فصل ۳ : چند ضلعی ها

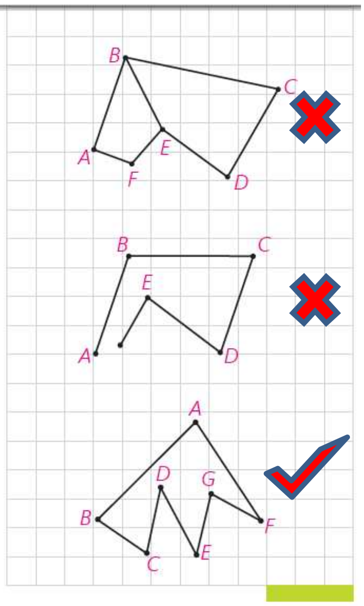
درس اول : چهار ضلعی ها

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

صفحه ۵۴

تعریف: چندضلعی شکلی است شامل n ($n \geq ۳$) پاره‌خط متوالی که:
۱) هر پاره‌خط، دقیقاً دو پاره‌خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.
۲) هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترک‌اند، روی یک خط نباشند.



هر یک از این پاره‌خط‌ها یک ضلعِ چند ضلعی است.
هر دو ضلع چندضلعی را که در یک انتها مشترک‌اند، دو ضلع مجاور و نقطهٔ مشترک آن دو را رأس می‌نامند. هر دو زاویهٔ چندضلعی را که هر دو در یک ضلعِ چندضلعی مشترک‌اند، دو زاویهٔ مجاور به آن ضلع در چندضلعی می‌نامند. مانند $\angle A$ و $\angle B$ در شکل‌های (۱) و (۲)
هر گاه تعداد ضلع‌های چند ضلعی n تا باشد، آن را n ضلعی می‌نامند.
کدام یک از شکل‌های مقابل چند ضلعی است و تعداد ضلع‌ها و رأس‌های آن چند تاست؟ **۷ ضلع و ۷ رأس**
برخی ضلع‌های مجاور هم و غیر مجاور هم را مشخص کنید.

مجاور : $AB, BC - BC, CD - CD, DE - ...$ غیر مجاور : $AB, CD - AB, DE - BC, EF - ...$

صفحه ۵۵

یک چهار ضلعی چند قطر دارد؟ **دو قطر**

n ضلعی $A_1A_2...A_n$ را درنظر می‌گیریم. از رأس A_1، ... **$n-۳$** ... قطر می‌توان رسم کرد.
با توجه به اینکه n رأس داریم، آیا می‌توان گفت تعداد قطرها در n ضلعی $n(n-۳)$ است؟ **خیر**

با این فرمول، مستطیل چند قطر دارد؟ **$۴(۴-۳) = ۴$**

کافی است آن را بر ۲ تقسیم کنیم

آیا جواب به‌دست آمده درست است؟ **خیر**

با چه تغییری در این فرمول به فرمول درست محاسبهٔ قطرها می‌رسیم؟ چرا این تغییر لازم است؟
زیرا هر راس دو بار شمرده شده است.

در هر n ضلعی تعداد قطرها $\frac{n(n-۳)}{....}$ است. **$\frac{n(n-۳)}{۲}$**

کاردرکلاس

n نقطه که هیچ سه‌تای آنها روی یک خط واقع نیستند، مفروض‌اند. با توجه به استدلالی که در محاسبهٔ تعداد قطرهای n ضلعی به‌کار برده‌اید، نشان دهید از هر نقطه به نقاط دیگر ...$n-1$... پاره‌خط رسم می‌شود. بنابراین، این n نقطه را با ...$\frac{n(n-1)}{2}$... پاره‌خط می‌توان به هم متصل کرد. چه رابطه‌ای بین این تعداد پاره‌خط و مجموع تعداد قطرها و ضلع‌ها در n ضلعی وجود دارد؟

با هم برابرند ، به عبارت دیگر $\frac{n(n-1)}{2} = n + \frac{n(n-3)}{2}$

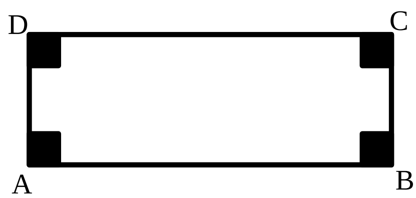
کار در کلاس صفحه ۵۶

کاردرکلاس

با توجه به تعریف‌های بالا درستی هریک از عبارت‌های زیر را توجیه کنید :

الف) مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.

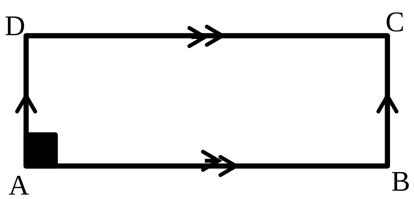
ب) اگر در متوازی‌الاضلاع یک زاویه قائمه باشد، مستطیل است؛ چرا؟



الف: فرض : $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = ۹۰^\circ$

حکم : $AD \parallel BC \quad , \quad AB \quad CD$

برهان : $\left.\begin{matrix} AB \perp AD \\ CD \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \quad CD \quad , \quad \left.\begin{matrix} AD \perp AB \\ BC \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow AD \parallel BC$



ب : فرض : $\angle A = ۹۰^\circ , AD \parallel BC , AB \parallel CD$

حکم : $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = ۹۰^\circ$

برهان :

$\boxed{۱}$ $AB , AD \parallel BC \Rightarrow \angle A = \angle B = ۹۰^\circ$ مورب

$\boxed{۲}$ $AD , AB \parallel CD \Rightarrow \angle A = \angle D = ۹۰^\circ$ مورب

$\boxed{۱} , \boxed{۲} \Rightarrow \angle A = \angle B = \angle D = ۹۰^\circ \Rightarrow \angle C = ۹۰^\circ$

پ) لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.

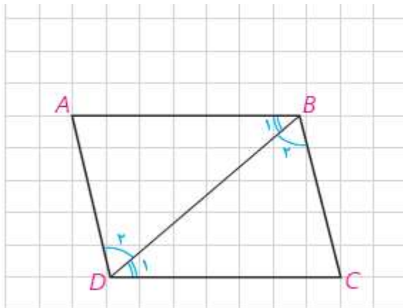
در لوزی ABCD قطر AC را رسم می‌کنیم. دو مثلث ABC و ADC به حالت ...ض ز ض... هم‌نهشت‌اند. بنابراین دو زاویهٔ ...$\angle A_2$... و ...$\angle C_1$... هم‌اندازه‌اند. در نتیجه دو ضلع AB و CD موازی‌اند. به همین ترتیب دو ضلع مقابل BC و AD نیز موازی‌اند. یعنی لوزی متوازی‌الاضلاع است.

