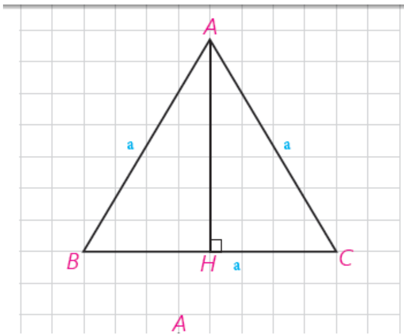
فصل ۳

درس دوم : مساحت و کاربردهای آن

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان



کاردرکلاس

فرض کنیم اندازهٔ هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر a باشد، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. ارتفاع AH میانه نیز است؛ چرا؟

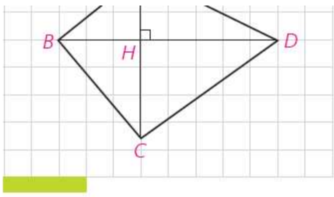
$$\Delta ABH \cong \Delta ACH \Rightarrow BH = CH = \frac{a}{۲}$$

به کمک قضیهٔ فیثاغورث نشان دهید $AH = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و $S = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$.

$$\Delta ABH ; \angle H = ۹۰^\circ \Rightarrow AH^۲ + BH^۲ = AB^۲$$

$$\Rightarrow AH^۲ = a^۲ - \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ = \frac{۳a^۲}{۴} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲}AH \times BC \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \times a = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$



در چهارضلعی ABCD دو قطر AC و DB برهم عمودند.

$S_{ADB} = \dots\dots\dots$

$S_{DBC} = \dots\dots\dots$

$$S_{\Delta ADB} = \frac{۱}{۲}BD \times AH$$

$$S_{\Delta DBC} = \frac{۱}{۲}BD \times CH$$

۶۵

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}BD \times (AH + HC) = \frac{۱}{۲}BD \times AC$$

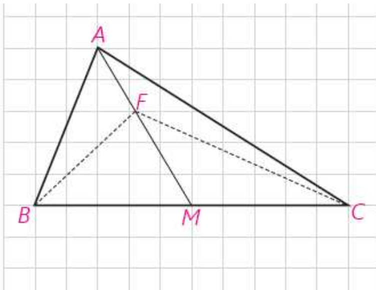
با جمع این دو مساحت داریم،

$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}BD(\dots + \dots) = \frac{۱}{۲}BD\dots$

بنابراین؛

مساحت هر چهار ضلعی که قطرهای آن بر هم عمودند برابر است با نصف حاصلضرب اندازه های دو قطر آن چهار ضلعی

کاردرکلاس



نشان دهید یک میانه در هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

اگر F هر نقطه‌ای روی میانهٔ AM به‌جز نقطهٔ M باشد آیا، $S_{FBM} = S_{FMC}$ است؟ چرا؟

الف : در مثلث ABC ارتفاع AH را رسم می کنیم:

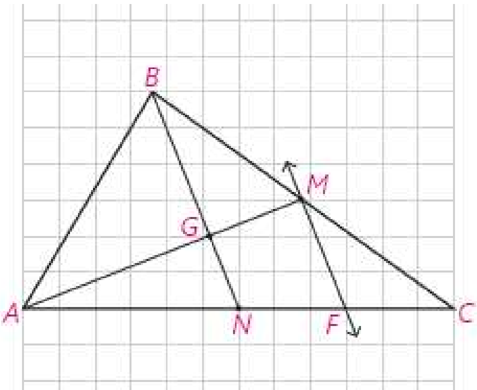
$$\left.\begin{array}{l} S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} AH \times BM \\ S_{\Delta ACM} = \frac{1}{2} AH \times CM \end{array}\right\} \xrightarrow{BM=MC} S_{\Delta ABM} = S_{\Delta ACM}$$

ب : بله زیرا FM نیز میانه BFC است.

فعالیت

در این فعالیت ویژگی مهمی از سه میانهٔ مثلث را ثابت می‌کنید.

دو میانهٔ AM و BN از ΔABC را رسم می‌کنیم. یکدیگر را در نقطهٔ G درون مثلث قطع می‌کنند. از M وسط ضلع BC خطی را موازی میانهٔ BN رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در F قطع کند. چرا F وسط NC است؟ N وسط ضلع AC است؛ بنابراین، $AF = 3NF$. چرا؟ در نتیجه، $AM = 3GM$. چرا؟



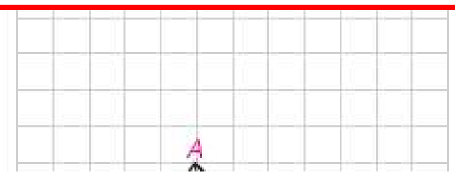
$$\Delta BCN ; MF \parallel BN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CF}{FN} = \frac{CM}{MB} = 1$$
$$\Rightarrow CF = FN$$

$$AN = NC = 2NF$$
$$\Rightarrow AF = AN + FN = 2FN + FN = 3FN$$

$$\Delta AMF ; MF \parallel GN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AG}{GM} = \frac{AN}{NF} = 2$$
$$AG == 2GM \Rightarrow AM = 3GM$$

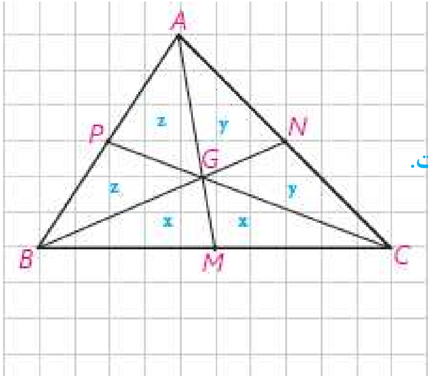
بنابراین، $GM = \frac{1}{3}AM$ و $AG = \frac{2}{3}AM$ و G بین A و M است؛ در نتیجه تنها نقطه‌ای روی نیم‌خط AM است که $AG = \frac{2}{3}AM$. مشابه آن ثابت می‌شود $BG = \frac{2}{3}BN$. پس برای هر دو میانهٔ دلخواه نقطهٔ G با این ویژگی به‌دست می‌آید در نتیجه هر سه میانه در G همرس‌اند.

به روش دیگر، می‌توانید از M به N وصل کنید و از تشابه دو مثلث GMN و GAB استفاده کنید؛ چون AB=2MN پس AG=2GM و BG=2GN. اکنون می‌توانید مانند روش قبلی ادامه دهید.



سه میانهٔ هر مثلث در نقطه‌ای درون آن مثلث همرس‌اند؛ به طوری که فاصلهٔ این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{1}{3}$ اندازهٔ میانه نظیر این ضلع است، و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{2}{3}$ اندازهٔ میانه نظیر آن رأس است.

و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{۲}{۳}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر آن رأس است.

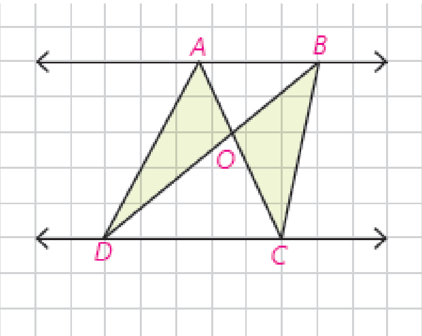


با رسم سه میانهٔ مثلث نشان دهید، سه میانهٔ مثلث آن را به شش مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند. بنابر فعالیت قبلی $S_{BGM} = S_{MGC} = x$. چرا؟ زیرا **GM** میانه مثلث **BGC** است.

به همین ترتیب برای بقیه برقرار است.

اکنون میانهٔ AM را درنظر بگیرید، $۲z + x = ۲y + x$ در نتیجه $y = y$.

میانهٔ BN را درنظر بگیرید $۲z + y = ۲x + y$ در نتیجه، $z = x$. پس، $x = y = z$

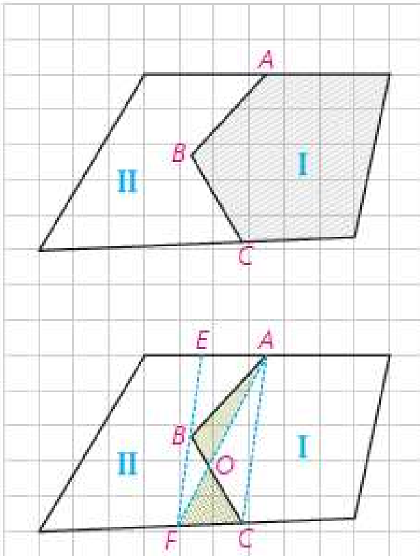


ویژگی ۳. فرض کنیم دو خط AB و CD موازی باشند؛ به‌طوری که دو خط AC و BD در نقطه‌ای مانند O متقاطع باشند. می‌دانیم: $S_{ADC} = S_{BDC}$. چگونه از آن نتیجه می‌گیرید، $S_{OAD} = S_{OBC}$ ؟

این ویژگی که در هر ذوزنقه نیز برقرار است، در حل مسائل کاربرد خوبی دارد.

$$S_{\Delta ACD} = S_{\Delta BCD} \Rightarrow S_{\Delta ACD} - S_{\Delta OCD} = S_{\Delta BCD} - S_{\Delta OCD} \Rightarrow S_{\Delta AOD} = S_{\Delta BOC}$$

یک مسئله



در شکل دو مزرعهٔ I و II متعلق به دو کشاورز است. این دو کشاورز برای استفاده از ماشین‌های کشاورزی می‌خواهند مرز مشترک ABC بین دو زمین خود را به یک پاره‌خط مستقیم تبدیل کنند به‌طوری که مساحت‌های زمین‌های آنها تغییر نکند. چگونه شما می‌توانید این کار را برای آنها انجام دهید؟

فکر اصلی این عمل براساس مسئلهٔ قبلی است.

از A به C متصل، و از B موازی خط AC رسم کنید تا دو مرز دیگر را در E و F قطع کند. اکنون نشان دهید این مرز مشترک جدید می‌تواند مرز AF باشد؛ چرا؟ البته می‌تواند مرز EC نیز باشد.

زیرا دو پاره خط **AC , BF** موازی و **AF , BC** یکدیگر را در نقطه **O** قطع کرده اند پس بنا به قضیه قبل $S_{\Delta OAB} = S_{\Delta OCF}$

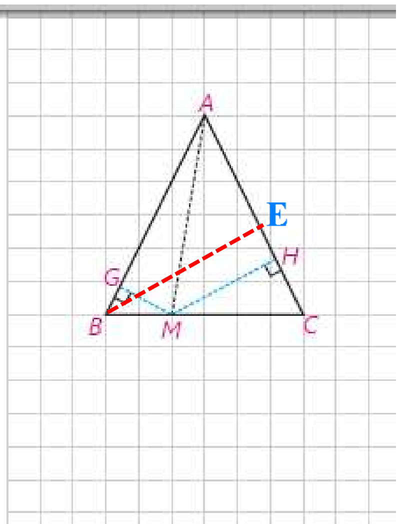
با توجه به اینکه چهار ضلعی **AEBC** نیز ذوزنقه می باشد و به روش مشابه می توان به جای **AF , BC** از **EC , AB** استفاده کرد.

فعالیت صفحه ۶۸

در مثلث متساوی‌الساقین ABC که AB = AC است؛ نقطهٔ دلخواه M را روی ضلع BC بین B و C درنظر بگیرید. از M دو عمود MH و MG را به ترتیب بر دو ساق AC و AB رسم کنید. S_{AMC} و S_{AMB} را بنویسید.

مساحت مثلث ΔABC را نیز وقتی پاره‌خط AB یا AC قاعده باشند، بنویسید.

چه رابطه‌ای بین این مساحت‌ها وجود دارد؟ آن را بنویسید. از این رابطه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

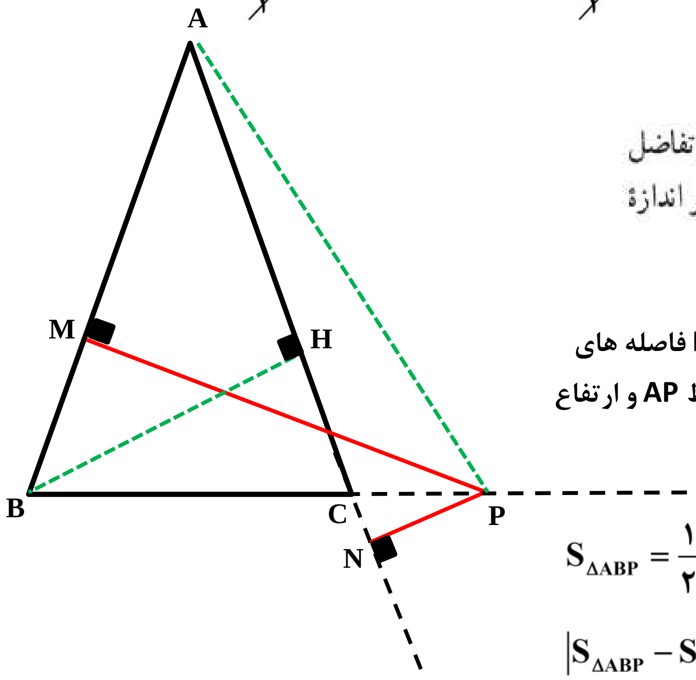


در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC که AB=AC است، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده BC از ....AC,AB.... برابر ارتفاع وارد بر ساق مثلث است

$$S_{\Delta ABM}=\frac{۱}{۲}AB\times MG\ ,\ S_{\Delta ACM}=\frac{۱}{۲}AC\times MH\quad ,\ S_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}AC\times BE$$

$$S_{\Delta ABM}+S_{\Delta ACM}=S_{\Delta ABC}\xrightarrow{AB=AC}\frac{۱}{۲}AC\times MG+\frac{۱}{۲}AC\times MH=\frac{۱}{۲}AC\times BE$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\cancel{۲}}\cancel{AC}\times(MG+MH)=\frac{۱}{\cancel{۲}}\cancel{AC}\times BE\Rightarrow MG+MH=BE$$



به همین ترتیب نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC، قدرمطلق تفاضل فاصله‌های هر نقطه روی امتدادهای قاعدهٔ BC از خط‌های شامل دو ساق برابر اندازهٔ ارتفاع وارد بر ساق است.

فرض کنیم P نقطه ای روی امتداد ضلع BC باشد . اگر PM و PN فاصله های نقطه P از دو ساق مثلث ABC $(AB=AC=a)$ باشند . پاره خط AP و ارتفاع BH از مثلث ABC را رسم می کنیم.

$$S_{\Delta ABP}=\frac{۱}{۲}AB\times PM\ ,\ S_{\Delta ACP}=\frac{۱}{۲}AC\times PN\quad ,\ S_{\Delta ABC}=\frac{۱}{۲}AC\times BH$$

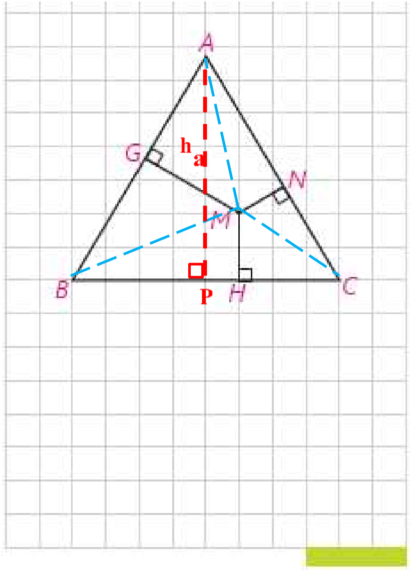
$$\left|S_{\Delta ABP}-S_{\Delta ACP}\right|=S_{\Delta ABC}\xrightarrow{AB=AC=a}\left|\frac{۱}{۲}a\times PM-\frac{۱}{۲}a\times PN\right|=\frac{۱}{۲}a\times BH$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\cancel{۲}}\cancel{a}\times\left|PM-PN\right|=\frac{۱}{\cancel{۲}}\cancel{a}\times BH\Rightarrow \left|PM-PN\right|=BH$$

فعالیت

نقطهٔ دلخواه M را درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به اندازهٔ a در نظر بگیرید. سپس از M سه عمود بر سه ضلع رسم کنید. از M به سه رأس مثلث ABC متصل کنید. مساحت‌های سه مثلث MAC ، MBC و MAB را محاسبه کنید. این مساحت‌ها با مساحت ΔABC چه رابطه‌ای دارند؟ آن را بنویسید. از آن چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$MH + MN + MG =$ AP



مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع برابر ارتفاع مثلث

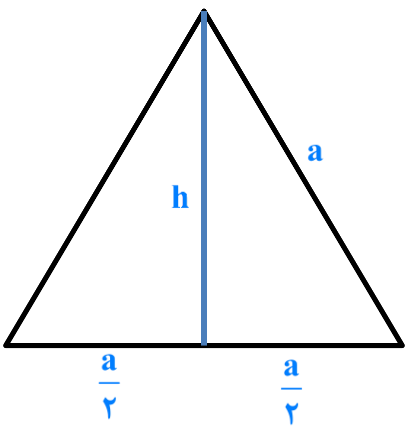
۶۸

$$S_{\Delta AMB} = \frac{۱}{۲}AB\times MG = \frac{۱}{۲}a\times MG \;,\; S_{\Delta AMC} = \frac{۱}{۲}AC\times MN = \frac{۱}{۲}a\times MN \;,\; S_{\Delta BMC} = \frac{۱}{۲}BC\times MH = \frac{۱}{۲}a\times MH$$

$$S_{\Delta AMB} + S_{\Delta AMC} + S_{\Delta BMC} = S_{\Delta ABC} \Rightarrow \frac{۱}{۲}a\times MG + \frac{۱}{۲}a\times MN + \frac{۱}{۲}a\times MH = \frac{۱}{۲}a\times AP \Rightarrow MG + MN + MH = h_a$$

سوال بالای صفحه ۶۹

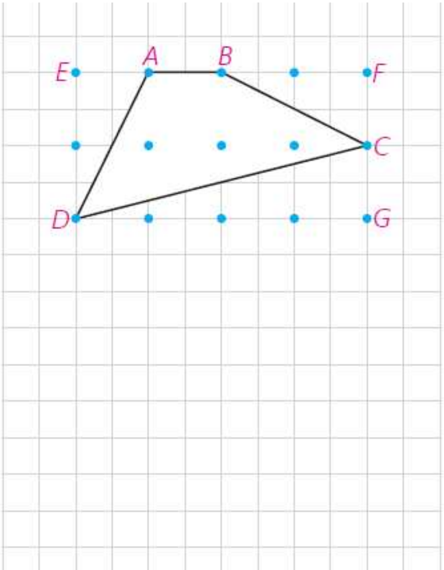
اگر در یک مثلث متساوی‌الاضلاع فاصله‌های نقطهٔ M درون مثلث از سه ضلع، برابر ۲، ۴ و ۶ باشند. اندازهٔ ضلع مثلث را محاسبه کنید.



$$h = ۲ + ۴ + ۶ = ۱۲$$

$$h^۲ + \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ = a^۲ \Rightarrow ۱۲^۲ = a^۲ - \frac{a^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow ۱۴۴ = \frac{۳}{۴}a^۲ \Rightarrow a^۲ = ۱۹۲ \Rightarrow a = \sqrt{۱۹۲} = ۸\sqrt{۳}$$



مطابق شکل نقطه‌ها روی خط‌های افقی و عمودی واقع‌اند؛ به‌طوری که فاصلهٔ هر دو نقطه متوالی روی یک خط افقی (عمودی) برابر واحد است. چنین نقاطی را نقاط شبکه‌ای و چندضلعی‌هایی مانند ABCD را که تمام رأس‌های آنها روی نقاط شبکه‌ای واقع‌اند، چندضلعی‌های شبکه‌ای می‌نامند.

نقاط شبکه‌ای روی رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی را نقاط مرزی و نقاط شبکه‌ای درون چندضلعی‌ها را نقاط درونی شبکه‌ای برای چندضلعی شبکه‌ای می‌نامند.

به‌طور مثال در شکل بالا چهارضلعی ABCD یک چهارضلعی شبکه‌ای است که دارای ۴ نقطهٔ مرزی و ۳ نقطه درونی شبکه‌ای است.

در این چهارضلعی، شبکه‌ای با به کاربردن مساحت مثلث‌های قائم‌الزاویه و مستطیل نشان دهید مساحت چهارضلعی ABCD برابر ۴ واحد سطح است.

$$S_{\square DEFG} = ۴ \times ۲ = ۸$$

$$S_{\Delta AED} = S_{\Delta BCF} = \frac{۱ \times ۲}{۲} = ۱, S_{\Delta CDG} = \frac{۴ \times ۱}{۲} = ۲$$

$$S_{\square ABCD} = ۸ - (۱ + ۱ + ۲) = ۴$$

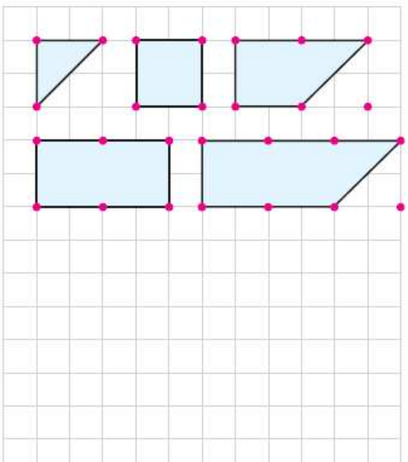
فعالیت صفحه ۶۹

فعالیت

۱ــ یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطهٔ مرزی می‌تواند داشته باشد؟ چرا؟

حداقل ۳ نقطه مرزی – زیرا برای رسم مثلث شبکه ای حداقل به سه نقطه نیاز داریم

۲ــ یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطهٔ درونی می‌تواند داشته باشد؟ صفر



جدول زیر را با محاسبهٔ مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای کامل کنید.

$i = ۰$ ، $b = ۳،۴،۵ ،......$

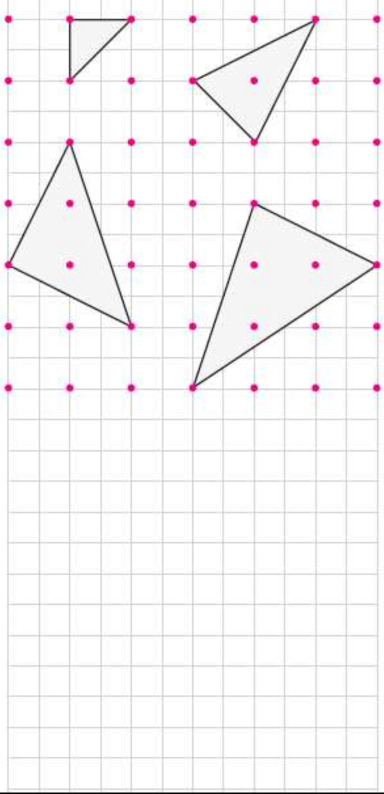
تعداد نقاط مرزی i	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مساحت	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۵}{۲}$	۳

بین مساحت و تعداد نقاط مرزی چه رابطه‌ای وجود دارد؟

$S = \frac{b}{۲} - ۱ + ۰$

۴ــ اکنون نقاط مرزی را ثابت نگه دارید و نقاط درونی را تغییر دهید. فرض کنید تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای $b=۳$ باشند. با توجه به شکل‌ها جدول زیر را کامل کنید.

(نتیجه‌گیری $S=\frac{b}{۲}-۱+۰$ را که در قسمت (۳) پیدا کرده‌اید درنظر داشته باشید.)

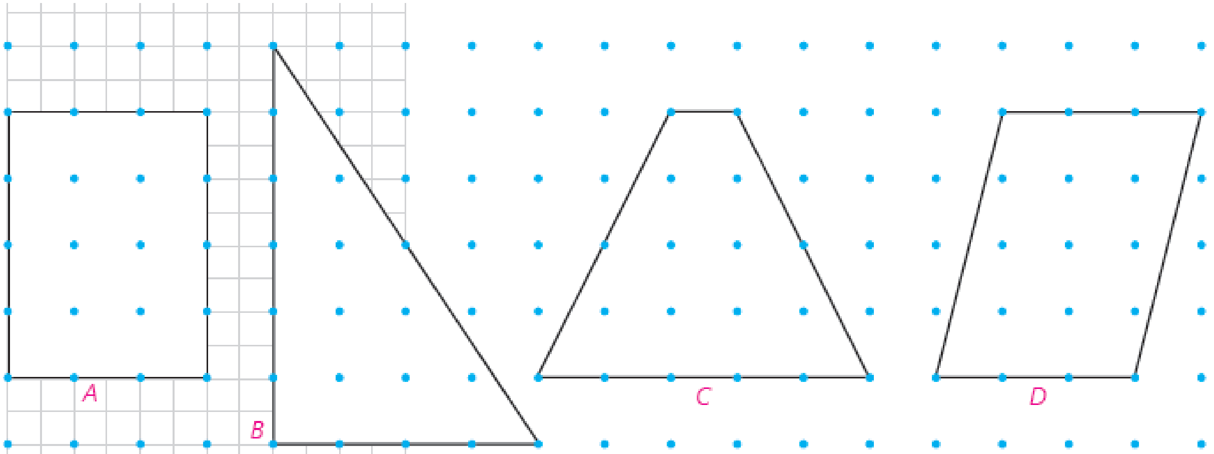


تعداد نقاط درونی i	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$\frac{b}{۲}-۱$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
S	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۵}{۲}$	$\frac{۷}{۲}$	$\frac{۷}{۲}$	$\frac{۹}{۲}$

با تکمیل جدول بالا و مقایسهٔ اعداد هر ستون تشخیص دهید که مساحت هر چندضلعی شبکه‌ای با تعداد نقاط مرزی و درونی چه ارتباطی دارد. از این جدول نتیجه بگیرید b و i با چه ضریب‌هایی ظاهر می‌شوند.

$$\boxed{S=\frac{b}{..۲..}-..۱....+...i...}$$

کاردرکلاس صفحه ۷۱



$$S_A=۳\times۴=۱۲$$

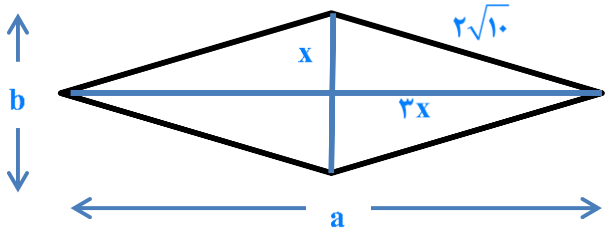
$$S_B=\frac{۴\times۶}{۲}=۱۲$$

$$S_C=\frac{۴\times(۱+۵)}{۲}=۱۲$$

$$S_D=۴\times۳=۱۲$$

چند ضلعی	A	B	C	D
تعداد نقاط مرزی b	۱۴	۱۲	۱۰	۸
تعداد نقاط درونی i	۶	۷	۸	۹
مساحت	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲

تمرین صفحه ۷۲

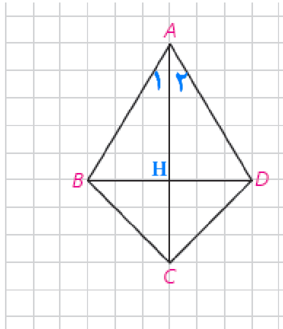


تمرین

۱ــ در یک لوزی اندازهٔ هر ضلع $۲\sqrt{۱۰}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{۱}{۳}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.

$$x^۲+(۳x)^۲=\left(۲\sqrt{۱۰}\right)^۲ \Rightarrow x^۲+۹x^۲=۴۰ \Rightarrow ۱۰x^۲=۴۰ \Rightarrow x^۲=۴$$

$$\Rightarrow x=۲ \Rightarrow a=۱۲\ ,b=۴ \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times ۱۲\times ۴=۲۴$$

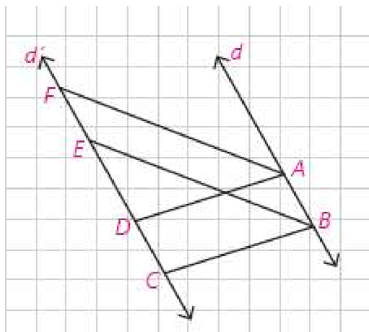


۲ــ در چهارضلعی ABCD، مطابق شکل AB = AD و BC = CD است. آیا قطرهای این چهارضلعی برهم عمودانـد؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای ∠A و ∠C است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است.

$$\left.\begin{array}{l} AB=AD \\ CB=CD \\ AC=AC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ACD \Rightarrow \angle A_۱=\angle A_۲$$

$$\left.\begin{array}{l} AB=AD \\ \angle A_۱=\angle A_۲ \\ AH=AH \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABH \cong \Delta ADH \Rightarrow \angle H_۱=\angle H_۲=۹۰^\circ$$

$$AC \perp BD \Rightarrow S_{\square ABCD}=\frac{۱}{۲}AC\times BD=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۶=۲۴$$

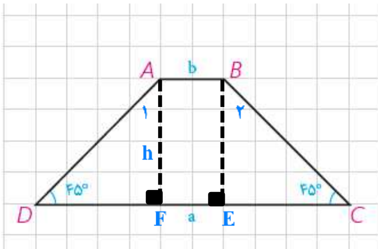


۳ــ در شکل دو خط d و d′ موازی‌اند و ABCD و ABEF هر دو متوازی‌الاضلاع‌اند. اگر مساحت یکی از این متوازی‌الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری برحسب S چقدر است؟

فرض کنیم فاصله دو خط موازی d,d' برابر **h** باشد در این صورت :

$$S_{\square ABCD}=S_{\square ABEF}=AB\times h$$

۴ــ در ذوزنقهٔ شکل مقابل اندازه‌های دو قاعده a و b و اندازه‌های دو زاویهٔ مجاور به یک قاعده 45° است. مساحت ذوزنقه را برحسب a و b محاسبه کنید. از A و B بر قاعده DC عمود کنید.



عمودهای BF , AF را بر CD وارد می کنیم چهارضلعی ABCD مستطیل است پس :

$$AB = EF = b$$

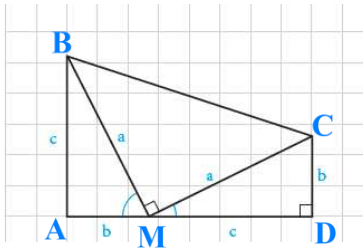
$$\Delta ADF ; \angle A_1 = \angle D = 45^\circ \Rightarrow AF = DF = h$$

$$\Delta BCE ; \angle B_1 = \angle C = 45^\circ \Rightarrow BE = CE = h$$

$$\Rightarrow CD = 2h + b = a \Rightarrow h = \frac{a-b}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b)h \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \times \frac{a-b}{2} = \frac{a^2 - b^2}{2}$$

۵ــ مساحت ذوزنقهٔ مقابل را به‌دو طریق به‌دست آورید. از مساوی قرار دادن آنها چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آید؟



$$S_{\square ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \times AD = \frac{1}{2}(b+c)(b+c) = \frac{1}{2}(b+c)^2$$

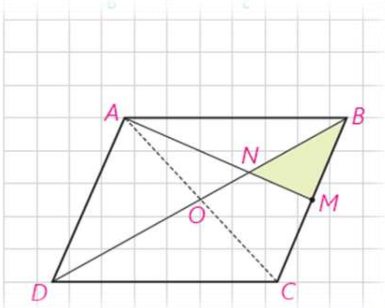
$$S_{\square ABCD} = S_{\Delta ABM} + S_{\Delta CDM} + S_{\Delta MBC} = \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}c^2 = bc + \frac{1}{2}a^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(b+c)^2 = bc + \frac{1}{2}a^2 \xrightarrow{\times 2} (b+c)^2 = 2bc + a^2$$

$$\Rightarrow b^2 + \cancel{2bc} + c^2 = \cancel{2bc} + a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

۶ــ در متوازی‌الاضلاع ABCD، M وسط ضلع BC است و پاره‌خط AM قطر BD را در N قطع کرده‌است. نشان دهید :

$S_{BMN} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$.

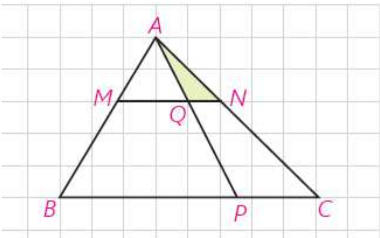


$$\Delta ABC \cong \Delta ACD \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD} \quad \boxed{1}$$

میانه های هر مثلث آن را به شش قسمت با مساحت های مساوی تقسیم می کنند:

$$\Delta ABC ; BM = MC , AO = OC \Rightarrow S_{\Delta MNB} = \frac{1}{6} S_{\Delta ABC} \quad \boxed{2}$$

$$\boxed{1} , \boxed{2} \Rightarrow S_{\Delta MNB} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} S_{\square ABCD}\right) = \frac{1}{12} S_{\square ABCD}$$



۷ــ در مثلث ABC، خط MN موازی ضلع BC است و $\frac{AM}{MB}=\frac{۱}{۲}$. همچنین $\frac{PC}{PB}=\frac{۱}{۳}$ است. S_{AQN} و S_{MQPB} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

$$\frac{PC}{PB}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{PC}{BC}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{S_{\Delta APC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow S_{\Delta ABC}=۴S_{\Delta APC}\quad\boxed{۱}$$

$$\Delta ABC;MN\parallel BC\Rightarrow\begin{cases}\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}=\frac{۱}{۳}\\ \Delta AQN\sim\Delta APC\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{\Delta ANQ}}{S_{\Delta APC}}=\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲}=\frac{۱}{۹}\Rightarrow S_{\Delta APC}=۹S_{\Delta ANQ}\quad\boxed{۲}$$

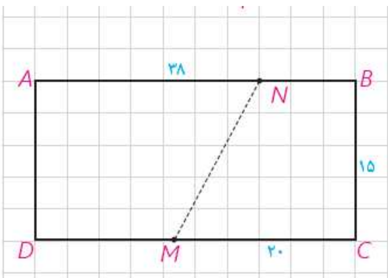
$$\boxed{۱},\boxed{۲}\Rightarrow S_{\Delta ABC}=۹\left(۴S_{\Delta APC}\right)=۳۶S_{\Delta APC}\Rightarrow\frac{S_{\Delta APC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{۱}{۳۶}$$

$$\frac{PB}{BC}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{S_{\Delta APB}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow S_{\Delta APB}=\frac{۳}{۴}S_{\Delta ABC}$$

$$\Delta ABC;MQ\parallel BP\Rightarrow\Delta AQM\quad\Delta ABP$$

$$\Rightarrow\frac{S_{\Delta AMQ}}{S_{\Delta APB}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^{۲}=\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲}=\frac{۱}{۹}\Rightarrow S_{\Delta APB}=۹S_{\Delta AMQ}\Rightarrow S_{\square BPQM}=\frac{۸}{۹}S_{\Delta ABP}\quad\boxed{۲}$$

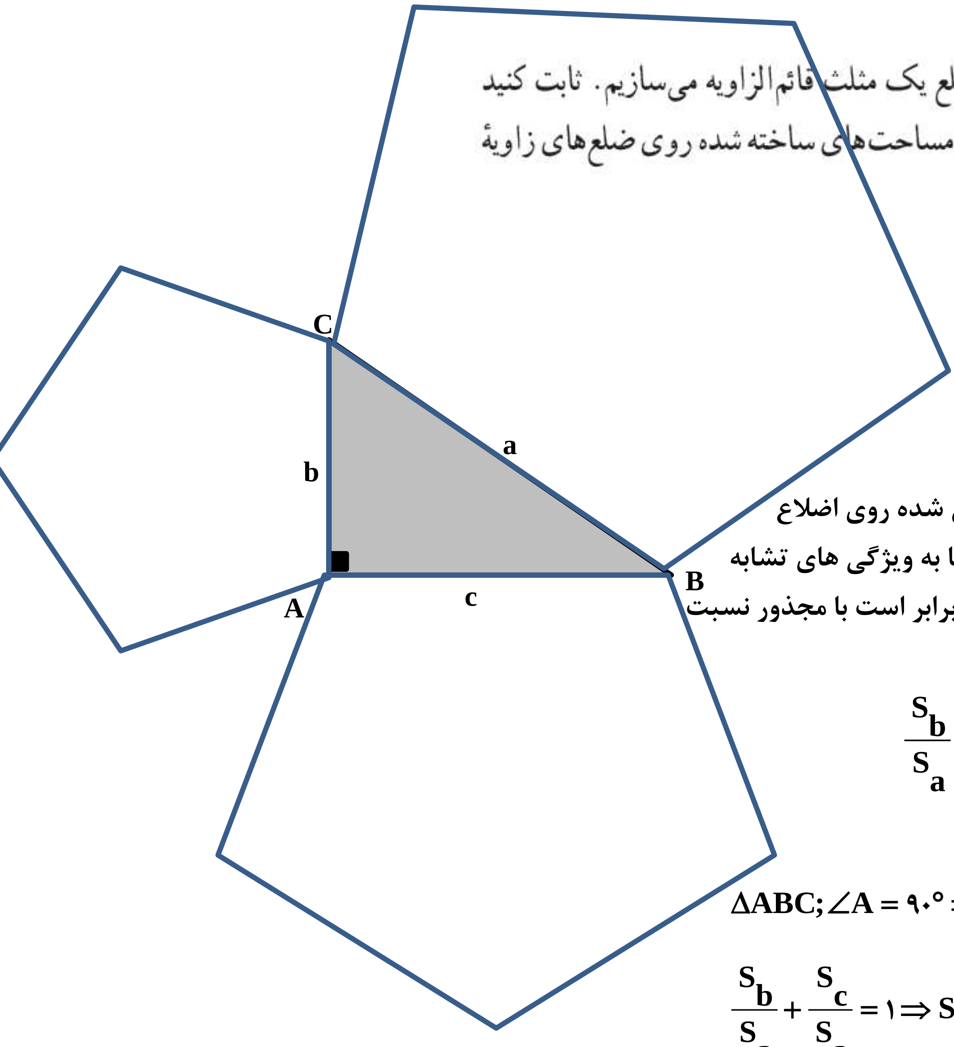
$$\boxed{۱},\boxed{۲}\Rightarrow S_{\square BPQM}=\frac{۸}{۹}\left(\frac{۳}{۴}S_{\Delta ABC}\right)=\frac{۲}{۳}S_{\Delta ABC}\Rightarrow\frac{S_{\square BPQM}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{۲}{۳}$$



۸ــ زمین مستطیل شکلی به ابعاد ۳۸ و ۱۵ متر که دو نفر به‌طور مساوی در آن شریک‌اند، مفروض است. این زمین فقط از نقطهٔ M که $MC=۲۰$ است به یک کوچه راه دارد. مرز MN را چگونه رسم کنیم تا زمین به دو قطعهٔ با مساحت‌های مساوی بین آن دو تقسیم شود.

کافی است نقطه N را روی ضلع AB چنان اختیار کنیم که $AN=۲۰$ در این صورت دو ذورنقه با قاعده های ۲۰ و ۱۸ و ارتفاع ۱۵ تشکیل می شود.

۹ــ سه چندضلعی متشابه روی سه ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازیم. ثابت کنید مساحت چندضلعی روی وتر برابر مجموع مساحت‌های ساخته شده روی ضلع‌های زاویهٔ قائمه است.



اگر مساحت چندضلعی های متشابه تشکیل شده روی اضلاع a,b,c را به ترتیب S_a, S_b, S_c بنامیم بنا به ویژگی های تشابه نسبت مساحت های دو چند ضلعی متشابه برابر است با مجذور نسبت اضلاع متناظر آنها . به عبارت دیگر :

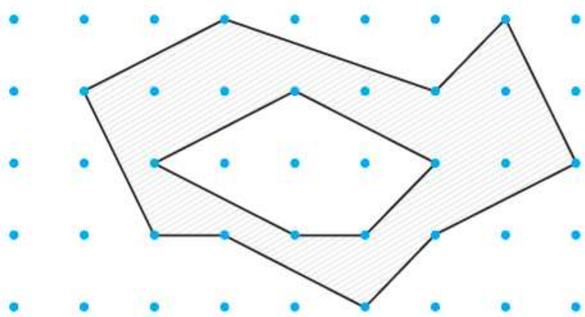
$$\frac{S_b}{S_a}=\left(\frac{b}{a}\right)^۲ \quad , \frac{S_c}{S_a}=\left(\frac{c}{a}\right)^۲$$

از طرف دیگر :

$$\Delta ABC; \angle A = ۹۰^\circ \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow \frac{b^۲}{a^۲}+\frac{c^۲}{a^۲}=۱$$

$$\frac{S_b}{S_a}+\frac{S_c}{S_a}=۱ \Rightarrow S_b + S_c = S_a$$

۱۰ــ با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای، مساحت قسمت سایه‌زده را محاسبه کنید.



$$b = ۱۴ , i = ۵ , S = \frac{b}{۲} - ۱ + i$$
$$\Rightarrow S = ۷ - ۱ + ۵ = ۱۱$$

۱۱ــ یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم که اندازه‌های ضلع‌های آن m و n واحداند مفروض است. مساحت آن را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آنها را مقایسه کنید.

مساحت به روش معمول : $S = m \times n$

مساحت به کمک قضیه پیک :

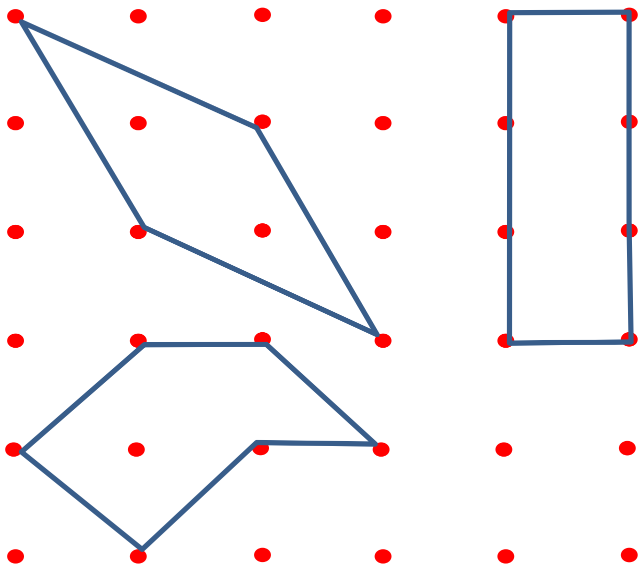
$$b = ۲m + ۲n$$

$$i = (m+۱)\times(n+۱) - (۲m+۲n) = mn - m - n + ۱$$

$$S = \frac{b}{۲} - ۱ + i = \frac{۲m+۲n}{۲} - ۱ + (mn - m - n + ۱) = m + n - ۱ + mn - m - n + ۱ = mn$$

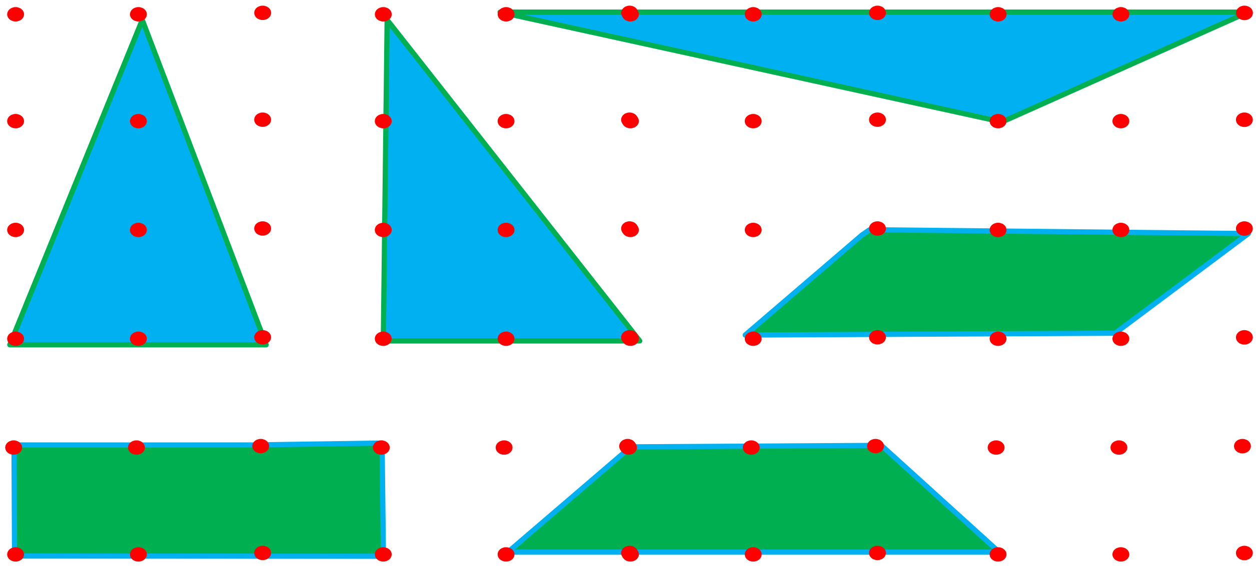
۱۲ــ مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت‌هایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه‌ای مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل‌های چهارضلعی‌های نظیر آن را نیز رسم کنید.

b	۴	۶	۸
i	۲	۱	۰
$S = \frac{b}{۲} - ۱ + i$	۳	۳	۳



تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان



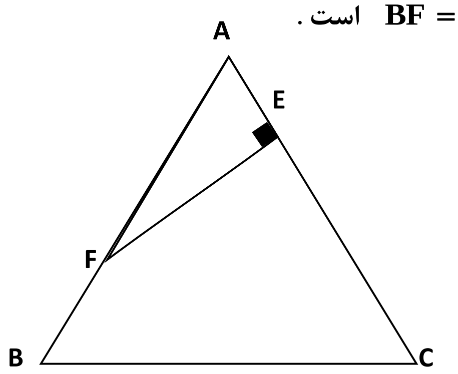
تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان

تمرینات تکمیلی :

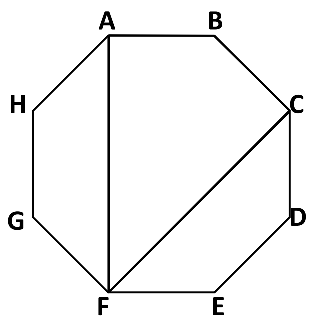
۱- ثابت کنید مساحت هر ذوزنقه برابر است با حاصل ضرب اندازه یک ساق در فاصله ی آن از وسط ساق دیگر.

۲- در شکل مقابل مثلث ABC متساوی الاضلاع و $EF = 2\sqrt{3}$, $BF = 2$ است .
مساحت ناحیه سایه زده را حساب کنید.

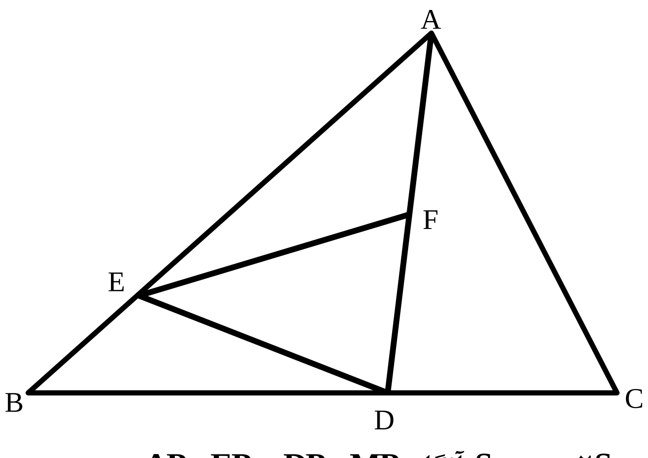


۳-اگر هشت ضلعی مقابل ، منتظم و محیط آن برابر ۳۲ باشد . و قطر های FA و FC زاویه ی EFG را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده باشند .

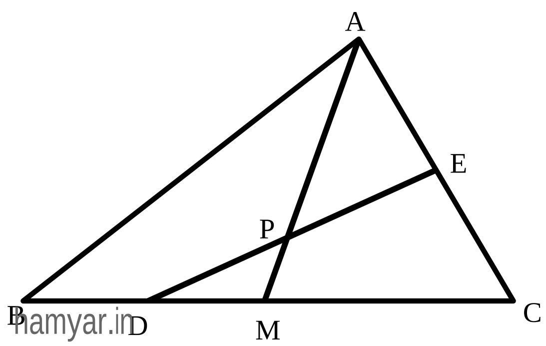
مساحت چهار ضلعی $ABCF$ را حساب کنید ؟



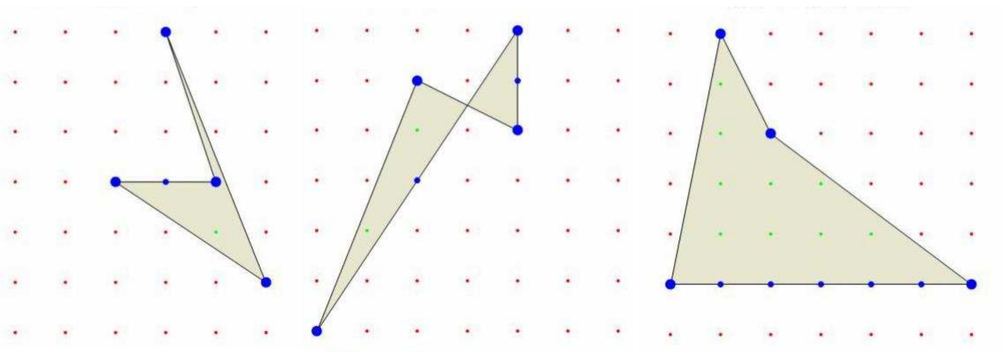
۴-در شکل مقابل مساحت ΔABC برابر ۹۰ سانتی متر مربع و $BD = 2DC$, $BE = \frac{1}{4}EA$ و نقطه ی F وسط پاره خط AD است . مساحت ΔDEF را حساب کنید.



۵- در شکل مقابل AM میانه وارد بر BC است نشان دهید اگر $S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta CDE}$ آنگاه $AP \times EP = DP \times MP$

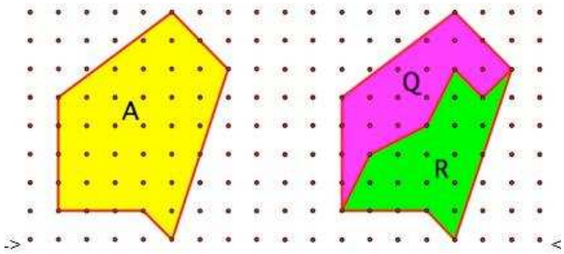


۶- مساحت هر یک از شکل های زیر را به کمک قضیه پیک حساب کنید.



۷- در صفحه مختصات نقاطی که طول و عرض آنها اعداد صحیح می باشند را علامت گذاشته ایم . مربعی که هیچ یک از این نقاط ، نقطه درونی نباشد.حداکثر چه مساحتی دارد؟ آیا اگر این سوال را به کمک قضیه پیک حل می کردیم جواب نهایی تغییر می کرد ؟ چرا ؟

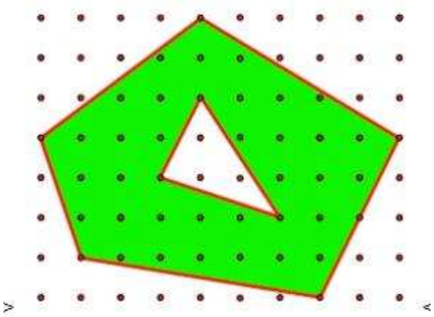
۸- به کمک قضیه پیک در شکل مقابل درستی یا نادرستی رابطه زیر را بررسی کنید:



$$S_Q + S_R = S_A$$

۹- به کمک قضیه پیک در شکل مقابل درستی یا نادرستی رابطه زیر را بررسی کنید:

مساحت قسمت رنگی = مساحت رنگ نشده - مساحت کل شکل



تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوّم متوسطه ، استان خوزستان