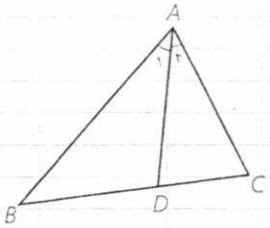
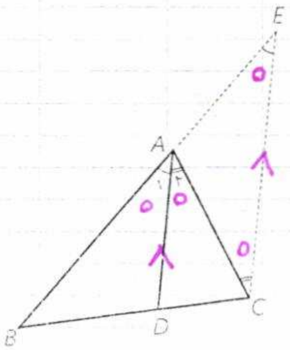
کاربردهایی از قضیهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها

۱ــ قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی



قضیه: در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

فرض : $\angle A_۱ = \angle A_۲$ حکم : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$



اثبات : مطابق شکل، از نقطهٔ C خط راستی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطهٔ E قطع کند.

الف) چرا $\angle E = \angle A_۱$ و چرا $\angle C = \angle A_۲$ ؟ $AD \parallel EC \xrightarrow{\text{مورب } AC}$

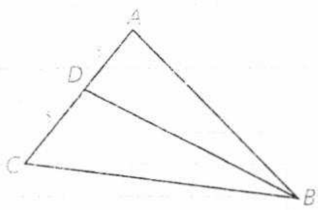
ب) با توجه به فرض، چه نتیجه‌ای دربارهٔ زوایای E و C می‌توان گرفت؟ $\hat{E} = \hat{C}$

مثلث AEC چه نوع مثلثی است؟ متساوی الساقین

ج) با توجه به قضیهٔ تالس در مثلث EBC ($AD \parallel EC$) نسبت $\frac{BD}{CD}$ با کدام نسبت برابر است؟ با توجه به نتیجهٔ قسمت (ب) اثبات را کامل کنید :

$$AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

یکی از نتایج فوری این قضیه این است که در هر مثلث، به سادگی می‌توان طول‌های قطعاتی را که هر نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند، با داشتن طول‌های اضلاع مثلث، محاسبه کرد.



مثال : در مثلث ABC، $AB=۷$ ، $AC=۵$ و $BC=۸$ طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویهٔ B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند، به‌دست آورید.

حل :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} = \frac{۷}{۸} \Rightarrow \frac{AD+CD}{CD} = \frac{۷+۸}{۸} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{۱۵}{۸} \Rightarrow$$

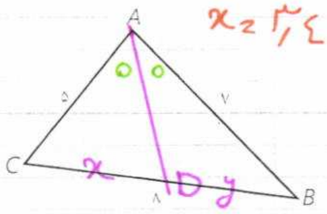
$$CD = \frac{۸\times۵}{۱۵} = \frac{۸}{۳} \;,\; AD = AC - CD = ۵ - \frac{۸}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

$$\frac{CD}{DB}=\frac{AC}{AB}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{5}{7}\longrightarrow\frac{x+y}{y}=\frac{12}{7}\longrightarrow\frac{8}{y}=\frac{12}{7}\rightarrow y=\frac{56}{12}=4/6$$

$$x=3/4$$

کار در کلاس

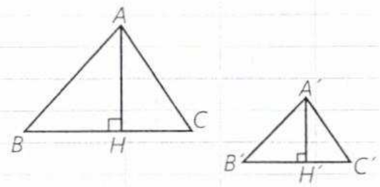


در شکل روبه‌رو نیمساز زاویهٔ C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را که این نیمساز روی AB جدا می‌کند به‌دست آورید.

۲ـ نسبت اجزای فرعی، محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث متشابه

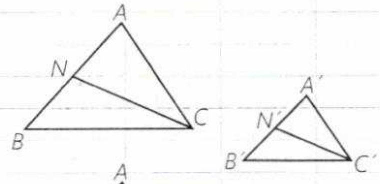
> **قضیه:** هرگاه دو مثلث، متشابه باشند، آنگاه نسبت اندازه‌های هر دو جزء متناظر (ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها و محیط‌ها) مساوی نسبت تشابه و نسبت مساحت‌های آنها مساوی توان دوم (مربع) نسبت تشابه است.