بنابراین، لوزی متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن هم‌اندازه باشند.

ت) مربع یک متوازی‌الاضلاع است.

پاسخ (ت) : بنا به تعریف مربع ، هر چهار ضلع مربع با هم برابرند پس هر مربع نوعی لوزی است. از طرف دیگر هر لوزی نیز نوعی متوازی الاضلاع است.

فعالیت ۱ صفحه ۵۶



فعالیت ۱

متوازی‌الاضلاع ABCD را درنظر بگیرید و قطر BD را رسم کنید. از موازی بودن ضلع‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

دو مثلث ABD و CDB به حالت .... هم‌نهشت‌اند.

در نتیجه، .... = AD و .... = AB.

پاسخ :

$$\left.\begin{array}{r} \text{مورب } BD, AD \parallel BC \Rightarrow \angle B_1 = \angle D_2 \\ \text{مورب } BD, AB \parallel CD \Rightarrow \angle B_1 = \angle D_1 \\ BD = BD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \Delta ABD \cong \Delta CDB \Rightarrow \left| \begin{array}{l} AD = BC \\ AB = CD \end{array} \right.$$

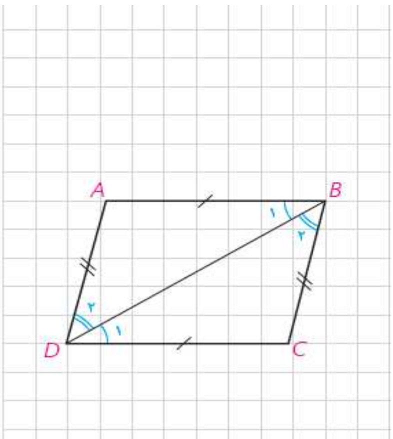
عکس قضیهٔ ۱: اگر در یک چهارضلعی، ضلع های مقابل دوبه‌دو هم‌اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

در چهارضلعی ABCD قطر BD را رسم می‌کنیم. به حالت ...ز ض ز... $\Delta ABD \cong \Delta CDB$. از هم‌نهشتی این دو مثلث نتیجه می‌گیریم، اندازهٔ $\angle B_1$ برابر اندازهٔ ...$\angle D_1$... است.

بنابراین ضلع AB موازی ضلع ...CD... است. از چه قضیه‌ای آن را نتیجه گرفته‌اید؟

قضیه ی خطوط موازی و مورب

موازی بودن دو ضلع دیگر یعنی ضلع‌های AD و BC را چگونه نتیجه می‌گیرید؟



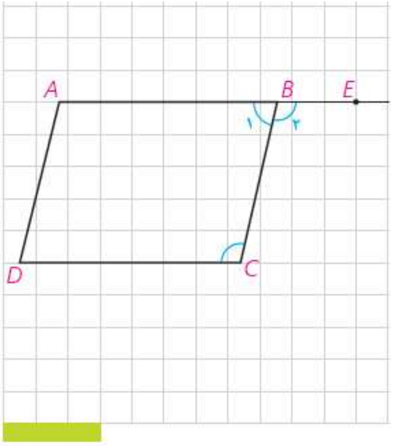
$\angle D_2 = \angle B_2 \Rightarrow AD \parallel BC$

بنابراین چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

زیرا $AB \parallel CD$ و BC مورب است.

مکمل اند

فعالیت ۲



چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.

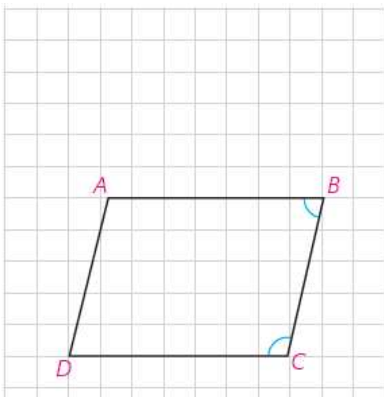
با توجه به شکل، $\angle B_۲ = \angle C$ است؛ چرا؟ $\angle B_۱$ و $\angle B_۲$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟ بنابراین $\angle B_۱$ و $\angle C$ ......مکمل...... می‌باشند.

بنابراین قضیهٔ زیر ثابت شده است؛

> **قضیهٔ ۲:** در متوازی‌الاضلاع هر دو زاویهٔ مجاور مکمل‌اند.

صفحه ۵۸

> **عکس قضیهٔ ۲:** هر چهارضلعی که هر دو زاویهٔ مجاور آن مکمل باشند، متوازی‌الاضلاع است.



در چهارضلعی ABCD، دو زاویهٔ $\angle B$ و $\angle C$ با هم مکمل‌اند. در این صورت ضلع AB موازی ضلع ......CD...... است.

به همین ترتیب دو زاویهٔ $\angle B$ و $\angle A$ نیز مکمل‌اند. در نتیجه، ضلع AD موازی ضلع ......BC...... است؛ بنابراین چهارضلعی ABCD ......متوازی الاضلاع...... است.

> **قضیهٔ ۳:** در هر متوازی‌الاضلاع، هر دو زاویهٔ مقابل هم‌اندازه‌اند.

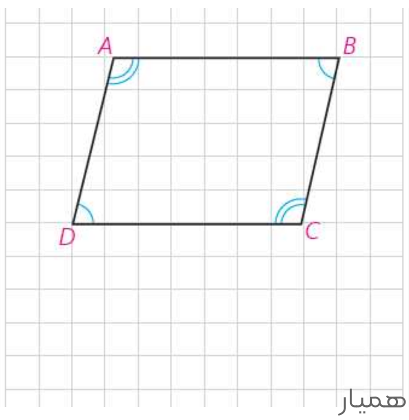
با توجه به قضیهٔ قبل آن را ثابت کنید.

