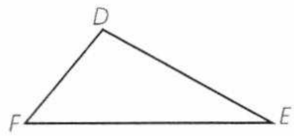
درنتیجه نقطهٔ P محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های مثلث ABC است.

فعالیت

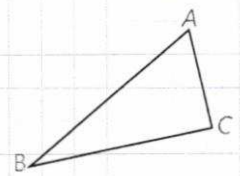
به مثلث‌های زیر دقت کنید. در سطر اولِ جدول، نام اضلاع مثلث را به ترتیب از بزرگ به کوچک و در سطر دوم، نام زاویه‌های مثلث را نیز به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسید.



اضلاع	GH	HI	GI
زاویه‌ها	I	G	H



اضلاع	EF	DE	DF
زاویه‌ها	D	F	E



اضلاع	AB	BC	AC
زاویه‌ها	C	A	B

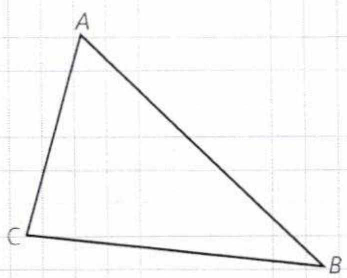
چه رابطه‌ای بین هر ضلع و زاویهٔ زیر آن وجود دارد؟ زاویهٔ بزرگ‌تر روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر است.

با توجه به این رابطه دربارهٔ یک مثلث دلخواه چه حدسی می‌توان زد؟ در هر مثلث زاویهٔ بزرگ‌تر، روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر است.

برای رسیدن به این حدس از چه نوع استدلالی استفاده کردید؟ استقرایی

آیا با این استدلال می‌توان مطمئن بود که حدس موردنظر درست است؟ خیر، نمی‌توان از نتیجهٔ به دست آمده مطمئن بود

مسئله : اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند،
زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.



استدلال : برای واضح‌شدن مطلب و کمک به حل مسئله، شکل مثلث را رسم می‌کنیم. آیا می‌توان هر نوع مثلث دلخواهی کشید؟ مانند آنچه در مسئله گفته شده است، مثلثی می‌کشیم که دو ضلع نابرابر داشته باشد و ویژگی خاص دیگری نداشته باشد.

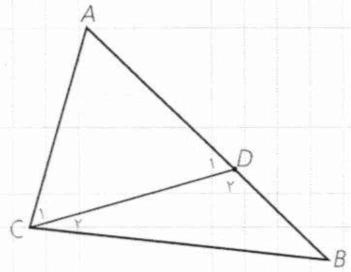
فرض: AB>AC
حکم: $\hat{C}$ > $\hat{B}$

یاد آوری

۱ـ در مثلث متساوی‌الساقین زوایای روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند.

۲ـ اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی یک مثلث برابر است با مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش. بنابراین هر زاویهٔ خارجی مثلث از هر زاویهٔ داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.

می‌دانیم طبق فرض AB>AC است؛ لذا می‌توانیم نقطهٔ D را روی AB جایی انتخاب کنیم که AC=AD



★ اندازهٔ زاویه‌های C و C_1 نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{C} \boxed{>} \hat{C}_1$

مثلث ADC چه نوع مثلثی است؟ متساوی الساقین

★★ اندازهٔ زاویه‌های C_1 و D_1 نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{C}_1 \boxed{=} \hat{D}_1$

زاویهٔ D_1 چه نوع زاویه‌ای برای مثلث DBC است؟ خارجی

★★★ اندازهٔ زاویه‌های D_1 و B نسبت به هم چگونه‌اند؟ $\hat{D}_1 \boxed{<} \hat{B}$

از ★ و ★★ و ★★★ چه نتیجه‌ای دربارهٔ اندازهٔ زاویه‌های B و C می‌توان گرفت؟

$\hat{C} \boxed{>} \hat{B}$

همان‌طورکه مشاهده کردید در مثلثی مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ فرض کردیم که ضلع AB>AC است و نشان دادیم: زاویهٔ روبه‌رو به AC < زاویهٔ روبه‌رو به AB است.

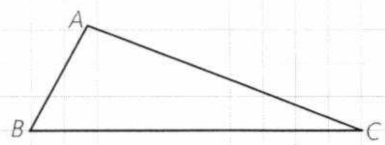
چرا می‌توان این موضوع را دربارهٔ تمام مثلث‌هایی که دو ضلع نابرابر دارند، پذیرفت؟

زیرا این اثبات مبتنی بر واقعیت هایی است که درستی آنها را قبول داریم که می باشد (استدلال استنتاجی)

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که مانند مسئلهٔ قبل با استدلال استنتاجی به‌دست می‌آید، **قضیه** نامیده می‌شود.

قضیه ۱: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند،
زاویهٔ روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ رو به‌رو به ضلع کوچک‌تر.

فرض: AB<AC
حکم: $\hat{C} < \hat{B}$



ـ بار دیگر به آنچه انجام شد، دقت کنید. بررسی اندازه‌های اضلاع و زوایای مثلث‌های مختلف، دقت در کشف رابطه میان این اندازه‌ها، حدس در برقراری رابطه‌ای خاص، طرح مسئله، اثبات درستی مسئله و نهایتاً نتیجه‌گیری.

بسیاری از نتایج ریاضی، طی چنین مراحلی توسط علاقه‌مندان به ریاضی به‌دست آمده است. مراحل این روند و حتی حدس‌ها و تفکراتی که درست نیست اما در این مراحل صورت می‌گیرد، می‌تواند موجب ارتقای تفکر ریاضی شود.

اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود «عکس قضیه» گفته می‌شود. عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

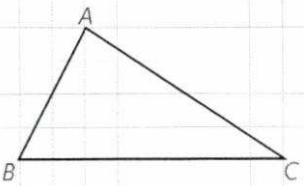
به‌طور مثال عکس قضیهٔ ۱ به‌صورت زیر است:

عکس قضیه ۱ در صفحات بعد اثبات شده‌است.

عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.

فرض: $\hat{C} < \hat{B}$

حکم: $AB < AC$



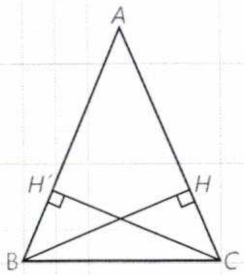
مثال:

قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه: اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مثال:

قضیه: اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.



فرض: $AB = AC$

حکم: $BH = CH'$

عکس قضیه: اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH = CH'$

حکم: $AB = AC$

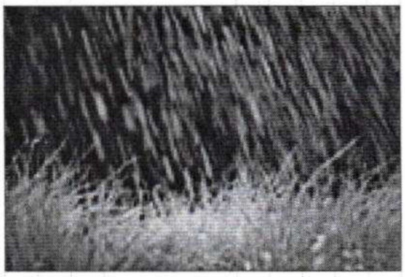
درواقع معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض، که حکم از آن ناشی می‌شود با حکم جابه‌جا می‌شود؛ مثلاً در مثال قبل مثلث‌بودن ABC و ارتفاع‌بودن BH و CH' در خود قضیه و عکس آن جزء مفروضات است.

گزاره یک جملهٔ خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد؛ اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزارهٔ ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزارهٔ ساده باشد که به آن گزاره مرکب می‌گویند؛ مثلاً گزاره‌های «فردا هوا بارانی است» و «پانزده عددی اول است»، هرکدام یک گزارهٔ ساده است و «فردا هوا بارانی و پانزده یک عدد اول است» یک **گزارهٔ مرکب** است.

جمله‌های زیر مثال‌هایی از گزاره است :

ـ مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

ـ ۲>۳



جمله‌های زیر گزاره نیست :

ـ آیا فردا هوا بارانی است؟

ـ چه هوای خوبی!

ـ کتابت را مطالعه کن.

نقیض یک گزاره : همان‌طورکه گفته شد، ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست. نقیض یک گزاره مانند مثال‌های زیر ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

مثال :

الف) گزاره : «a از b بزرگ‌تر است.»

نقیض آن : «چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد.» که معادل است با «a از b بزرگ‌تر نیست.» و معادل است با «a از b کوچک‌تر و یا با b برابر است.»

ب) گزاره : «مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.»

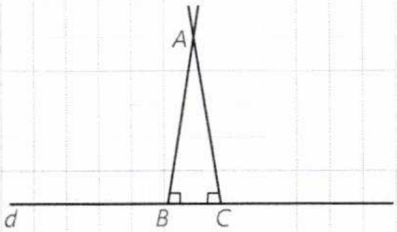
نقیض آن : «چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.» که معادل است با «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست.»

پ) گزاره : «یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی‌اش 360° نیست.»

نقیض : «چنین نیست که یک چهارضلعی وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی‌اش 360° نیست.» که معادل است با «هر چهارضلعی مجموع زوایای داخلی‌اش 360° است.»

در برخی گزاره‌ها به‌جای اینکه دربارهٔ چیزی خبری قطعی داده شود، خبری که اعلام می‌شود با یک شرط بیان می‌شود؛ مثلاً «اگر باران ببارد، مسابقه برگزار نخواهد شد.» به چنین گزاره‌هایی، **گزاره‌های شرطی** می‌گویند.

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد، برهان غیرمستقیم یا برهان خلف است. بدین‌صورت که به‌جای اینکه به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (یا به عبارتی فرض می‌کنیم، نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض یا به یک امر غیرممکن می‌رسیم.



مثال : از یک نقطه غیر واقع بر خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.

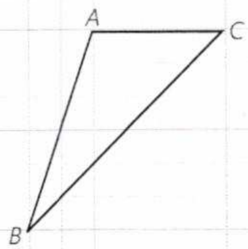
فرض : نقطه‌ای مانند A غیر واقع بر خطی مانند d وجود دارد.

حکم : از نقطهٔ A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم کرد.

استدلال : با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم غلط باشد؛ یعنی فرض می‌کنیم از نقطهٔ A دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که مانند شکل، خط d را در نقاط B و C قطع کرده‌اند. در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث ABC بزرگ‌تر از 180° خواهد شد و این غیرممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطهٔ غیر واقع بر یک خط وجود ندارد؛ یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.

حال می‌خواهیم عکس قضیهٔ ۱ را با برهان غیرمستقیم ثابت کنیم.

عکس قضیهٔ ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.



برای واضح شدن مسئله و کمک به حل آن، شکل مثلث را رسم می‌کنیم و با استفاده از آن فرض و حکم را می‌نویسیم.

فرض : $\hat{A} > \hat{B}$

حکم : $BC > AC$

اثبات : با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم...نادرست... باشد. بنابراین باید $BC < AC$ یا $BC = AC$.

هر دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر دو حالت به تناقض منجر می‌شود.

حالت اوّل : اگر $BC < AC$ باشد، طبق قضیهٔ ۱ باید $\hat{A} < \hat{B}$، که با فرض در تناقض است.

حالت دوّم : اگر $BC = AC$ باشد، $\overset{\Delta}{ABC}$ یک مثلث...متساوی الساقین... خواهد بود و می‌دانیم در این حالت باید $\hat{A} = \hat{B}$ باشد که در تناقض با فرض است. لذا هر دو حالت $BC < AC$ و $BC = AC$ غیرممکن‌اند؛ بنابراین $BC > AC$ است و حکم درست است.

قضیه‌های دو شرطی

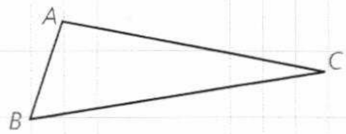
همان‌گونه که دیدیم، قضیهٔ ۱ و عکس آن هر دو درست است؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم که :

> اگر در مثلثی، دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچک‌تر، و برعکس.

چنین قضیه‌هایی را «قضیه‌های دوشرطی» می‌نامیم.

قضیه‌های دو شرطی را می‌توان با نماد $\Leftrightarrow$ (اگر و تنها اگر) بیان کرد؛ به‌طور مثال قضیهٔ فوق و عکس آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :

فرض کنیم $\overset{\Delta}{ABC}$ یک مثلث باشد



$$BC > AB \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A} < \hat{C}$$

مثال : در یک مثلث، دو ضلع با هم برابرند؛ اگر و تنها اگر ارتفاع‌های نظیر آنها با هم برابر باشند.

مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شده‌اید، استدلال با مثال نقض است. گاهی در برخی موضوعات (چه ریاضی و چه غیرریاضی) یک حکم به‌صورت کلی بیان می‌شود؛ بدین‌صورت که در مورد تمام اعضای یک مجموعه یک حکم بیان می‌شود. موارد زیر نمونه‌هایی از حکم‌های کلی است :

الف) «همهٔ اعداد صحیح، مثبت‌اند.» (حکمی کلی در مورد تمام اعداد صحیح)

ب) «هر چهار ضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌هایی که چهار ضلع برابر دارند)

پ) «مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب ۳۶۰° است.» (حکم کلی در مورد تمام چهارضلعی‌های محدب)

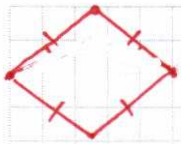
ت) «به‌ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت $n^۲ + n + ۴۱$ عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

حدس خود را دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم کلی «الف» بنویسید. چگونه می‌توانید درستی حدس خود را ثابت کنید؟

می‌دانیم که (۲−) یک عدد صحیح و منفی است؛ بنابراین حکم کلی «الف» با ارائهٔ

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان



همین مثال رد می‌شود. به چنین مثالی که نشان می‌دهد یک حکم کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود. دربارهٔ درستی یا نادرستی «ب» چه می‌توانید بگویید؟ نادرست. چهارضلعی ممکن است لوزی نباشد.

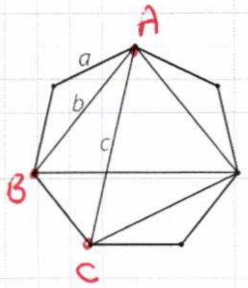
اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض بیاوریم، دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟ ممکن است درست باشد. آیا در موارد (پ) و (ت) می‌توانید مثال نقض پیدا کنید؟ خیر

آیا اگر در مورد یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض پیدا کنیم، باید درستیِ آن حکم کلی را نتیجه‌گیری کنیم؟ در مورد (پ) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این برای پذیرش حکم کلی (پ) کافی نیست و باید توجه کرد که «برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید اثبات ارائه کنیم.» دربارهٔ گزینهٔ (ت) چه می‌توان گفت؟ مثال نقض دارد. اگر $n = ۴۱$ آنگاه

$$۴۱^۲ + ۴۱ + ۴۱ = ۴۱(۴۱ + ۱ + ۱) = ۴۱ \times ۴۳$$ عدد اول نیست

اگر درستی یک حکم کلی را نتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن مثال نقض نیز نتوانیم بیابیم، نمی‌توان دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم کلی، نتیجه‌ای گرفت.

کاردرکلاس



۱ــ در شکل مقابل نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت‌ضلعی منتظم به طول ضلع a می‌باشند. فاصلهٔ هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ «با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی‌الساقین، به‌دست می‌آید».

خیر: مثلث ABC متساوی الساقین نیست.

۲ــ آیا حکم‌های کلی زیر درست است؟ چرا؟

الف) برای هر دو مجموعهٔ A و B، یا $A \subseteq B$ و یا $B \subseteq A$ خیر

$A = \{۱, ۲\}$

$B = \{۳, ۴, ۵\}$

$A \nsubseteq B$ و $B \nsubseteq A$

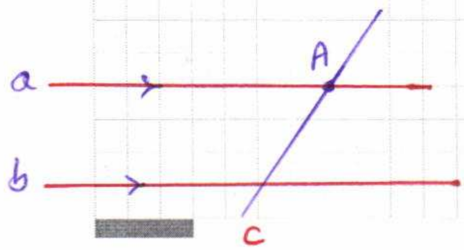
ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت‌اند. خیر

مثلث اول $a = ۸ , h = ۳ \Rightarrow S_1 = \frac{۳ \times ۸}{۲} = ۱۲$

مثلث دوم $a = ۱۲ , h = ۲ \Rightarrow S_2 = \frac{۲ \times ۱۲}{۲} = ۱۲$

ولی دو مثلث هم نهشت نیستند.

تمرین



۱ــ می‌دانیم که از یک نقطهٔ خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند. فرض کنیم که خط c خط b را قطع نکند

پس $c \parallel b$ و این به این معنی است که از نقطه‌ی A دو خط موازی b رسم شده است و این ممکن نیست. لذا خط c باید خط b را قطع کند.

۲ــ با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC، $AB \neq AC$ آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$.

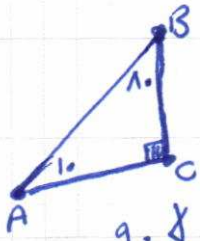
فرض کنیم که $\hat{B} = \hat{C}$ لذا باید $AB = AC$ باشد و این مخالف فرض است.

۳ــ گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازهٔ بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

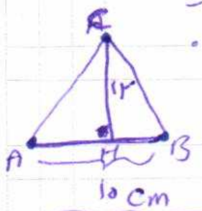
ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هرکدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

۳) الف)



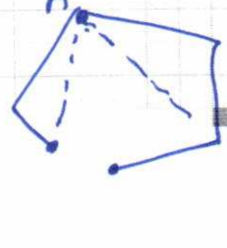
$۹۰ \not< ۴(۱۰)$

۳) ب) در مثلث زیر ارتفاع CH از ضلع AB کوچکتر نیست. مثال نقض



۴ــ با استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با $(n-۲) \times ۱۸۰^\circ$.

۴) در یک n ضلعی محدب اگر رأس معینی را A بنامیم از این رأس n − ۳ قطر می‌گذرد (چرا؟) و لذا $(n-۳)+۱ = n-۲$ مثلث متمایز ایجاد می‌شود. مجموع زاویه‌های داخلی این مثلث‌ها یعنی $(n-۲) \times ۱۸۰$ برابر مجموع زاویه‌های داخلی n ضلعی محدب است.



۵ــ نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) هر لوزی یک مربع است. — هر لوزی یک مربع نیست.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست. — مستطیلی وجود دارد که مربع است.

پ) هیچ مثلثی بیش از یک زاویهٔ قائمه ندارد. — همه مثلث‌ها بیش از یک زاویه قائمه دارند.

ت) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر ۳۶۰° است.

مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر ۳۶۰° نیست.

۶ــ عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه دوشرطی بنویسید.

الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آنها نیز برابرند.

ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.

پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

عکس قضیه: الف) در هر مثلث اگر دو زاویه روبرو به دو ضلع برابر باشند آنگاه آن دو ضلع برابرند.

قضیه دوشرطی: در هر مثلث اگر دو ضلع برابر باشند، زاویه‌های روبرو به آن دو ضلع نیز برابرند و برعکس

ب) اگر قطرهای یک چهارضلعی عمود منصف همدیگر باشند آنگاه چهارضلعی لوزی است.

قضیه دوشرطی: یک چهارضلعی لوزی است اگر و تنها اگر قطرهای آن عمود منصف همدیگر باشند.

پ) در هر مثلث اگر سه زاویه برابر باشند آنگاه سه ضلع مساویند.

قضیه دوشرطی: اگر سه ضلع مثلثی برابر باشند آنگاه سه زاویه برابرند و برعکس

ت) اگر دو دایره مساحت‌های برابر داشته باشند آنگاه شعاع‌های آنها برابرند.

قضیه دوشرطی: اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌ها برابر دارند و برعکس