به عنوان مثال اگر مثلث‌های $A'B'C'$ و ABC متشابه باشند و نسبت تشابه آنها k باشد $(\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k)$ آنگاه :



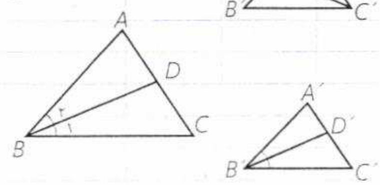
الف) نسبت اندازه‌های ارتفاع‌های متناظر آنها k است :

$$\frac{A'H'}{AH}=k$$



ب) نسبت اندازه‌های میانه‌های متناظر آنها k است :

$$\frac{C'N'}{CN}=k$$



ج) نسبت اندازه‌های نیمسازهای متناظر آنها مساوی k است :

$$\frac{B'D'}{BD}=k$$

در مورد محیط‌های دو مثلث نیز داریم :

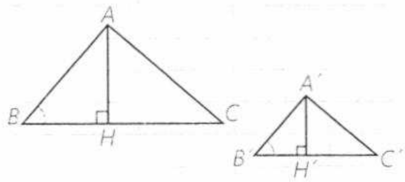
$$\frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}}=\frac{A'B'+A'C'+B'C'}{AB+AC+BC}=k$$

و در مورد مساحت‌ها داریم :

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=k^2$$

اثبات : اگر درستی حکم را برای یکی از ارتفاع‌ها (میانه‌ها، نیمسازها) ثابت کنیم، درستی آن قابل تعمیم به سایر ارتفاع‌ها (میانه‌ها، نیمسازها) است. (چرا؟)

الف) ارتفاع‌ها



فرض	$\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$ ، $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$
حکم	$\frac{A'H'}{AH}=k$

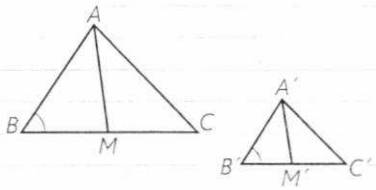
$\hat{B}=\hat{B'}$ و $\hat{H}=\hat{H'}$

زیرا $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$

چرا $\angle B=\angle B'$ بنابراین: $\Delta ABH \sim \Delta A'B'H'$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه‌گیری کنید.

$\frac{A'B'}{AB}=K \longrightarrow \frac{A'H'}{AH}=K$

ب) میانه‌ها



فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$
حکم	$\frac{A'M'}{AM}=k$

زیرا $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$

چرا $\angle B=\angle B'$ ؟

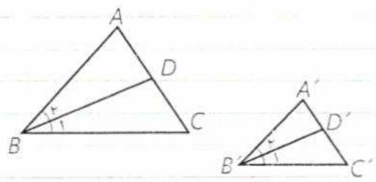
$$\frac{B'M'}{BM}=\frac{\frac{1}{2}\cdot BC}{\frac{1}{2}\cdot BC'}=\frac{\cdots}{\cdots}=k \Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{B'M'}{BM}$$

برابری یک زاویه و تناسب اضلاع حول زاویه

بنابراین $\Delta A'B'M' \sim \Delta ABM$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نتیجه بگیرید.

$\frac{A'B'}{AB}=K \longrightarrow \frac{A'M'}{AM}=K$

ج) نیمسازها



فرض	$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$
حکم	$\frac{B'D'}{BD}=k$

زیرا $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$

$\hat{B}=\hat{B'} \longrightarrow \frac{\hat{B}}{2}=\frac{\hat{B'}}{2}$

چرا $\angle A=\angle A'$، چرا $\angle B_2=\angle B'_2$؟

بنابراین $\Delta A'B'D' \sim \Delta ABD$ (چرا؟) از آنجا درستی حکم را نشان دهید.