می‌توانید از فعالیت (۱) نیز استفاده کنید.

$$\left.\begin{array}{l}\angle A+\angle B=۱۸۰^\circ\\ \angle B+\angle C=۱۸۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \angle A+\angle B=\angle B+\angle C\Rightarrow \angle A=\angle C$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A+\angle B=۱۸۰^\circ\\ \angle A+\angle D=۱۸۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \angle A+\angle B=\angle A+\angle D\Rightarrow \angle B=\angle D$$

> **عکس قضیهٔ ۳:** اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویهٔ مقابل هم‌اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



فرض کنیم در چهارضلعی ABCD هر دو زاویهٔ مقابل هم‌اندازه باشند. یعنی $\angle B$ و $\angle D$ و همچنین $\angle C$ و $\angle A$ هم‌اندازه‌اند. می‌دانیم مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر چهارضلعی محدب ۳۶۰° است. چگونه به کمک آن ثابت می‌کنید هر دو زاویهٔ مجاور مثلاً $\angle B$ و $\angle C$ مکمل‌اند؟

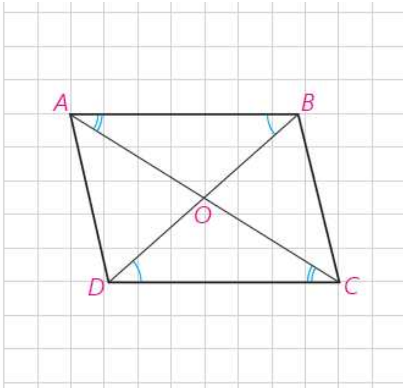
$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=۳۶۰° \xrightarrow[\angle B=\angle D]{\angle A=\angle C} ۲\angle A+۲\angle B=۳۶۰° \xrightarrow{\div ۲} \angle A+\angle B=۱۸۰° \quad \boxed{۱}$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A=\angle C\\ \angle B+\angle D\end{array}\right\} \xrightarrow{\boxed{۱}} \angle A+\angle B=\angle B+\angle C=\angle C+\angle D=\angle A+\angle D=۱۸۰° \Rightarrow AB \parallel CD , AD \parallel BC$$

فعالیت ۳

در متوازی‌الاضلاع ABCD، دو قطر AC و BD را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن دو را O می‌نامیم. $\Delta AOB \cong \Delta COD$. چرا؟

بنابراین، OA = ...OC... و OB = ...OD... در نتیجه؛

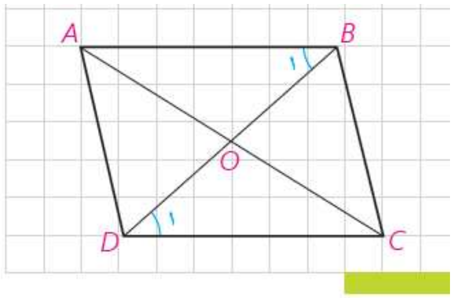


قضیهٔ ۴: در هر متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند

$$\left.\begin{array}{ll} AC \;,\; AB \parallel CD \Rightarrow \angle A_۱=\angle C_۱ & \text{مورب}\\ AB=CD & \text{(بنا به قضیه ۱)}\\ BD \;,\; AB \parallel CD \Rightarrow \angle B_۱=\angle D_۱ & \text{مورب}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \Delta OAB=\Delta OCD$$

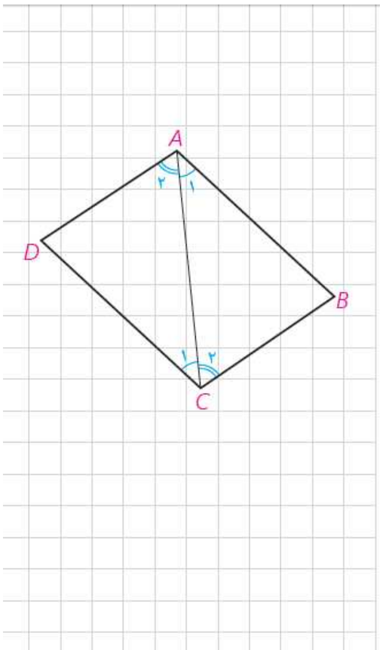
فعالیت ۴

فرض کنید در یک چهارضلعی دو قطر منصف یکدیگر باشند. چگونه نشان می‌دهید این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است؟



$$\left.\begin{array}{ll} & OA=OC\\ \text{متقابل به رأس} & \hat{O}_۱=\hat{O}_۲\\ & OB=OC\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta OAB \cong \Delta OCD \Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{D}_۱ \Rightarrow AB \parallel CD$$

به روش مشابه ثابت می شود : $\Delta OAD \cong \Delta OBC \Rightarrow \hat{B}_۲=\hat{D}_۲ \Rightarrow AD \parallel BC$



فعالیت ۵

فرض کنید در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل موازی و هم‌اندازه باشند. مثلاً در چهارضلعی ABCD، ضلع‌های AB و CD هم‌اندازه و موازی‌اند. قطر AC را رسم می‌کنیم.

اندازهٔ $\angle A_۱$ با اندازهٔ ...$\angle C_۱$... برابر است.

بنابراین، بنابر حالت هم‌نهشتی ...زض ز...، $\Delta ABC \cong \Delta CDA$.

در نتیجه اندازهٔ $\angle A_۲$ برابر اندازهٔ زاویهٔ ...$\angle C_۲$... است که از آن نتیجه می‌گیرید ضلع AD موازی ضلع ...BC... است. بنابراین، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

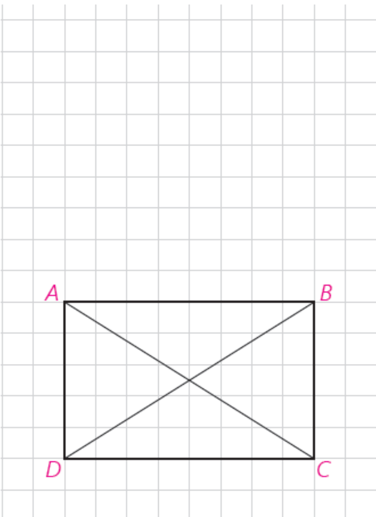
یعنی؛

هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن هم‌اندازه و موازی باشند، متوازی‌الاضلاع است.

ویژگی‌هایی از مستطیل و لوزی

کدام ویژگی از مستطیل است که در هر متوازی‌الاضلاعی که مستطیل نباشد، برقرار نیست؟ در مورد مربع چطور؟ خیر

زاویه قائمه



در مستطیل ABCD، دو قطر را رسم می‌کنیم. از هم‌نهشتی کدام دو مثلث می‌توان نتیجه گرفت AC=BD ؟ این هم‌نهشتی را نشان دهید.

بنابراین در هر مستطیل قطرها .مساوی‌اند.

$$\left.\begin{aligned} AD &= BC \\ \angle C = \angle D &= ۹۰^\circ \\ CD &= CD \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta ADC \cong \Delta BCD \Rightarrow AC = BD$$

اگر دو قطر یک چهارضلعی هم‌اندازه باشند، آیا می‌توان نتیجه گرفت آن چهارضلعی مستطیل است؟ خیر (توضیح : در ذوزنقه متساوی الساقین نیز قطرها مساوی اند)

اگر این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، چطور؟ آن را با دلیل بیان کنید.

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ AC = BD \\ CD = CD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta ADC \cong \Delta BCD \Rightarrow \angle C = \angle D$$

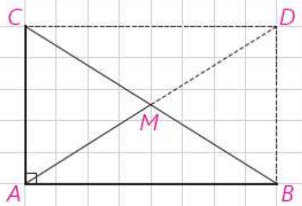
از طرف دیگر در هر متوازی الاضلاع زاویه های مجاور مکمل یکدیگرند . پس : $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = ۹۰^\circ$

فعالیت ۶

ویژگی مهمی در مثلث قائم‌الزاویه

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را که در آن $\angle A$ قائمه است و AM میانهٔ وارد بر وتر است درنظر می‌گیریم.

روی نیم‌خط AM نقطه D را چنان در نظر می‌گیریم که $AM = MD$.



چرا چهارضلعی ABDC متوازی‌الاضلاع است؟ زیرا قطرهایش یکدیگر را نصف می کنند

چرا این چهارضلعی مستطیل است؟
زیرا زاویه A قائمه است و هر متوازی الاضلاعی که زاویه قائمه دارد . مستطیل است

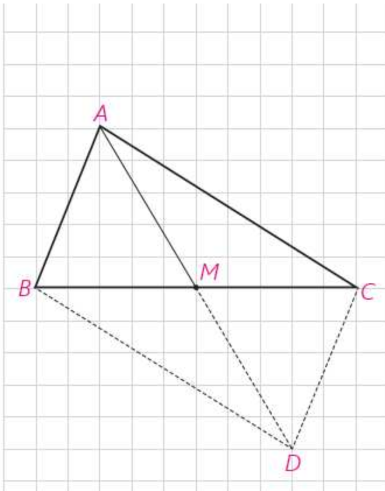
در مورد قطرها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
قطرهای هر مستطیل باهم مساوی اند.

اندازهٔ AM چه رابطه‌ای با اندازهٔ BC دارد؟ آن را بیان کنید.

$$AM = \frac{BC}{۲}$$

در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر ...نصف..... اندازهٔ وتر است.

اگر در مثلثی اندازهٔ میانهٔ وارد بر یک ضلع، نصف اندازهٔ آن ضلع باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.



در مثلث ABC، AM میانه وارد بر ضلع BC است و $AM = \frac{BC}{۲}$. روی نیم‌خط AM نقطهٔ D را چنان در نظر می‌گیریم که MD = AM.

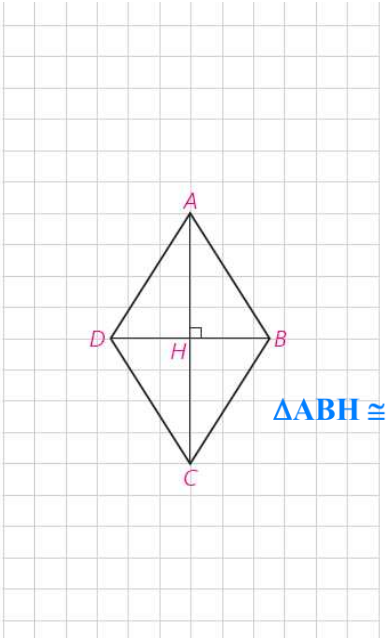
آیا می‌توانید نتیجه بگیرید AD = BC و قطرهای AD و BC منصف یکدیگرند؟ بله

چگونه نتیجه می‌گیرید $\angle A$ قائمه است؟

بنا به قضایای قبل هر چهار ضلعی که قطرهایش یکدیگر را نصف کنند مستطیل است لذا تمام زاویه های داخلی آن قائمه اند.

ویژگی‌هایی که فقط در لوزی برقرارند

آیا می‌توانید یک ویژگی از لوزی را بیان کنید که در هر متوازی‌الاضلاع یا هر مستطیل، که لوزی نیست، برقرار نباشد؟ بله ، هر چهار ضلع لوزی با هم برابرند.



قطرهای لوزی ABCD را رسم می‌کنیم. چون لوزی متوازی‌الاضلاع است، قطرها منصف یکدیگرند. ΔABD چه نوع مثلثی است؟ متساوی الساقین

نقطهٔ تلاقی دو قطر را H می‌نامیم، در مثلث ABD ، AH چه پاره‌خطی است؟ میانه

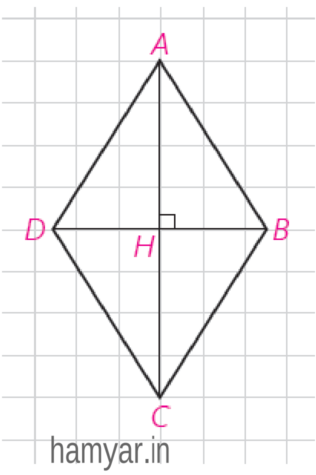
چرا پاره‌خط AH بر قطر BD عمود است و روی نیمساز $\angle A$ است؟ زیرا $\Delta ABH \cong \Delta ADH$

بنابراین؛

در هر لوزی قطرها عمود منصف یکدیگرند و قطرها روی نیمساز های زاویه‌ها می‌باشند.

کار در کلاس صفحه ۶۱

۱ــ نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، لوزی است.

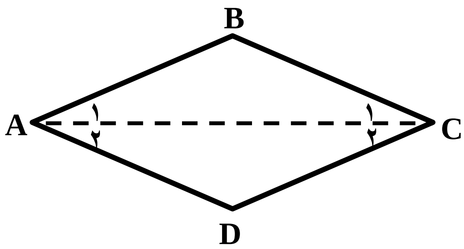


فرض : $AB \parallel CD, AD \parallel BC, AC \perp BD$

حکم : $AB = BC = CD = DA$

برهان : قطرهای هر متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می کنند و از طرف دیگر $AC \perp BD$ پس در ΔABD ، AH عمود منصف ضلع BD است . لذا مثلث متساوی الساقین می باشد . به طریق مشابه در ΔABC نیز BH عمود -منصف ضلع AC می باشد بنا براین می توان نتیجه گرفت که $AB = BC = CD = DA$ پس چهار ضلعی $ABCD$ لوزی است.

۲ــ نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که در آن لااقل یک قطر روی نیمساز یک زاویهٔ آن باشد، لوزی است.



فرض : $AB \parallel CD, AD \parallel BC, \angle A_۱ = \angle A_۲$

حکم : $AB = BC = CD = DA$

برهان : در دو مثلث ABC, ACD داریم :

$$\left.\begin{matrix} \angle A_۱ = \angle A_۲ \\ \angle B = \angle D \end{matrix}\right\} \longrightarrow \angle C_۱ = \angle C_۲ \quad \boxed{۱}$$

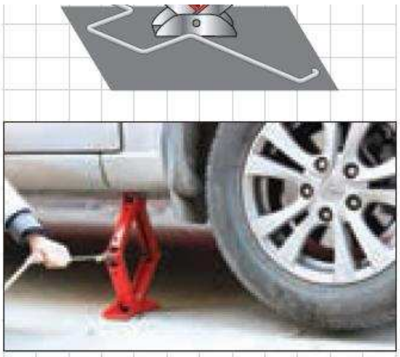
$$\left.\begin{matrix} \angle A_۱ = \angle A_۲ \\ \boxed{۱} \Rightarrow \angle C_۱ = \angle C_۲ \\ AC = AC \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \Delta ABC \cong \Delta ACD \Rightarrow \left| \begin{matrix} AB = AD \\ BC = CD \end{matrix}\right.$$

از طرف دیگر در هر متوازی الاضلاع ، اضلاع موازی مساوی اند پس : $AB = BC = CD = DA$

اکنون با توجه به ویژگی‌های مستطیل و لوزی نشان دهید در چه صورت مستطیل یا لوزی، مربع است.

۱-مستطیلی که دو ضلع مجاورش مساوی باشند مربع است. ۲- مستطیلی قطرهایش بر هم عمودند مربع است . ۳- مستطیلی قطرهایش نیمساز زاویه های داخلی باشند مربع است.

۱- هر لوزی که یکی از زاویه های آن قائمه باشد مربع است. ۲- هر لوزی که قطرهای مساوی دارد مربع است.

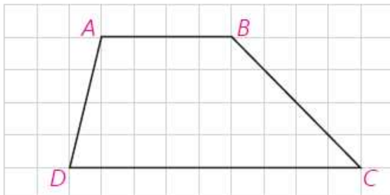


در شکل یک جک اتومبیل را می‌بینید. چهار بازوی آن یک لوزی تشکیل می‌دهند. آیا حالتی از جک وجود دارد که به شکل مربع درآید؟

اگر دو بازوی بالا با هم و دو بازوی پایین نیز باهم اندازه‌های مساوی داشته باشند، اما شکل جک لوزی نباشد، هنگام بسته‌شدن جک وقتی بخواهیم دو بازوی بالا روی دو بازوی پایین قرار گیرند چه مشکلی ایجاد می‌شود؟

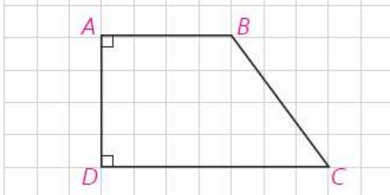
جک به طور کامل بسته نمی شود . زیرا مجموع طول های دو ضلع بالایی با مجموع طول های دو ضلع پایینی مساوی نیست.

صفحه ۶۲



هر یک از دو ضلع AB و CD را که موازی‌اند، **قاعده** و هر یک از دو ضلع غیرموازی را **ساق** می‌نامند. از موازی بودن قاعده‌های AB و CD و قاطع‌های BC و AD در مورد زاویه‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ دو زاویه مجاور به یک ساق ، مکمل اند.

زاویه‌های $\angle A$ و $\angle D$ .....مکمل..... هستند. همچنین زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ .....مکمل..... هستند.

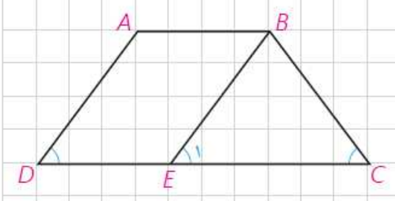


اگر در یک ذوزنقه اندازه‌های دو ساق برابر باشند، آن را ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌نامند.

هرگاه در یک ذوزنقه یک ساق بر یکی از قاعده‌ها عمود باشد، مسلماً برقاعدهٔ دیگر نیز عمود است؛ چرا؟ زیرا دو زاویه مجاور به یک ساق ، مکمل اند.

در این صورت ذوزنقه را قائم‌الزاویه می‌نامند.

فعالیت ۷



ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD را که در آن $AD = BC$ است، درنظر می‌گیریم.

از رأس B خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم تا قاعدهٔ DC را در E قطع کند. در این صورت چهارضلعی ABED .....متوازی الاضلاع..... است.

چرا دو زاویهٔ $\angle D$ و $\angle E_1$ هم اندازه‌اند؟

$DC, AD \parallel BE \Rightarrow \angle D = \angle E_1$ مورب

$BC = BE$ چرا؟

زیرا اگر دو زاویه از مثلثی با هم برابر باشند . اضلاع روبرو به آنها نیز با هم برابرند

بنابراین اندازهٔ $\angle E_1$ برابر اندازهٔ .....$\angle C$..... است.

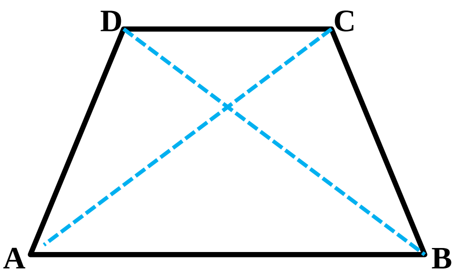
اکنون $\angle C$ و $\angle D$ هم‌اندازه‌اند. چرا؟ بنابراین :

در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به یک قاعده هم‌اندازه‌اند.

به کمک ویژگی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، ویژگی زیر به سادگی ثابت می‌شود. آن را ثابت کنید.

صفحه ۶۳

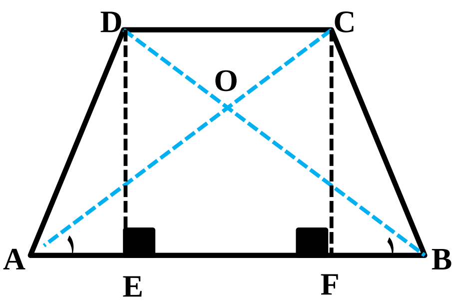
در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قطرها اندازه‌های مساوی دارند و بر عکس.



فرض : $AB \parallel CD \ , \ AD = BC$ حکم : $AC = BD$

برهان : در دو مثلث ABC , ABD داریم :

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ \angle A = \angle B \\ AB = AB \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta ABC \cong \Delta ABD \Rightarrow AC = BD$$



برعکس

فرض : $AB \parallel CD \ , \ AC = BD$ حکم : $AD = BC$

برهان : عمودهای DE , CF را بر AB وارد می کنیم چهار ضلعی $CDEF$ مستطیل است . پس $DE = CF$

$$\left.\begin{array}{l} \angle E = \angle F = 90^\circ \\ AC = BD \\ CF = DE \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر ویک ضلع}} \Delta ACF \cong \Delta BDE \Rightarrow \angle A_1 = \angle B_1 \Rightarrow OA = OB$$

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ AC = BD \end{array}\right\} \Rightarrow OC = OD$$

پس دو مثلث OAD , OBC بنا به حالت (ض ز ض) همهشت اند . در نتیجه $AD = BC$

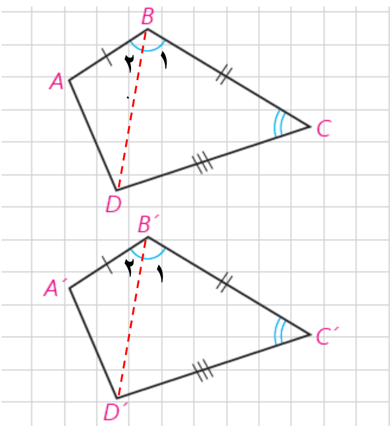
تمرین صفحه ۶۳

تمرین

۱ــ در کدام n ضلعی تعداد قطرها و ضلع‌ها برابر است؟

پاسخ :

$$\frac{n(n-۳)}{۲}=n \Rightarrow \cancel{n}(n-۳)=۲\cancel{n} \Rightarrow n-۳=۲ \Rightarrow n=۵$$



الف ۲ــ در دو چهارضلعی مقابل $AB = A'B'$ و $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ است. چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

ب اگر $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ و $\angle D = \angle D'$، در این حالت چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

پاسخ قسمت الف :

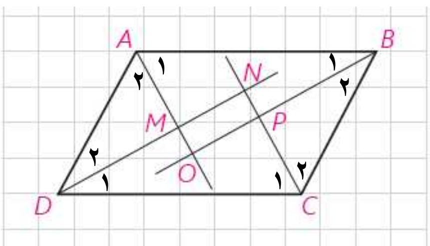
قطرهای BD , $B'D'$ را در دو چهارضلعی رسم می کنیم بدیهی است که دو مثلث BCD , $B'C'D'$ همنهشت اند

پس : $\angle B_۱ = \angle B'_۱ \xrightarrow{\angle B = \angle B'} \angle B_۲ = \angle B'_۲$

در دو مثلث ABD , $A'B'D'$:

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ \angle B_۲ = \angle B'_۲ \\ BD = B'D' \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta A'B'D' \xrightarrow{\Delta BCD \cong \Delta B'C'D'} \square ABCD \cong \square A'B'C'D'$$

پاسخ قسمت ب : دراین حالت کافی است قطرهای AC , $A'C'$ را رسم نموده و مانند قسمت الف عمل کنیم.



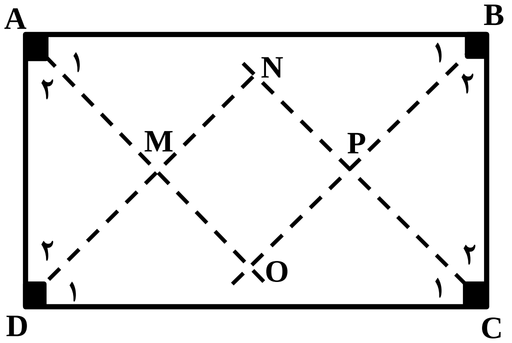
۳ــ از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی MNPQ پدید آمده است. ثابت کنید این چهارضلعی مستطیل است. اگر ABCD مستطیل باشد، نشان دهید چهارضلعی MNPQ مربع است.

$$\boxed{۱}\quad \square ABCD\,; \angle A + \angle B = ۱۸۰° \Rightarrow \frac{\angle A}{۲} + \frac{\angle B}{۲} = \frac{۱۸۰°}{۲} \Rightarrow \Delta OAB; \angle A_۱ + \angle B_۱ = ۹۰° \Rightarrow \angle O = ۹۰°$$

به روش مشابه ثابت می شود :

$\Delta OAB; \angle C_۱ + \angle D_۱ = ۹۰° \Rightarrow \angle N = ۹۰°$ $\boxed{۲}$, $\Delta PBC; \angle B_۲ + \angle C_۲ = ۹۰° \Rightarrow \angle P = ۹۰°$ $\boxed{۲}$

$\boxed{۱}, \boxed{۲}, \boxed{۳} \Rightarrow \angle M = \angle N = \angle P = \angle O = ۹۰° \Rightarrow$ چهارضلعی MNPO مستطیل است



اگر چهارضلعی ABCD مستطیل باشد:

$\Delta CDN ; \angle C_۱ = \angle D_۱ = ۴۵° \Rightarrow CN = DN$ $\boxed{۱}$

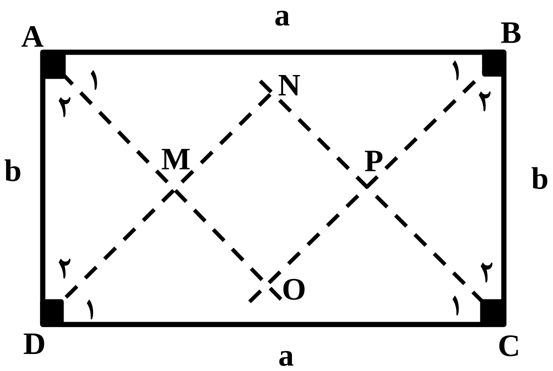
$$\left.\begin{array}{l} \angle A_۲ = \angle B_۲ = ۴۵° \\ AD = BC \\ \angle D_۲ = \angle C_۲ = ۴۵° \end{array}\right\} \longrightarrow \Delta BCP \cong \Delta ADM \Rightarrow PC = DM \quad \boxed{۲}$$

$\boxed{۱}, \boxed{۲} \Rightarrow CN - PC = DN - DM \Rightarrow PN = MN$

پس طول و عرض مستطیل MNPO با هم برابرند . به عبارت دیگر MNPO□ مربع است.

صفحه ۶۴

۴ــ در مسئلهٔ قبل، اگر اندازه‌های ضلع‌های مستطیل a و b باشند، اندازهٔ ضلع مربع را برحسب a و b محاسبه کنید.



$\Delta DCN; \angle N = ۹۰° \Rightarrow CN^۲ + BN^۲ = CD^۲$

$\xrightarrow{CN = DN} ۲CN^۲ = a^۲ \Rightarrow CN = \frac{a}{\sqrt{۲}} = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ $\boxed{۱}$

$\Delta BCP; \angle P = ۹۰° \Rightarrow PC^۲ + PB^۲ = BC^۲$

$\xrightarrow{CN = DN} ۲CP^۲ = b^۲ \Rightarrow CP = \frac{b}{\sqrt{۲}} = \frac{b\sqrt{۲}}{۲}$ $\boxed{۲}$

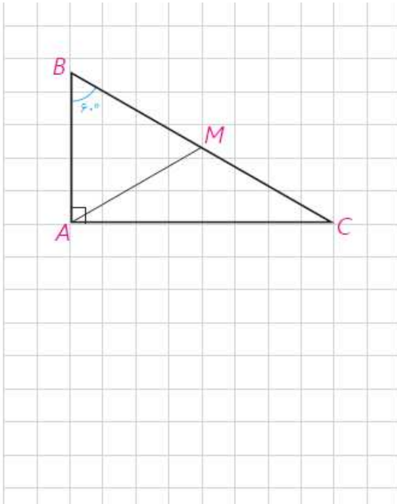
$\boxed{۱}, \boxed{۲} \Rightarrow CN - CP = \frac{a\sqrt{۲}}{۲} - \frac{b\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow PN = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(a - b)$

۵ــ مثلث قائم‌الزاویهٔ $\triangle ABC$ را که در آن $\angle A$ قائمه و اندازهٔ $\angle C$ برابر ۳۰° است، در نظر می‌گیریم. میانهٔ وارد بر وتر را رسم کنید. مثلث‌های AMC و AMB چگونه مثلث‌هایی هستند؟ نشان دهید $AB = \frac{BC}{۲}$ یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر اندازهٔ یک زاویه ۳۰° باشد، اندازهٔ ضلع مقابل آن نصف اندازهٔ وتر است.

سپس با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث نشان دهید، $AC = \frac{\sqrt{۳}}{۲}BC$.

یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر یک زاویه ۶۰° باشد، اندازهٔ ضلع مقابل آن $\frac{\sqrt{\ }}{\ }$ اندازهٔ وتر است.

اکنون مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازهٔ یک زاویهٔ آن ۴۵° باشد و نشان دهید که اندازهٔ هر ضلع زاویهٔ قائمه در آن $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ اندازهٔ وتر است.



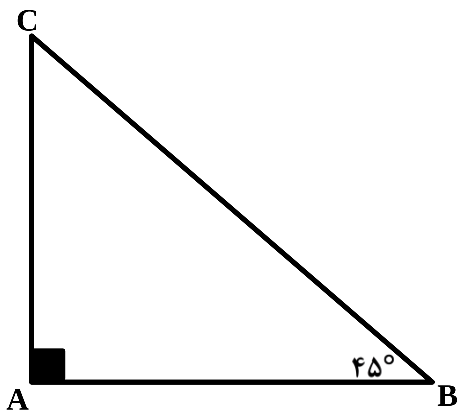
پاسخ : در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس :

$$\Delta ABC; \angle A = ۹۰^\circ, \angle C = ۳۰^\circ \Rightarrow \angle B = ۶۰^\circ$$

$$\Delta ABM; AM = BM \Rightarrow \angle A_۱ = \angle B = ۶۰^\circ \Rightarrow AM = BM = AB \Rightarrow AB = \frac{BC}{۲}$$

$$\Delta ABC; \angle A = ۹۰^\circ \Rightarrow AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \xrightarrow{AB = \frac{BC}{۲}} AC^۲ = BC^۲ - \left(\frac{BC}{۲}\right)^۲$$

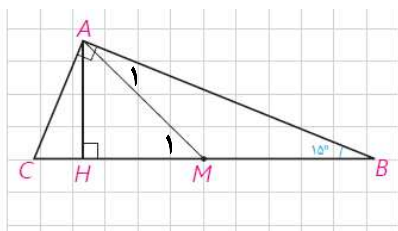
$$\Rightarrow AC^۲ = \frac{۳BC^۲}{۴} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{۳}}{۲}BC$$



$$\Delta ABC; \angle A = ۹۰^\circ , \angle B = ۴۵^\circ \Rightarrow \angle B = \angle C \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \end{cases}$$

$$۲AB^۲ = BC^۲ \Rightarrow AB^۲ = \frac{BC^۲}{۲} \Rightarrow AB = \frac{BC}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}BC$$

۶ــ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، اندازهٔ زاویهٔ B برابر ۱۵° است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ اندازهٔ وتر است.



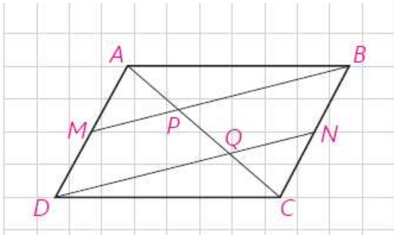
در مثلث قائم الزاویه میانه وارد وتر نصف وتر است پس:

$$\Delta ABC; AM = MB = \frac{BC}{۲} \Rightarrow \angle A_۱ = \angle B = ۱۵° \Rightarrow \angle M_۱ = \angle A_۱ + \angle B = ۳۰°$$

از طرف دیگر در مثلث قائم الزاویه ضلع روبرو به زاویه ی ۳۰ درجه نصف وتر است

$$\Delta AMH ; \angle H = ۹۰°, \angle M_۱ = ۳۰° \Rightarrow AH = \frac{AM}{۲} \Rightarrow AH = \frac{\frac{AM}{۲}}{\frac{۲}{۱}} = \frac{AM}{۴}$$

۷ـ در متوازی‌الاضلاع ABCD ، M و N به ترتیب وسط‌های ضلع‌های AD و BC می‌باشند. چرا خط‌های MB و DN موازی‌اند؟ به کمک آن ثابت کنید $AP = PQ = QC$.



پاسخ : اگر در یک چهار ضلعی دو ضلع موازی و مساوی باشند آن چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.در چهار ضلعی BMDN داریم :

$$\left.\begin{array}{r} AD = BC \xrightarrow{\div ۲} BN = MD \\ BN \parallel MD \end{array}\right\} \Rightarrow BM \parallel DN$$

$$\Delta ADQ; MP \parallel DQ \Rightarrow \frac{AP}{PQ} = \frac{AM}{MQ} = ۱ \Rightarrow AP = PQ$$

$$\Delta BCP; BP \parallel QN \Rightarrow \frac{CQ}{QP} = \frac{CN}{NB} = ۱ \Rightarrow CQ = PQ$$

$$\Rightarrow AP = PQ = QC$$

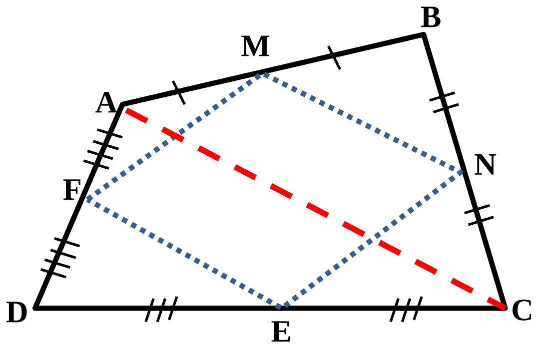
تهیه کننده :

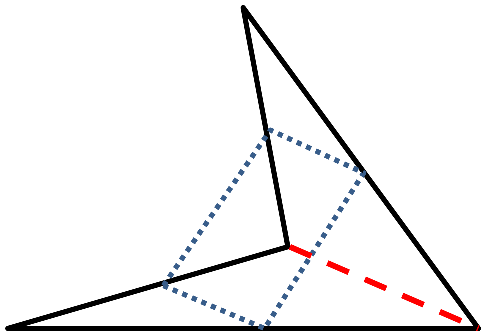
گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

۸ــ ثابت کنید اگر وسط‌های ضلع‌های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.

این چهارضلعی باید چه ویژگی‌ای داشته‌باشد تا این متوازی‌الاضلاع مستطیل یا لوزی شود؟

چه رابطه‌ای بین محیط متوازی‌الاضلاع پدید آمده با اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه وجود دارد؟





برهان : فرض کنیم نقاط F,E,N,M به ترتیب وسطهای اضلاع AD,CD,BC,AB از چهار ضلعی $ABCD$ باشند باید ثابت کنیم چهار ضلعی $MNEF$ متوازی الاضلاع است . قطر AC را رسم می کنیم :

$$\Delta ABC; \frac{BM}{AB}=\frac{BN}{BC}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel AC, MN=\frac{AC}{۲} \quad \boxed{۱}$$

$$\Delta ACD; \frac{DE}{DC}=\frac{DF}{DA}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{عکس تالس}} EF \parallel AC, EF=\frac{AC}{۲} \quad \boxed{۲}$$

$$\boxed{۱},\boxed{۲} \Rightarrow MN \parallel EF \ , \ MN=EF$$

به عبارت دیگر در چهار ضلعی $MNEF$ دو ضلع موازی و مساوی اند لذا چهار ضلعی $MNEF$ متوازی الاضلاع است.

اگر قطرهای چهار ضلعی $ABCD$ بر هم عمود باشند .چهار ضلعی $MNEF$ مستطیل است .زیرا قطرهای چهار ضلعی $ABCD$ چهار ضلعی $MNEF$ موازی اند.

اگر قطرهای چهار ضلعی $ABCD$ با هم مساوی باشند .چهار ضلعی $MNEF$ لوزی است . و اندازه هر ضلع این لوزی نصف طول قطر چهار ضلعی $ABCD$ است.

$$MN=EF=\frac{AC}{۲} \ , \ FM=EN=\frac{BD}{۲} \Rightarrow MN+NE+EF+FM=۲\left(\frac{AC}{۲}+\frac{BD}{۲}\right)=AC+BD$$

سوال های تکمیلی :

۱- یک n ضلعی ۹۰ قطر دارد . مجموع زاویه های داخلی آن را حساب کنید.

۲- اگر به تعداد اضلاع یک n ضلعی ۳ ضلع اضافه شود ۳۶ قطر به قطرهای آن اضافه می شود . مجموع زاویه های داخلی n ضلعی را حساب کنید.

۳- مجموع زاویه های خارجی n ضلعی محدب را حساب کنید.

۴- ثابت کنید یک چند ضلعی محدب نمی تواند بیش از سه زاویه حاده داشته باشد.

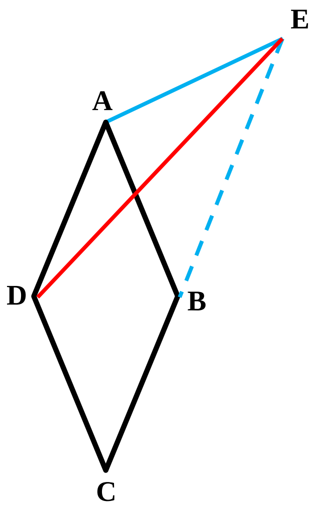
۵- در شش ضلعی محدب ABCDEF زاویه های روبرو دو به دو متساوی اند $\left(\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F\right)$. ثابت کنید اضلاع روبرو دو به دو با هم موازی اند.

۶- نشان دهید در هر چهار ضلعی محدب ، زاویه ی حاده بین نیمسازهای دو زاویه مقابل ، مساوی نصف تفاضل دو زاویه ی دیگر است.

۷- ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع هر خطی (به جز قطر های متوازی الاضلاع) که از مرکز می گذرد . آن را به دو ذو زنقه همنهشت تقسیم می کند.

۸- ثابت کنید در هرذوزنقه متساوی الساقین زاویه های مقابل مکمل اند و برعکس.

۹- روی امتداد ضلع BC از لوزی ABCD نقطه E را چنان اختیار می کنیم که $AE = CD$ نشان دهید DE نیمساز زاویه $\angle AEB$ است.



۱۰- در مربع ABCD از رأس A خط دلخواهی رسم می کنیم تا ضلع CD را در نقطه E قطع کند. اگر F نقطه ی برخورد نیمساز زاویه ی $\angle BAE$ با ضلع BC باشد . ثابت کنید : $BF + DE = AE$

۱۱- نشان دهید برای آنکه چهار نیمساز زاویه های داخلی یک ذوزنقه از یک نقطه بگذرند کافی است که مجموع طول های قاعده ها ، مساوی مجموع طول ساق ها باشد.

۱۲- از متوازی الاضلاعی طول دو قطر و یک ضلع معلوم است . این متوازی الاضلاع را رسم کنید

نقد و بررسی :

- در تعریف چند ضلعی صفحه ۵۴ از شرط هم صفحه بودن رئوس حرفی به میان نیامده است . چندضلعی که رئوس آن در یک صفحه نباشند چند ضلعی فضایی نام دارد این چند از نظر مجموع زاویه های داخلی ، محدب و مقعر بودن و .... با چندضلعی در صفحه متفاوت است .
- تعریف چند ضلعی محدب صفحه ۵۵ بدون ارائه هیچ گونه کاربردی در حل مسائل و قضیه های کتاب مطرح شده است.
- تعریف چهارضلعی ها بسیار منطقی و خوب ارائه شده و نتایج و قضیه های حاصل از این تعریف ها کاملا با هم سازگارند.
- اگر چه اغلب قضیه ها به صورت فعالیت یا کار در کلاس مطرح شده است . ولی مشارکت دانش آموز در روند استدلال بسیار اندک است . و اغلب سوالهای مطرح شده در متن قضیه ها به طور شهودی نیز قابل پاسخ هستند.
- در کل فصل نامگذاری چهارضلعی ها فقط با چهار حرف ثابت D, C, B, A است که این باعث می شود دانش آموز در مواجه با مسائل خارج از چارچوب کتاب درسی دچار سردگمی شود.
- مسائل کاربردی و مدل سازی در این فصل مطرح نشده است (به جز کار درکلاس صفحه ۶۱).
- در تمرین های صفحه ۶۴ متن سوال های ۵ و ۸ بسیار طولانی است و دانش آموز را دچار سردرگمی و اضطراب می کند.
- بهتر بود از مسائل ترسیم با خطکش و پرگار نیز در تمرینات استفاده می شد.

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان