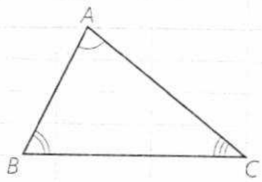
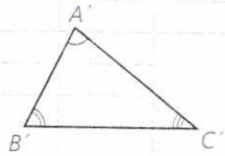
درس سوم

تشابه مثلث‌ها

در سال گذشته با مفهوم تشابه و چندضلعی‌های متشابه آشنا شدید. در اینجا می‌خواهیم دربارهٔ تشابه مثلث‌ها، بیشتر بدانیم. با توجه به تعریف تشابه چندضلعی‌ها، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند؛ اگر و فقط اگر زوایای آنها هم‌اندازه و اندازه‌های اضلاع آنها متناسب باشند :



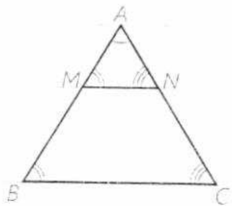


$$\angle A = \angle A', \quad \angle B = \angle B', \quad \angle C = \angle C', \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \Leftrightarrow \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

نسبت اندازه‌های اضلاع نظیر هم در دو مثلث را نسبت تشابه می‌گوییم. مثلاً اگر $\frac{A'B'}{AB} = \frac{۱}{۲}$ باشد و اندازهٔ اضلاع مثلث $A'B'C'$ نظیر به نظیر نصف اضلاع مثلث ABC باشند، گوییم مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC با نسبت تشابه $\frac{۱}{۲}$، متشابه است.

سؤال : مثلث ABC با چه نسبت تشابهی، با مثلث $A'B'C'$ متشابه است؟ $\frac{۲}{۱}$

قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها



اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر (یا امتداد آنها) را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.

$MN \| BC \Longrightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$

۱ـ زاویه‌های $\angle M$ و $\angle N$ به ترتیب با زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ برابرند. چرا؟
قضیه خط موازی

۲ـ با توجه به تعمیم قضیهٔ تالس تناسب زیر را کامل کنید :

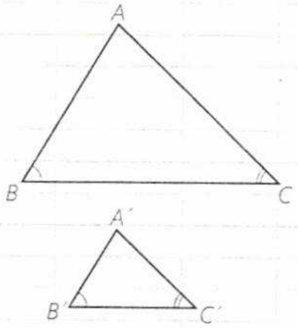
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

۳ـ از (۱) و (۲) در مورد مثلث‌های AMN و ABC چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

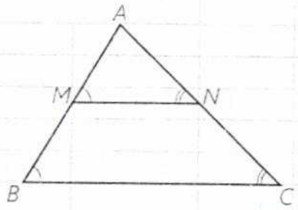
$\hat{AMN} \sim \hat{ABC}$

حال با توجه به قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها، می‌توانیم سه قضیهٔ اصلی را که حالت‌های مختلف تشابه مثلث‌ها را بیان می‌کند (مانند حالت‌های هم‌نهشتی مثلث‌ها) اثبات کنیم.

راهبرد کلی ما برای اثبات این سه قضیه، این است که روی اضلاع AB و AC از مثلث بزرگ‌تر، AM و AN را هم‌اندازه دو ضلع نظیر A′B′ و A′C′ جدا، و ثابت کنیم MN موازی BC است.



قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند.
$(\hat{B}=\hat{B'},\hat{C}=\hat{C'} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C')$



اثبات: روی ضلع‌های AB و AC پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازه با A′B′ و A′C′ جدا می‌کنیم.

۱ـ $\angle A+\angle B+\angle C=\angle A'+\angle B'+\angle C'=180^\circ$ و $\angle B=\angle B'$

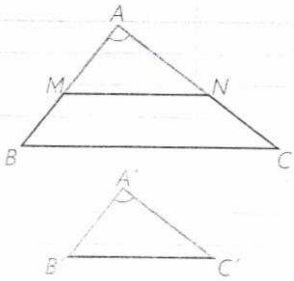
و $\angle C=\angle C'$ بنابراین $\angle A=\angle A'$

۲ـ $AM=A'B'$ و $AN=A'C'$ و $\angle A=\angle A' \overset{(ض ز ض)}{\Rightarrow} \Delta AMN \cong \Delta A'B'C'$

$\Rightarrow MN=B'C'$ و $\angle M=\angle B'$ و $\angle N=\angle C'$

۳ـ $\angle M=\angle B'$ و $\angle B=\angle B' \Rightarrow \angle M=\angle B \Rightarrow MN \parallel BC$

۴ـ طبق قضیهٔ اساسی تشابه، $\Delta AMN \sim \Delta ABC$ و در نتیجه: $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$



قضیه ۲: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آنها، هم‌اندازه باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\angle A=\angle A',\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به‌ترتیب هم‌اندازهٔ A′B′ و A′C′ جدا می‌کنیم.

$\begin{cases} AM=A'B' \\ AN=A'C' \\ \hat{A}=\hat{A'} \end{cases}$ ض ز ض

۱ـ مثلث‌های AMN و A′B′C′ به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ اجزای برابر آنها را مشخص کنید.

۲ـ در فرض مسئله به‌جای A′B′ و A′C′، پاره‌خط‌های هم اندازه با آنها را قرار دهید. حال بگویید چرا MN∥BC؟

$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC} \rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ عکس تالس $\longrightarrow MN \parallel BC$

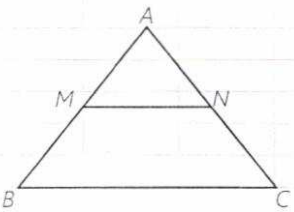
۳ـ با توجه به قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها و نتیجهٔ قسمت (۱) درستی حکم را ثابت کنید.

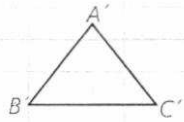
چون $BC \parallel MN$ پس $\Delta AMN \sim \Delta ABC$ و چون $\Delta AMN \cong \Delta A'B'C'$ پس $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

> با استفاده از این سه قضیه (به خصوص قضیه ۱) می‌توانیم تشابه مثلث‌های متشابه را اثبات کنیم و از آن طریق مسئله‌های زیادی را حل کنیم.

قضیهٔ ۳: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}\Rightarrow \Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$$





اثبات: روی AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب هم‌اندازهٔ A′B′ و A′C′ جدا کنید.

۱ــ در فرض به جای A′B′ و A′C′ مساوی‌های آنها را جایگزین کنید و سپس بگویید چرا MN∥BC؟

$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{AC}$ عکس تالس $\longrightarrow MN\parallel BC$

۲ــ از قضیهٔ اساسی تشابه، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

$\overset{\Delta}{AMN}\sim \overset{\Delta}{ABC}$

۳ــ تعمیم قضیهٔ تالس را در مثلث ABC بنویسید. از مقایسهٔ این تناسب‌ها با تناسب‌های فرض، نتیجه بگیرید:

$A'B' \leftarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

MN = B′C′

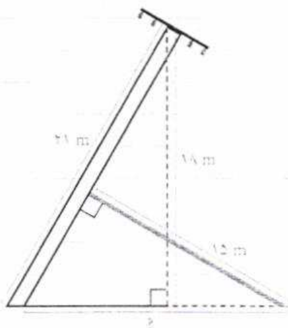
$\longrightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{MN}{BC}\longrightarrow \boxed{MN=B'C'}$

فرض: $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$

۴ــ مثلث‌های A′B′C′ و AMN به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟ از اینجا درستی حکم را ثابت کنید.

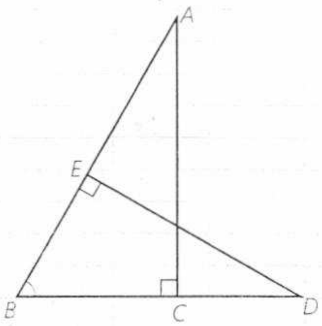
$\overset{\Delta}{AMN}\cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$ ضضض $\longrightarrow A'B'C'\sim ABC$

مثال: مطابق شکل روبه‌رو، یک تیر (دکل) انتقال برق به ارتفاع ۲۱ متر در اثر وزش باد خم شده است و در موقعیت جدید، نوک آن از زمین ۱۸ متر فاصله دارد. می‌خواهیم با قرار دادن یک تیر فلزی به طول ۱۵ متر، عمود بر آن، آن را به‌طور موقت سرپا نگه داریم. پای این تیر فلزی را باید در چه فاصله‌ای از پای تیر انتقال برق محکم کنیم؟



حل: اگر تیر برق را با یک پاره‌خط و تیر فلزی نگه‌دارنده را نیز با پاره‌خطی دیگر مشخص کنیم، شکل روبه‌رو را دوباره رسم می‌کنیم.

حال در دو مثلث ABC و BDE داریم:



$\angle B=\angle B\ ,\ \angle C=\angle E=۹۰^\circ \Rightarrow$

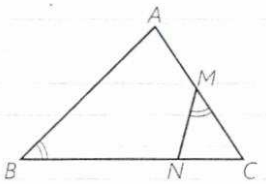
$\Delta ABC\sim\Delta BDE\Rightarrow$

(در نوشتن نسبت تشابه، توجه کنید که اضلاع روبه‌رو به زوایای مساوی در دو مثلث را در یک نسبت بر هم تقسیم کنید.)

$$\frac{DE}{AC}=\frac{BD}{AB}=\frac{BE}{BC}\Rightarrow\frac{۱۵}{۱۸}=\frac{BD}{۲۱}\Rightarrow BD=\frac{۲۱\times۱۵}{۱۸}=۱۷/۵m$$

یعنی باید پای تیر فلزی را در فاصلهٔ ۱۷/۵ متری از پای دکل برق محکم کرد.

مثال : در مثلث ABC، از نقطهٔ M وسط AC، زاویهٔ NMC را مساوی زاویهٔ B جدا کرده‌ایم. اگر NC=۲ و NB=۴، طول AC را به دست آورید.



حل : با کمی دقت مشاهده می‌کنید که مثلث‌های MNC و ABC دو زاویهٔ هم‌اندازه دارند و در نتیجه متشابه‌اند.

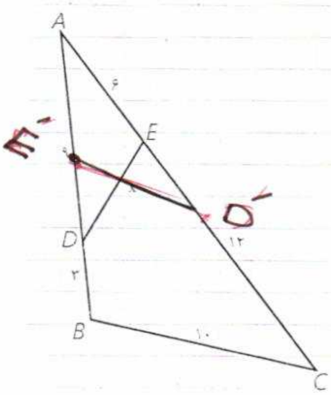
$$\angle M=\angle B\ ,\ \angle C=\angle C \Rightarrow \Delta MNC \sim \Delta ABC$$

از آنجا با نوشتن نسبت تشابه داریم :

$$\frac{MC}{BC}=\frac{MN}{AB}=\frac{NC}{AC}$$

و به جای MC ، $\frac{AC}{۲}$ را قرار می‌دهیم :

$$\frac{AC}{۲BC}=\frac{NC}{AC} \Rightarrow AC^{۲}=۲NC.BC=۲NC(NC+NB) \Rightarrow AC^{۲}=$$
$$۲\times۲(۲+۴)=۲۴ \Rightarrow AC=۲\sqrt{۶}$$



مثال : در شکل مقابل اندازهٔ هر پاره‌خط روی آن نوشته شده است. اندازهٔ x را به‌دست آورید.

حل : به کمک عددهای داده شده، بدیهی است که :

$\frac{AE}{AB}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{AD}{AC}=\frac{9}{18}$ بنابراین : $\frac{AD}{AC}$ $\frac{AE}{AB}$ و با توجه به زاویهٔ مشترک A مثلث‌های ABC و ADE متشابه‌اند. نسبت تشابه را بنویسید و x را به‌دست آورید.

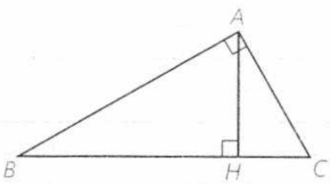
$\frac{9}{18}=\frac{6}{12}=\frac{x}{10}\longrightarrow \boxed{x=5}$

سؤال : در شکل، روی AC ، ´AD را هم اندازه AD و روی AB ، ´AE را هم اندازهٔ AE جدا کنید. چرا D´E´ || BC؟

$\frac{AD'}{AC}=\frac{AE'}{AB}\xrightarrow{\text{عکس تالس}} D'E' \parallel BC$

اثبات قضیهٔ فیثاغورس و روابط طولی دیگر در مثلث قائم‌الزاویه

فعالیت ۱



۱ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($A=۹۰^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. آیا می‌توانید دو زاویهٔ هم‌اندازه را در دو مثلث ABH و ABC نام ببرید؟ $\hat{B}=\hat{B}$ و $\hat{H}=\hat{A}=۹۰^\circ$

به همین ترتیب دو زاویهٔ هم‌اندازه از دو مثلث ACH و ABC را نام ببرید. بنابراین می‌توانیم بگوییم :

$\hat{C}=\hat{C}$ و $\hat{A}=\hat{H}$

$$\Delta ABH \sim \Delta ABC\ \ ,\ \ \Delta ACH \sim \Delta ABC$$

چرا مثلث‌های ABH و ACH، خودشان با هم متشابه‌اند؟ دو مثلث به یک مثلث، خود با هم متشابه‌اند

نتیجه

در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، آن را به دو مثلث قائم‌الزاویه تفکیک می‌کند که هر دو با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

۲ــ نسبت تشابه دو مثلث ABH و ABC را بنویسید :

$$\frac{AH}{AC}=\frac{AB}{BC}=\frac{BH}{AB}\Rightarrow AB^2=BH\times BC$$

۳ــ نسبت تشابه دو مثلث ACH و ABC را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AC واسطهٔ هندسی BC و CH است.

$$\frac{AC}{BC}=\frac{CH}{AC}=\frac{AH}{AB}\rightarrow \boxed{AC^2=BC\cdot CH}$$

۴ــ نسبت تشابه دو مثلث ACH و ABH را بنویسید و از آنجا ثابت کنید AH واسطهٔ هندسی بین BH و CH است.

$$\frac{BH}{AH}=\frac{AH}{CH}=\frac{AB}{AC}\rightarrow \boxed{AH^2=BH\times CH}$$

۵ــ از روابط ۲ و ۳ داریم :
(قضیهٔ فیثاغورس)

$$AB^2+AC^2=BC\times BH+BC\times CH=BC(CH+BH)=BC.BC=BC^2$$

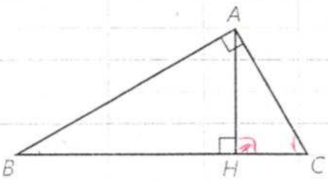
نتیجه

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC روابط مهم زیر برقرارند. این رابطه‌ها را روابط طولی می‌نامیم؛ زیرا با اندازه‌های اضلاع سروکار دارند:

۱) $AB^2=BC.BH$ ۲) $AC^2=BC.CH$

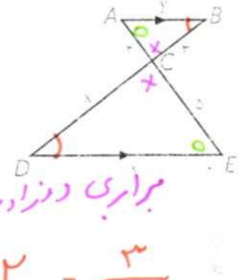
۳) $AB^2+AC^2=BC^2$ ۴) $AH^2=BH.CH$

۵) $AH\times BC=AB\times AC$



تمرین

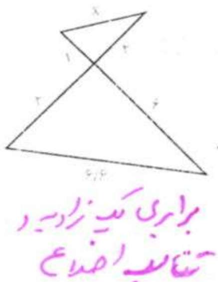
۱ــ در هر یک از شکل‌های زیر، تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر x ، y را مشخص کنید :



برابری دو زاویه

$$\frac{2}{5}=\frac{3}{x}$$

$x=7/5$

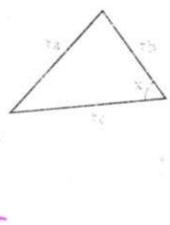


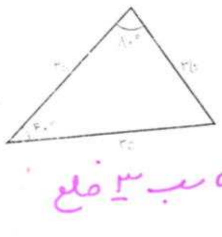
برابری یک زاویه و تناسب اضلاع همان زاویه

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{x}{6/6}$$

$3x=6/6$

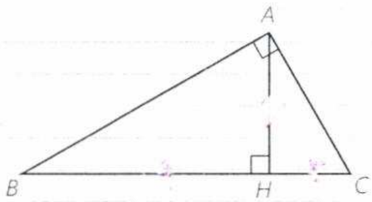
$x=2/2$





تناسب ۳ ضلع

۲ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($A=90^\circ$)، ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. به کمک روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه در هر یک از موارد زیر با توجه به مفروضات داده شده، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.



$AB=\sqrt{117}$
$AB^2=9^2+6^2$

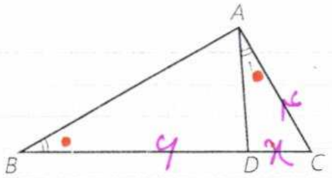
۱) BH=۹ , CH=۴ , AH=? , AB=? , AC=?   ۶ $AC^2=6^2+4^2$ $AC=\sqrt{52}$

۲) AB=۱۰ , BC=۱۲ , AC=? , AH=? $\sqrt{44}$ $AH\cdot BC=AB\cdot AC \rightarrow AH=\frac{5\sqrt{11}}{3}$

$BC=10 \leftarrow$ ۳) AB=۸ , AC=۶ , BH=? , CH=?   ۶٫۴   ۳٫۶

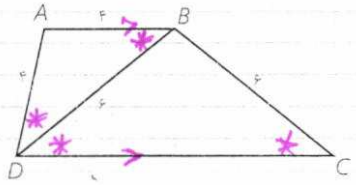
۴) AB=۸ , AH=۴ , BC=? , AC=? $BC=\frac{16}{3}\sqrt{3}$

$64-16=48$ $BH=4\sqrt{3}$
$16=4\sqrt{3}\times CH$ $CH=4\sqrt{3}/3$



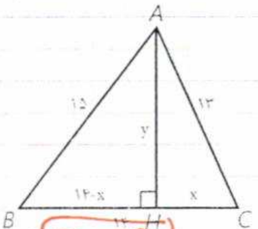
۳ـ در شکل روبه‌رو $\angle A_1=\angle B$ و AC=۴ و BD=۶، طول BC را به‌دست آورید.

$\overset{\triangle}{ADC}\sim \overset{\triangle}{ABC}\ \begin{cases} A_1=B \\ \hat{C}=\hat{C}\end{cases} \Rightarrow \frac{DC}{AC}=\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{AB} \Rightarrow AC^2=DC\cdot BC$
$16=x(6+x)$
$16=6x+x^2 \rightarrow (x+8)(x-2)=0$
$\boxed{x=2}$ $\boxed{BC=8}$



۴ـ در شکل روبه‌رو ABCD ذوزنقه است. طول قاعدهٔ CD را به‌دست آورید.

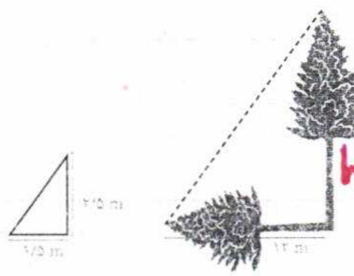
$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{DC} \rightarrow \frac{4}{6}=\frac{6}{x} \Rightarrow \boxed{x=9}$



۵ـ در شکل مقابل، مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH، مقادیر x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.

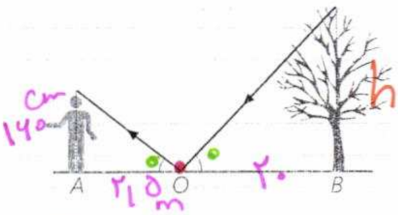
$225=(14-x)^2+y^2$
$169=x^2+y^2 \rightarrow 225-(14-x)^2=169-x^2$
$225-196-x^2+28x=169-x^2$
$28x=140 \rightarrow \boxed{x=5}$

۶ـ در حیاط یک دبیرستان، دو درخت بلند وجود دارد. معلم هندسه از دانش‌آموزان خواست که برای تعیین ارتفاع این دو درخت روشی را ارائه کنند. در اینجا روش‌های دو دانش‌آموز را می‌بینید. با توجه به اطلاعات داده شده ارتفاع هر درخت را تعیین کنید.



الف) روش ترانه: ترانه یک چوب ۲/۵ متری را به صورت عمودی روی زمین در جایی محکم کرد. طول سایهٔ چوب در آن زمان ۱/۵ متر بود. هم‌زمان طول سایهٔ درخت ۱۲ متر بود. از اینجا چگونه او توانست ارتفاع درخت را اندازه بگیرد؟ ارتفاع این درخت چند متر است؟

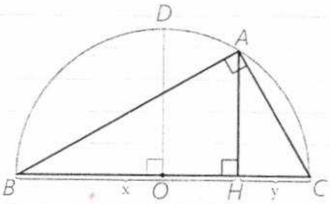
$\frac{h}{2.5}=\frac{12}{1.5} \longrightarrow h=20$



ب) روش شهرزاد: شهرزاد آینه‌ای کوچک را که در مقیاس بزرگ می‌توان یک نقطه در نظر گرفت، (نقطهٔ O در شکل) روی زمین و در مسیر خط راستی که از پای درخت تا پای خودش کشیده است، قرار داد؛ سپس روی این خط آنقدر به جلو و عقب حرکت کرد تا بتواند، تصویر نوک درخت را در آینه ببیند. با توجه به آنچه از خواص

$\frac{h}{1.6}=\frac{20}{2.5} \longrightarrow h=12.8$

آینه‌ها و انعکاس نور می‌دانید، بگویید چگونه می‌توان با داشتن طول‌های AO و BO روی زمین و اندازهٔ قد شهرزاد (فاصله چشم او تا زمین)، ارتفاع درخت را به‌دست آورد. اگر قد شهرزاد ۱۶۰ سانتی‌متر و فاصلهٔ پای او از آینه ۲/۵ متر و فاصلهٔ آینه از پای درخت ۲۰ متر باشد، ارتفاع درخت چند متر است؟



۷ــ در شکل مقابل نیم‌دایره‌ای به قطر BC و به مرکز O رسم شده و نقطهٔ دلخواه A روی محیط نیم‌دایره است.

زاویه‌های مقابل قطر برابر ۹۰° است

الف) چرا زاویهٔ A قائمه است؟

ب) برای نقطهٔ A که به دلخواه روی محیط دایره انتخاب شده و OD شعاع دایره است. اندازه‌های AH و OD را با هم مقایسه کنید.

OD $\boxed{>}$ AH

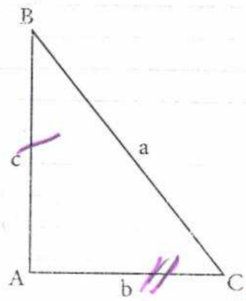
پ) هر کدام از مقادیر AH و OD را بر حسب x و y محاسبه کنید و در قسمت (ب) جایگذاری کنید.

$AH^2 = x \cdot y \rightarrow AH = \sqrt{xy}$

$OD = \frac{x+y}{2}$

ت) آیا می‌توان برای هر دو عدد مثبت a و b گفت $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ؟ چرا؟

به مطابق اثبات بالا



۸ــ با قضیه فیثاغورس آشنا شدید. این قضیه می‌گوید اگر زاویهٔ A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید. اگر در مثلث ABC داشته باشیم $a^2=b^2+c^2$ آنگاه $A=90°$

ب) با انجام دادن مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه فیثاغورس نیز درست است.

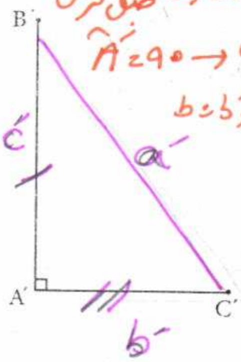
۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازهٔ طول‌های اضلاع آن برقرار است.

۲) پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به‌گونه‌ای درنظر بگیرید که $A'B' = AB$ و $A'C' = AC$ و $\hat{A'} = 90°$

۳) با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$، اندازهٔ پاره‌خط $B'C'$ را به‌دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

ض ض ض

۴) توضیح دهید چرا $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$، و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90°$.



طبق فرض $\rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

$\hat{A'} = 90 \rightarrow a'^2 = b'^2 + c'^2$

چون $b=b'$, $c=c'$

پس $a'=a$

$ABC \cong A'B'C'$

پس $A=A'=90°$

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن‌را به‌صورت یک قضیهٔ دو شرطی بیان نمایید.

۲) اگر زاویه A از مثلث ABC برابر ۹۰ باشد آنگاه $a^2=b^2+c^2$

و برعکس.