برابری دو زاویه

$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'D'}{BD}=K$

د) محیط‌ها

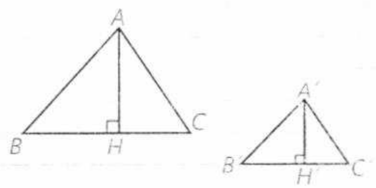
به سادگی و به کمک ویژگی تناسب‌ها می‌توان نوشت:

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k \Rightarrow$$

$$\frac{A'B'+A'C'+B'C'}{AB+AC+BC}=k \Rightarrow \frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}}=k$$

هـ) مساحت‌ها

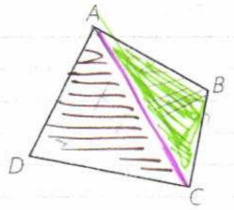
دیدیم که نسبت ارتفاع‌های نظیر، مساوی نسبت تشابه است؛ بنابراین داریم:

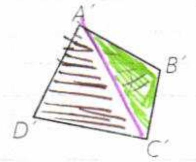


$$\frac{A'H'}{AH}=\frac{B'C'}{BC}=k \qquad \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}A'H'.B'C'}{\frac{1}{2}AH.BC}=\frac{A'H'}{AH}\times\frac{B'C'}{BC}=k.k=k^2$$

کار درکلاس

چهارضلعی‌های متشابه $A'B'C'D'$ و $ABCD$ مفروض‌اند.





۱ـ اگر نسبت تشابه دو چهارضلعی، k باشد، ثابت کنید نسبت محیط‌های آنها مساوی k است.

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=K \longrightarrow \frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'}=K$$

۲ـ قطرهای AC و $A'C'$ را رسم کنید. نشان دهید:

$$\Delta ACD \sim \Delta A'C'D' \quad , \quad \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

نسبت تشابه‌ها چیست؟

$\frac{AD}{A'D'}=\frac{DC}{D'C'}$ و $\hat{D}=\hat{D'}$ $\quad$ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$ و $\hat{B}=\hat{B'}$ $\quad K$

۳ـ جاهای خالی را پر کنید:

$$\frac{S_{A'C'D'}}{S_{ACD}}=K^{2}\;,\;\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}}=K^{2}\Rightarrow\frac{S_{A'C'D'}+S_{A'B'C'}}{S_{ACD}+S_{ABC}}=K^{2}\Rightarrow\frac{S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'}}=\ldots=K^{2}$$

بنابراین نسبت مساحت‌های دو چهارضلعی، مساوی مربع نسبت تشابه آنهاست. به همین ترتیب می‌توانیم نسبت محیط‌ها و مساحت‌های هر دو n ضلعی متشابه را به صورت زیر ثابت کنیم:

> **هرگاه دو چند ضلعی با نسبت تشابه k متشابه باشند، نسبت محیط های آنها، مساوی k و نسبت مساحت‌های آنها k^{2} است.**

مثال: محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع سه برابر محیط مثلث متساوی‌الاضلاع دیگر است. مساحت مثلث بزرگ‌تر، چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

حل: می‌دانیم مثلث‌های متساوی‌الاضلاع همواره با هم متشابه‌اند (چرا؟) بنابراین نسبت محیط‌های آنها، نسبت تشابه آنهاست، یعنی $k=۳$ بنابراین: $\frac{S}{S'}=k^{۲}=۹$ یعنی مساحت مثلث بزرگ‌تر، ۹ برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است.

> **هر دو n ضلعی منتظم، همواره با هم متشابه‌اند.**

کار درکلاس

۱ـ اندازهٔ محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب ۱۰ و ۱۸ واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۱۵ واحد سطح باشد، مساحت مثلث کوچک‌تر، چند واحد سطح است؟

$$\frac{S}{S'}=K^{۲} \longrightarrow \frac{S}{S'}=\frac{۱۰}{۱۸} \longrightarrow \frac{S}{\cancel{۱۵}\,۵}=\frac{۱۰}{\cancel{۱۸}\,۶}$$

$$\frac{P}{P'}=K$$

$$S=\frac{۵۰}{۶}=\frac{۲۵}{۳}$$

$\frac{۱۸}{۱۰}$

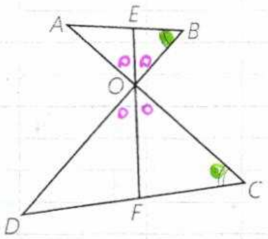
۲ــ نسبت مساحت‌های دو پنج ضلعی متشابه، $\frac{۴}{۹}$ است. اگر محیط یکی از آنها ۱۲ واحد باشد، محیط پنج‌ضلعی دیگر چند واحد است؟ (چند جواب داریم؟)

$\frac{4}{9}=\frac{12}{x} \to \boxed{x=27}$

$\frac{4}{9}=\frac{x}{12} \to \boxed{x=5\frac{1}{3}}$

۳ــ اندازه‌های اضلاع یک هفت‌ضلعی را سه برابر می‌کنیم؛ بدون اینکه اندازه‌های زاویه‌ها را تغییر دهیم. مساحت هفت ضلعی چند برابر می‌شود؟ ۴۹ برابر

فعالیت



در شکل روبه‌رو EF=۱۰cm نیمساز دو زاویهٔ متقابل به رأس O است و $\angle B=\angle C$.

الف) چرا مثلث‌های OAB و OCD متشابه‌اند؟

$\hat{O}_1=\hat{O}_2$ متقابل به رأس

$\hat{B}=\hat{C}$

ب) اگر $\frac{OB}{OC}=\frac{۲}{۳}$، نسبت $\frac{OE}{OF}$ چقدر است؟ $\frac{2}{3}$

ج) طول‌های OE و OF را به‌دست آورید.

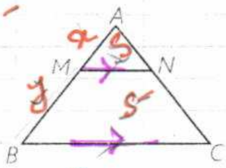
$\frac{OE}{OF}=\frac{2}{3} \to \frac{OE+OF}{OF}=\frac{5}{3} \to \frac{10}{OF}=\frac{5}{3} \to \boxed{OF=6 \text{ و } OE=4}$

تمرین

۱ــ طول‌های اضلاع یک مثلث ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به‌دست آورید.

$\frac{15}{10}=\frac{P}{P'}$

$\frac{15}{10}=\frac{37}{P'} \to P'=\frac{\cancel{10}^{2}\times 37}{\cancel{15}_{3}}=\frac{74}{3}$



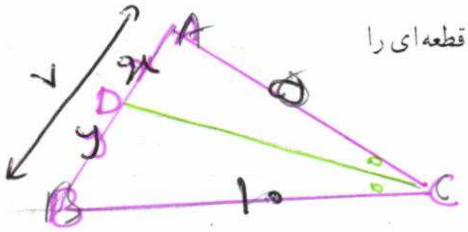
۲ــ در شکل روبه‌رو MN || BC است و مساحت ذوزنقهٔ MNCB هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به‌دست آورید.

$S'=8S \to \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}}=9$

$\frac{AB}{AM}=3$

$\frac{x+y}{x}=3 \to \frac{x+y-\cancel{x}}{x}=\frac{3-1}{1}$

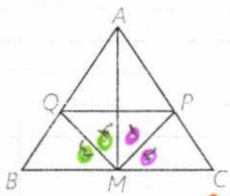
$\frac{y}{x}=\frac{2}{1}$



۳ــ در مثلث ABC، AB=۷ و AC=۵ و BC=۱۰ است. طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویهٔ C روی ضلع مقابل به آن ایجاد می‌کند، به‌دست آورید.

$\frac{x}{y}=\frac{5}{10} \to \frac{x+y}{y}=\frac{15}{10} \to \frac{7}{y}=\frac{15}{10}$

$y=4,66$ و $x=2,34$



۴ــ در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند. ثابت کنید:

PQ || BC

$\overset{\triangle}{AMC} \xrightarrow{\text{نیمساز } PM} \frac{AP}{PC}=\frac{AM}{MC}$

$MC=MB$ چون

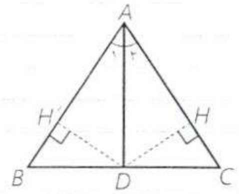
$\overset{\triangle}{AMB} \xrightarrow{\text{نیمساز } MQ} \frac{AQ}{QB}=\frac{AM}{MB}$

پس

$\frac{AP}{PC}=\frac{AQ}{QB}$ درنتیجه $\boxed{PQ \parallel BC}$

اگر دو مثلث در یک ارتفاع مشترک باشند ... به این ارتفاع ها
حفظ است ... نسبت مساحت ها = نسبت قاعده ها

۵ــ در شکل روبه‌رو AD نیمساز زاویهٔ A است و عمودهای DH و DH' نیز رسم شده‌اند.



الف) با توجّه به نتیجهٔ (۲) از درس اول، نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACD را بنویسید.

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD}{DC}$$

زیرا هر نقطه روی نیمساز فاصله‌اش از دو ضلع یکسان است

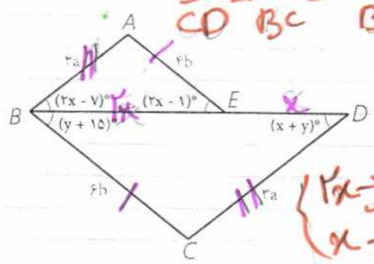
ب) چرا $DH=DH'$؟ با توجّه به این موضوع و نتیجهٔ (۱) از درس اول بار دیگر نسبت مساحت‌های دو مثلث را بنویسید:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{AB}{AC}$$

ج) از نتایج فوق چگونه می‌توانید درستی قضیهٔ نیمسازها را نتیجه بگیرید؟

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$$

۶ــ در شکل روبه‌رو می‌دانیم BE=۲DE است. اولاً x و y را به‌دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت ABE را بیابید.



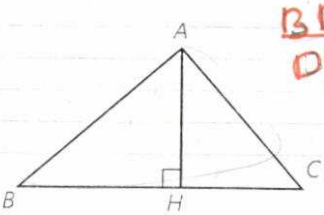
$$\frac{AB}{CD}=\frac{AE}{BC}=\frac{BE}{BD}$$

$$3x-1=y+10 \qquad 2x-7=x+y$$

$$\begin{cases}2x-y=11 \\ x-y=7\end{cases} \quad x=4,\ y=-3$$

$$\frac{BD}{DE}=\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

۷ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\angle A=90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانید که $\Delta ABH \sim \Delta ABC \sim \Delta ACH$ است. با توجّه به این موضوع،



الف) ثابت کنید:

$$\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AB}{BC}\right)^2,\quad \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2$$

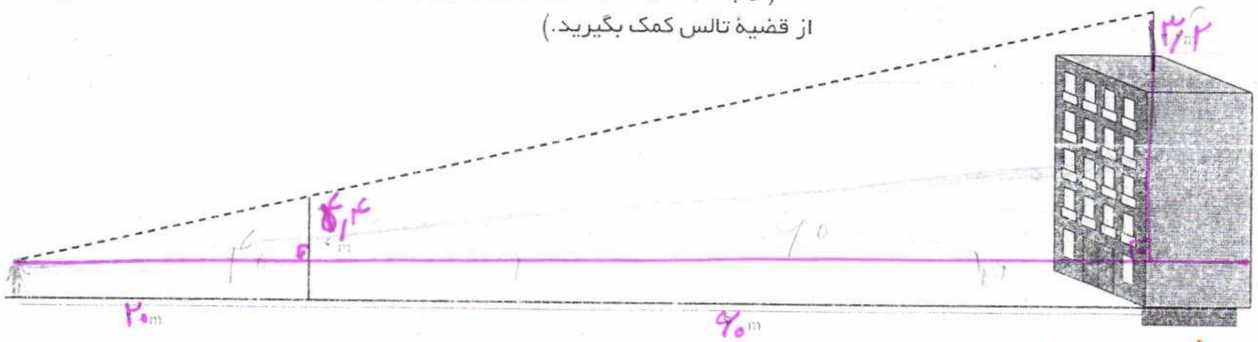
ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا و ادامهٔ کار، درستی قضیهٔ فیثاغورس را نتیجه‌گیری کنید.

$$\frac{S_{ABH}+S_{ACH}}{S_{ABC}}=\frac{AB^2+AC^2}{BC^2}=1 \rightarrow BC^2=AB^2+AC^2$$

۸ــ مطابق شکل، روی یک ساختمان، یک آنتن به ارتفاع ۳/۲ متر نصب شده است. در فاصله ۶۰ متری ساختمان، یک تیر برق ۶ متری قائم وجود دارد و یک ناظر وقتی در فاصله ۲۰ متری تیر می‌ایستد، انتهای آنتن و انتهای تیر برق را در یک راستا می‌بیند. اگر بدانیم فاصلهٔ چشمان ناظر از زمین ۱/۶ متر است، بلندی ساختمان را محاسبه کنید.

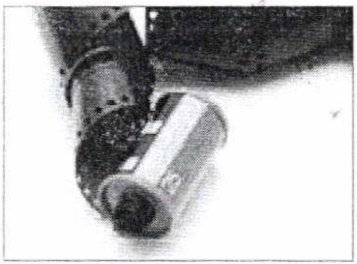
$6-1/6=4/4$

(از چشم ناظر خط راستی موازی زمین رسم کنید تا تیر برق و ساختمان را قطع کند. از قضیهٔ تالس کمک بگیرید.)



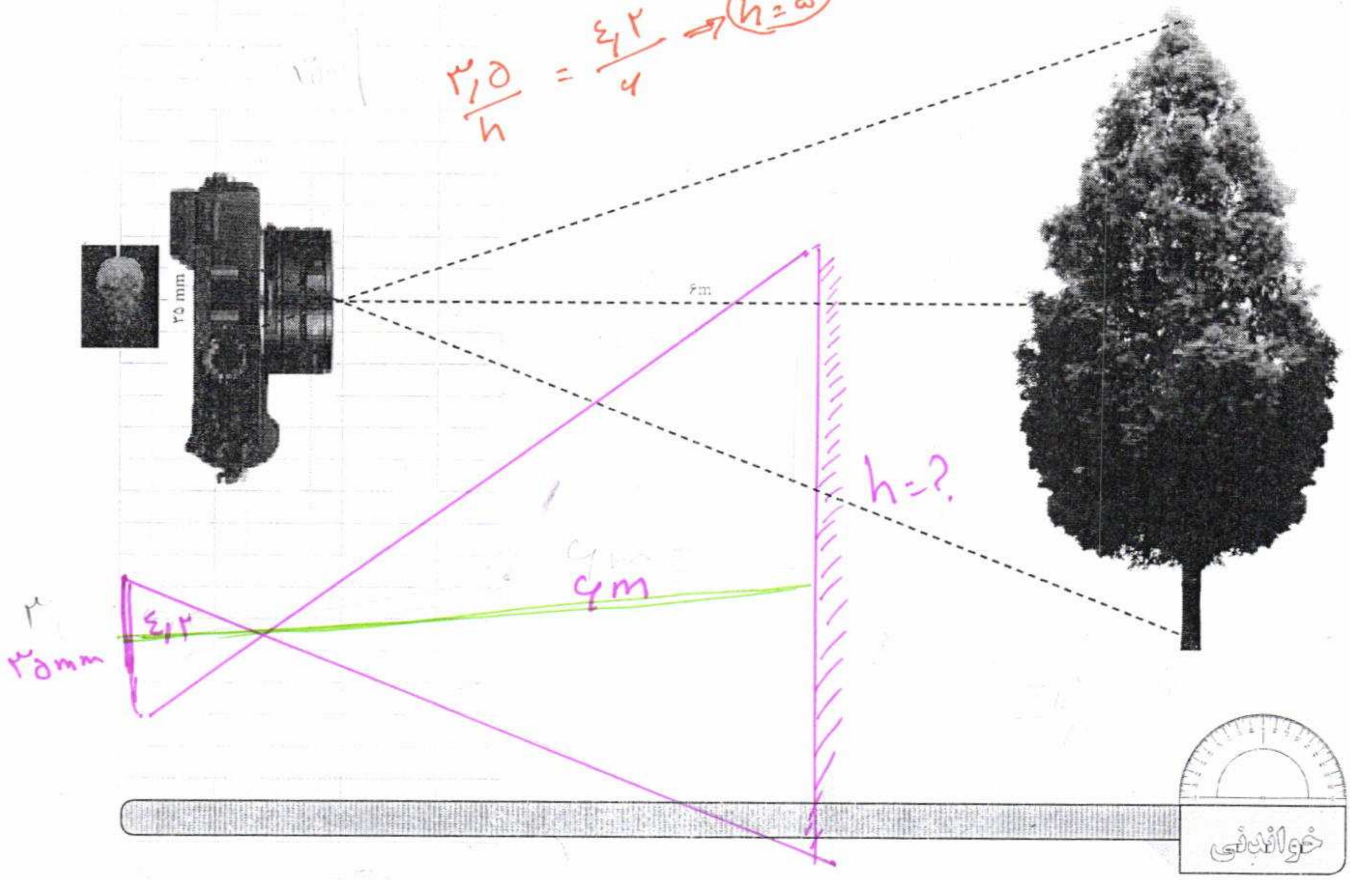
$$\frac{20}{80}=\frac{4/4}{x} \rightarrow x=17/6 \Longrightarrow h=(17/6-3/2)+1/6$$

$h=16m$

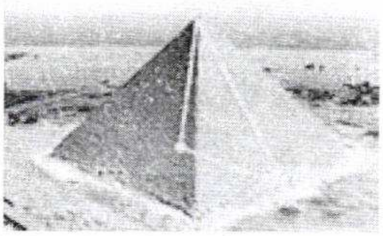


۹ــ در دوربین‌های قدیمی، موقع عکس‌برداری، روی یک حلقهٔ فیلم تعداد محدودی (مثلاً سی و شش عدد) تصویر منفی[1] ثبت، و سپس این فیلم ظاهر می‌شود و عکس‌ها از روی آن چاپ می‌شوند. اگر فرض کنیم عرض یکی از این فیلم‌ها، ۳۵mm و فاصلهٔ آن درون دوربین تا عدسی[2]، ۴/۲cm و فاصله عدسی تا درختی که از آن عکس می‌گیرد، ۶m باشد، اندازهٔ واقعی درختی که از آن عکس گرفته می‌شود، چند متر است؟

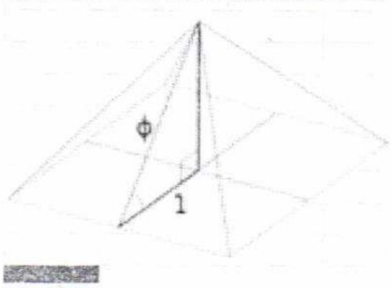
$\frac{۳٫۵}{h} = \frac{۴٫۲}{۶} \rightarrow h=۵$



خواندنی



اعداد فیثاغورسی به سه عددی می‌گویند که مجموع مربع‌های دو تا از آنها برابر با مربع سومی باشد؛ به عبارتی اعداد a ، b و c را فیثاغورسی گویند، هرگاه $a^2 = b^2 + c^2$. اعداد فیثاغورسی اندازه‌های ضلع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه (راست‌گوشه) را تشکیل می‌دهند. بررسی‌ها نشان داده است که در برخی نقاط جهان در ساخت بناها پیش از شناخت قضیه فیثاغورس از ویژگی اعداد فیثاغورسی استفاده می‌شده است.



۱ــ واژهٔ «تصویر منفی» با تصویب فرهنگستان به‌جای واژهٔ «نگاتیو» به‌کار رفته است.

۲ــ واژهٔ «عدسی» با تصویب فرهنگستان به‌جای واژهٔ «لنز» به‌کار رفته است.

اثبات ویژگی‌های تناسب

۱ طرفین ــ وسطین کردن؛ طرفین تساوی $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ را در عدد غیر صفر bd ضرب کنید :

$$\frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd \Rightarrow ad=bc$$

۲ ویژگی‌های (۲) و (۳) با طرفین ــ وسطین کردن، به سادگی نتیجه می‌شوند :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc\Rightarrow da=cb\Rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc\Rightarrow bc=ad\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

۳ ویژگی‌های ۵ و ۴ به صورت زیر با اضافه یا کم کردن عدد ۱ به دو طرف تناسب نتیجه می‌شوند :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1\Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}\Rightarrow \frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1\Rightarrow \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}\Rightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$$

ویژگی‌های تفضیل نسبت در صورت و مخرج را خودتان اثبات کنید.

۴ اثبات ویژگی ۶ :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\Rightarrow a=bk\ ,\ c=dk\Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{k(b+d)}{b+d}=k$$

$$\Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

به همین ترتیب می‌توان تعمیم این ویژگی را هم اثبات کرد.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان