

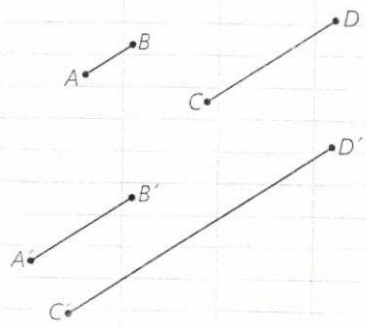
نسبت و تناسب در هندسه

با نسبت و تناسب آشنایی دارید و ویژگی اصلی آن، یعنی برابری حاصل ضرب طرفین و وسطین را می‌شناسید؛ یعنی می‌دانید که اگر  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  (ب، d ≠ 0) آنگاه  $ad = bc$  و برعکس؛ از تساوی  $xy = zt$  با شرط  $t, y \neq 0$  تناسب  $\frac{x}{t} = \frac{z}{y}$  نتیجه می‌شود. نسبت اندازه‌های دو پاره‌خط در هندسه هم به همین صورت تعریف می‌شود به شرطی که هر دو با یک واحد اندازه‌گیری بیان شده باشند؛ مثلاً اگر AB پاره‌خطی به طول 2 cm و CD پاره‌خطی به طول 5 cm باشد،  $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{5}$ . حال فرض کنید  $A'B' = 4$  cm و  $C'D' = 10$  cm در این صورت

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

و بنابراین یک تناسب به صورت  $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$  درست می‌شود. بدیهی است که اگر نسبت AB به CD  $\frac{2}{5}$  باشد، نسبت CD به AB  $\frac{5}{2}$  است.

کلاس نسبت و تناسب لازم است.



۱ فعالیت

مثلث ABC و ارتفاع‌های BD و CE از آن را در نظر بگیرید. مساحت مثلث ABC را یک بار با در نظر گرفتن قاعده AC و ارتفاع BD و بار دیگر با در نظر گرفتن قاعده AB بنویسید.

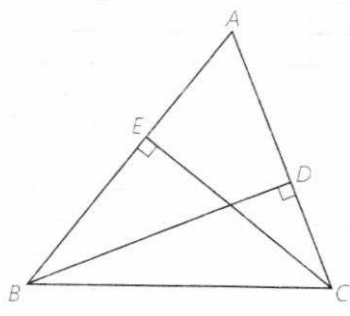
$$\text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} AC \times BD$$

$$\text{مساحت } ABC = \frac{1}{2} AB \times CE$$

عبارت‌های سمت راست، هر دو مساوی یک چیزند.

بنابراین  $AC \times BD = AB \times CE$  آیا می‌توانید از آنجا یک تناسب بنویسید؟

پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. آیا همه به یک جواب رسیده‌اند؟ تفاوت پاسخ‌ها چه چیزی را نشان می‌دهد؟

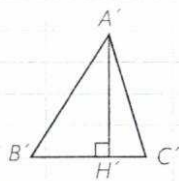
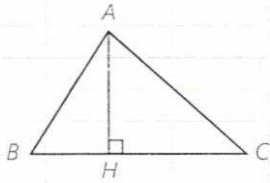


$$\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BD} \quad \text{و} \quad \frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC}$$



با توجه به فعالیت بالا، جای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید.

در هر مثلث، نسبت اندازه های هر دو ضلع، با عکس نسبت *ارتفاع* ... وارد بر آنها برابر است.



۲ فعالیت

در شکل مقابل ارتفاع های AH و A'H' در دو مثلث ABC و A'B'C' هم اندازه اند (AH = A'H')

با پرکردن جاهای خالی و انجام عملیات ریاضی، نتیجه زیر را به دست آورید.

$S_{ABC} = \text{مساحت} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC$

$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot A'H' \cdot B'C'$

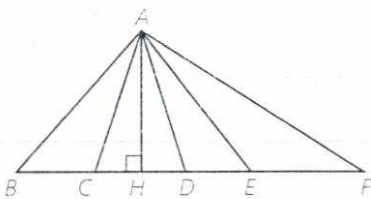
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC}{\frac{1}{2} \cdot A'H' \cdot B'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

۱ نتیجه

هرگاه اندازه ارتفاع های دو مثلث برابر باشد، نسبت مساحت های آنها برابر با نسبت اندازه قاعده هایی است که این ارتفاع ها بر آنها وارد شده است.

کارد کلاس

در شکل مقابل مثلث های ABC، ACD، ADE، AEF را که در رأس A مشترک اند، در نظر بگیرید. ارتفاع متناظر با رأس A همه این مثلث ها کدام پاره خط است؟



با توجه به نتیجه فعالیت (۲) جاهای خالی را پر کنید :

$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \dots$

$\frac{S_{ACD}}{S_{AEF}} = \dots$

$\frac{S_{ACE}}{S_{ABF}} = \dots$

~~$\frac{\frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC}{\frac{1}{2} \cdot AH \cdot CD}$~~

~~$\frac{\frac{1}{2} \cdot AH \cdot CD}{\frac{1}{2} \cdot AH \cdot EF}$~~

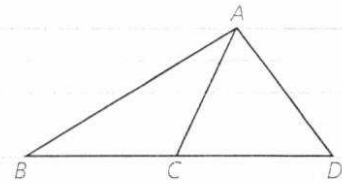
~~$\frac{\frac{1}{2} \cdot AH \cdot CE}{\frac{1}{2} \cdot AH \cdot BF}$~~

$\frac{BC}{CD}, \frac{CD}{EF}, \frac{CE}{BF}$

## نتیجه ۲

اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعده مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت اندازه قاعده‌های آنهاست. مثلاً در شکل روبه‌رو:

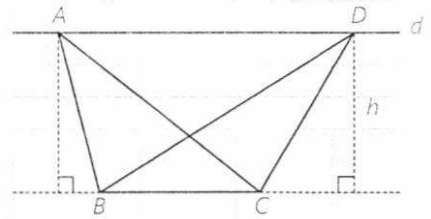
$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\text{مساحت } ABC}{\text{مساحت } ACD} = \frac{BC}{CD}$$



## کاردرکلاس

در شکل روبه‌رو خط d با BC موازی است. چرا ارتفاع‌های وارد بر قاعده BC در مثلث‌های ABC و DBC با هم برابر است؟ اگر طول این ارتفاع‌ها را h بنامیم و طول BC را با a نمایش دهیم، مساحت این مثلث‌ها چقدر است؟

$$\frac{1}{2} h \times a$$



## نتیجه ۳

اگر دو مثلث، قاعده مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعده آنها، روی یک خط موازی این قاعده باشند، این مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند. مثلاً در شکل بالا مثلث‌های ABC، DBC هم‌مساحت‌اند.

## ویژگی‌های تناسب

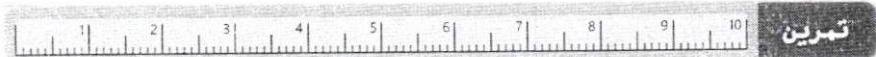
به کمک اعمال و روش‌های جبری می‌توان از هر تناسب، تناسب‌ها یا تساوی‌های دیگری را نتیجه گرفت. مهم‌ترین این ویژگی‌ها به شرح زیر است (اثبات درستی این ویژگی‌ها را در مجله ریاضی انتهای فصل می‌توانید ببینید)

|   |  |   |   |                              |
|---|--|---|---|------------------------------|
| ۱ | $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$  | $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} \Leftrightarrow 3 \times 10 = 5 \times 6$               | $b \text{ و } d \neq 0$                           | (طرفین وسطین کردن)           |
| ۲ | $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$  | $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$                 | $a \text{ و } b \text{ و } c \text{ و } d \neq 0$ | (معکوس کردن طرفین تناسب)     |
| ۳ | $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$         | $\frac{2}{3} = \frac{6}{9} \Rightarrow \frac{9}{3} = \frac{6}{2}$                   | $a \text{ و } b \text{ و } c \text{ و } d \neq 0$ | (تعویض جای طرفین یا وسطین)   |
| ۴ | $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ یا $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ | $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$                  | $b \text{ و } d \neq 0$                           | (ترکیب نسبت در صورت یا مخرج) |
| ۵ | $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ یا $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ | $\frac{30}{21} = \frac{20}{14} \Rightarrow \frac{9}{21} = \frac{6}{14}$             | $b \text{ و } d \neq 0$                           | (تفصیل نسبت در صورت یا مخرج) |
| ۶ | $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$                      | $\frac{4}{6} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{12}{18} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6}$ | $b \text{ و } d \neq 0$                           |                              |

تهیه کننده:

|   |   |
|---|---|
| $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}$ | $b_1, b_2, \dots, b_n \neq 0$ (تعمیم ویژگی ۶) |
| $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{2+4+6+8}{3+6+9+12} = \frac{20}{30}$                          |   |

**تعریف واسطه (میانگین) هندسی:** اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشد؛ یعنی  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$  یا  $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$  با طرفین وسطین کردن تناسب، نتیجه می‌شود:  $b^2 = ac$ . در این صورت  $b$  را واسطه هندسی  $a$  و  $c$  می‌نامیم. مثلاً اگر دو پاره‌خط به طول‌های ۴ و ۹ واحد داشته باشیم، پاره‌خطی که ۶ واحد طول دارد، واسطه هندسی بین آنهاست (چرا؟)



$$\frac{x+\delta+z}{\delta} = \frac{r}{\delta} \rightarrow x+\delta+z = \frac{r}{\delta} \delta$$

۱- اگر  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = \frac{3}{5}$  حاصل  $x+y+z$  را به دست آورید.

$$x^2 = 10 \times 1 \rightarrow x = \sqrt{10}$$

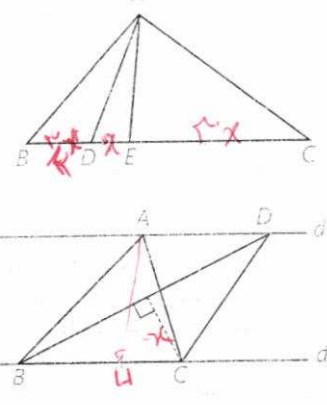
۲- طول پاره‌خطی را به دست آورید که واسطه هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های ۸ و ۱۰ سانتی متر است.

$$\frac{2\sqrt{10} \times x}{x} = 2\sqrt{10} = 8$$

۳- طول‌های اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی مترند و بلندترین ارتفاع آن ۲ سانتی متر است. طول‌های دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید.

$$4 \times h = 2\sqrt{8} \rightarrow h = \frac{1}{2}\sqrt{8}$$

$$8 \times h' = 2\sqrt{8} \rightarrow h' = \frac{1}{4}\sqrt{8}$$



۴- در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های  $\frac{BC}{DE}$  و  $\frac{BD}{DE}$  را به دست آورید.

$$S_{ACE} = 3 S_{ADE} \rightarrow \frac{1}{2} AH \times CE = 3 \times \frac{1}{2} AH \times DE \rightarrow CE = 3 DE$$

$$S_{ACE} = 2 S_{ADB} \rightarrow \frac{1}{2} AH \times CE = 2 \times \frac{1}{2} AH \times BD \rightarrow CE = 2 BD$$

۵- در شکل مقابل  $d \parallel d'$  و مساحت مثلث ABC،  $1 \text{ cm}^2$  است. اگر  $BD = 6 \text{ cm}$  باشد، فاصله نقطه C از BD را به دست آورید.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = 1$$

$$S_{BDC} = \frac{1}{2} h \times BD = 1 \rightarrow h = \frac{1}{3} \text{ cm}$$

$$\frac{BC}{DE} = \frac{\frac{11}{2} x}{x} = \frac{11}{2}$$

$$\frac{BD}{DE} = \frac{x}{\frac{2}{3} x} = \frac{3}{2}$$

از سه بر ۳