

# درس ۱

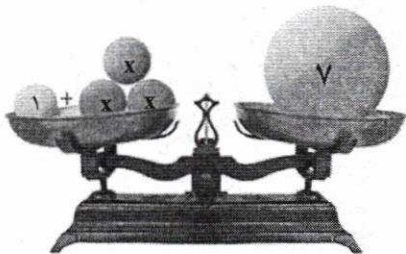
## معادله و مسائل توصیفی

معادله  $4x + 2 = 10$  را در نظر می‌گیریم. این معادله به ازای  $x = 2$  به یک تساوی عددی تبدیل می‌شود.  $x = 2$  را جواب معادله یا ریشه معادله می‌نامند.

فعالیت



با توجه به شکل زیر یک معادله طرح کنید و ریشه آن را بیابید.



$$1 + 3x = 7$$

$$3x = 7 - 1 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

فعالیت



عدد  $x = ?$  را بیابید که دو برابر آن به علاوه عدد یک، برابر با پنج برابر همان عدد منهای چهار باشد.

جواب: عدد مورد نظر را  $x$  در نظر می‌گیریم. با توجه به فرض:

دو برابر آن عدد به علاوه عدد یک معادل  $2x + 1$  و پنج برابر همان عدد منهای عدد چهار، معادل  $5x - 4$  است که باید با یکدیگر برابر باشند، یعنی:

$$2x + 1 = 5x - 4$$

با بردن جملات شامل  $x$  به یک طرف تساوی و بردن اعداد ثابت به طرف دیگر تساوی:

$$5x - 2x = 1 + 4 \Rightarrow 3x = 5$$

$$x = \frac{5}{3}$$

و با تقسیم هر طرف تساوی بر عدد سه، جواب معادله به دست می‌آید:



هر معادله به صورت  $ax+b=0$  را که در آن  $a$  و  $b$  اعداد حقیقی و  $a$  مخالف صفر است، یک معادله درجه اول می نامند. جواب این معادله از  $x = -\frac{b}{a}$  به دست می آید. (چرا؟) چون:

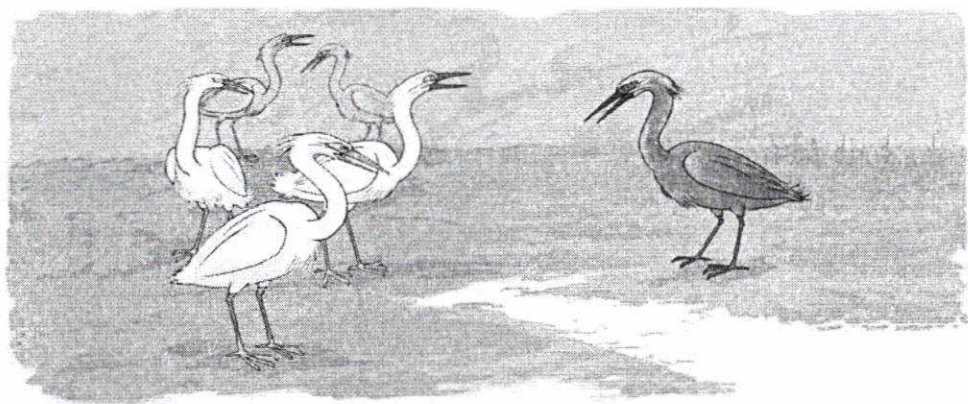
$$ax+b=0 \Rightarrow \frac{ax}{a} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

توضیح:  $(a \neq 0)$

کار در کلاس



یک حواصیل خاکستری دسته ای از حواصیل های سفید را در جنگل حرا\* در جزیره قشم دید. به یکی از آنها گفت: اجازه می دهید من هم در گروه شما باشم و با شما پرواز کنم؟



یکی از آنها پاسخ داد: اگر معمای زیر را حل کنی، تو هم در گروه ما خواهی بود و ادامه داد: «ما و ما و نصف ما و نصفه ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی صد می شویم». لطفاً به پرندۀ کمک کنید تا تعداد پرندگان گروه را تعیین کند و عضوی از گروه آنها باشد. اگر «ما» را  $x$  فرض کنیم:

نصف ای از نصف ما:

$$\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}x$$

$$1 + \text{نصف ما} + \text{نصف ما} + \text{ما} = 100 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + x = 100 \Rightarrow \frac{4+4+2+1}{4}x + 1 = 100 \Rightarrow \frac{11}{4}x - 99 = 0 \Rightarrow \frac{11}{4}x = 99 \Rightarrow x = \frac{99 \times 4}{11} = 36$$

آیا معادله به دست آمده، درجه اول است؟ چرا؟ چون **بزرگترین توان (درجه) متغیران (\*) برابر 1 است.**

ضرایب  $a$  و  $b$  کدام اند؟  $\frac{11}{4}x - 99 = 0$

$$\boxed{a = \frac{11}{4}} \quad \boxed{b = -99}$$

\* شرحی از موقعیت و شرایط این جنگل در صفحه بعد آمده است.

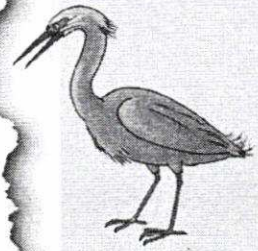
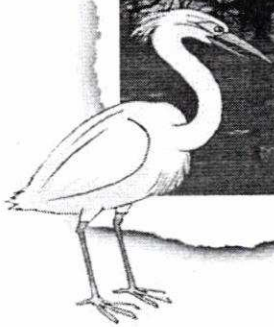
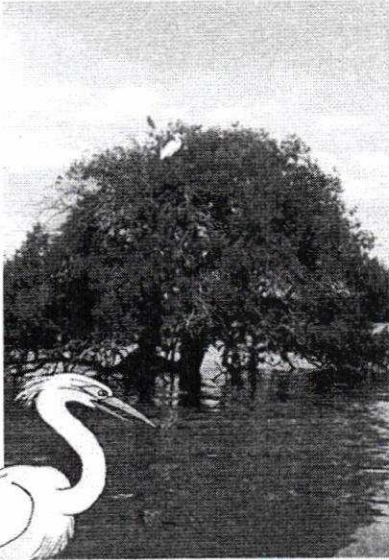
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان



### \* جنگل حرا، جزیره قشم

حرا درختی است که بیشتر در آب‌های جنوبی ایران می‌روید. در این میان جنگل‌های همیشه‌سبز دریایی حرا از این درختان زیبا تشکیل شده است. این جنگل‌ها در حاشیه شمال غربی قشم از زیباترین گردشگاه‌هایی است که همچون نگینی در پهنه نیلگون خلیج فارس چشم‌ها را می‌نوازد و دوستداران طبیعت را به تماشای خویش فرا می‌خواند. این جنگل‌های سبز مامن بیش از ۲۲۰ پرنده بومی و مهاجر است. حواصیل سفید و خاکستری دو گونه زیبا از این پرندگان‌اند.

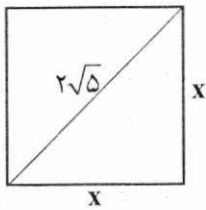


### یادی از گذشته



#### فعالیت کتاب نهم صفحه ۷۳

- محیط مربعی را به دست آورید که قطر آن  $2\sqrt{5}$  باشد.



$$\dots x^2 + \dots x^2 = (2\sqrt{5})^2$$

به کمک رابطه فیثاغورث داریم:

بنابراین:

$$2x^2 = \frac{20}{2} \dots \Rightarrow x^2 = \dots 10 \dots \Rightarrow x = \pm \sqrt{10}$$

پس اندازه هر ضلع مربع با در نظر گرفتن این که اندازه ضلع مثبت است، برابر  $x = \sqrt{10}$  است و

محیط مربع فوق برابر است با:

$$p = 4x \Rightarrow p = 4\sqrt{10}$$

معادله  $2x^2 = 20$  را یک معادله درجه دوم می‌نامیم.



فعالیت



۱. عددی را بیابید که مربع آن، ۳ برابر خود همان عدد باشد.

اگر عدد مورد نظر  $x$  فرض شود، مربع همان عدد برابر  $x^2$  و سه برابر همان عدد برابر  $3x$  است که باید دو عبارت با یکدیگر برابر باشند. یعنی:

$$x^2 = 3x$$

جواب‌های این معادله را می‌توانید حدس بزنید؟ آیا این معادله بیش از یک جواب دارد؟  
از میان مقادیر زیر کدام یک می‌تواند جواب معادله باشد؟ چرا؟ *چون معادله‌ی \* را به یک تساوی درست عددی تبدیل می‌کنند.*

- $x=3$  ,  $x=4$  ,  $x=-3$  ,  $x=1$  ,  $x=0$
- 

**توجه:** به جز روش حدس، برای حل معادله فوق از روش تجزیه نیز می‌توانیم استفاده کنیم:

$$x^2 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x = 0, \quad x(x-3) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \dots \text{یا} \boxed{x=3} \dots$$

$x=0$  یا  $x-3=0$



یادآوری:  
اگر  $a \times b = 0$  باشد  
نتیجه می‌گیریم:  
 $b=0$  یا  $a=0$

معادله درجه دوم، معادله‌ای به شکل  $ax^2 + bx + c = 0$  است که در آن  $a \neq 0$  ضرب  $x^2$  ضرب  $x$  و  $c$  عدد ثابت است.

(مثال)

$$3x^2 - \sqrt{7}x + \frac{1}{5} = 0$$

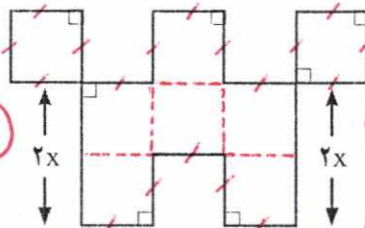
$a=3$     $b=-\sqrt{7}$     $c=\frac{1}{5}$

۲. در شکل زیر طول تمام پاره‌خط‌ها به جز دو پاره‌خط مشخص شده در شکل برابر  $x$  است. اگر اندازه

مساحت شکل برابر با اندازه محیط آن باشد، مقدار  $x$  را به دست آورید.

مساحت مربع =  $1 \times x = x$  (مساحت یک مربع به ضلع  $x$ )  
مساحت شکل =  $1 \times x = x$

محیط اضلاع = مجموع اضلاع =  $1 \times x + 2x + 2x = 22x$



یادآوری:  
یک ضلع ضرب بر خودش = مساحت مربع  
(یک ضلع)<sup>۲</sup>  
مجموع اضلاع = محیط یک شکل

$1 \times x^2 = 22x \dots \Rightarrow$  اندازه محیط شکل = اندازه مساحت شکل

یک معادله درجه دوم است  $1 \times x^2 - 22x = 0$

$22x(4x - 11) = 0 \Rightarrow x = 0$  یا  $\boxed{x = \frac{11}{4}}$

$22x = 0$  یا  $4x - 11 = 0$   
 $\frac{22x}{22} = \frac{0}{22}$  یا  $\frac{4x}{4} = \frac{11}{4}$

عاشق  
طول ضلع نمی‌تواند  
صفر باشد

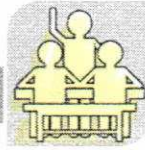
عدد بدون واحد (عوض بر دهنم هیچوقت صحت  
در محیط برابر نمی‌شود چون  
هم واحد نیستند)



# تهیه کننده:

## گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

### کار در کلاس



نیما از پسرعمویش کیان سه سال بزرگ تر است. اگر حاصل ضرب سن این دو ۴۰ باشد، پسرعموی کوچک تر چند سال دارد؟

سن نیما  $x+3$  و سن کیان  $x$   
یا  
سن نیما  $x$  و سن کیان  $x-3$

اگر سن نیما برابر  $x$  باشد، طبق فرض مسئله، سن کیان برابر  $x-3$  است. بنابراین:

$$\textcircled{1} \quad 1-3=5$$

$$x \times (x-3) = 40$$

$$\textcircled{2} \quad -5-3=-8$$

پس جواب  $x=8$  و جواب  $x=-5$

آیا می توانید جواب های معادله فوق را حدس بزنید؟ این معادله از درجه چند است؟ از درجه  $2$

این معادله چند جواب دارد؟ آیا عدد منفی هم در معادله صدق می کند؟ این جواب در این سؤال معنی

دارد؟ خیر،  $x=-5$  غیر قابل قبول است، چون سن نمی تواند عدد منفی باشد.

$$\text{سن نیما} = 8$$

$$\text{سن پسرعمو نیما} = 8-3=5$$

### تمرین



۱. هر کدام از عبارات زیر را به یک معادله تبدیل کنید.

الف) عددی را بیابید که پنج برابر آن به علاوه دو برابر با سه برابر آن عدد منهای دو باشد.  $5x+2=3x-2$

ب) مربع عددی برابر با همان عدد به علاوه عدد یک است.  $x^2=x+1$

۲. در یک کارخانه حقوق یک مهندس دو برابر یک فن ورز (تکنسین) و  $\frac{2}{3}$

مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه ۳ مدیر بخش، ۸ مهندس

و ۱۲ فن ورز دارد. مدیر عامل کارخانه برای این قسمت ماهیانه ۵۵/۵ میلیون

تومان حقوق پرداخت می کند. حقوق یک فن ورز در این کارخانه ماهیانه

چقدر است؟



۳. با توجه به پیش بینی درخواست بازار آهن، کارخانه ذوب آهن اصفهان، از روز شنبه هر روز تولید خود

را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به سقف ۶۴ هزار تن رسیده است. مجموع

تولید فولاد در این پنج روز چقدر بوده است؟

جواب ۳  
حقوق مهندس =  $2x$   
حقوق مدیر =  $\frac{2}{3} \times 2x = \frac{4x}{3}$   
حقوق فن ورز =  $\frac{2}{3} \times x = \frac{2x}{3}$

۱۴x → ۸x → ۴x → ۲x → x

هر روز  
الف)  $14x = 44$   
 $\frac{14x}{14} = \frac{44}{14}$   
 $x = 4$

ب) اختلاف تولید فولاد در پایان روز شنبه با تولید فولاد در پایان روز چهارشنبه چقدر است؟  
 $31x \times 4 = 124$

هر روز  
ب)  $15x - x = 14x = 40$   
 $15x \times 4 = 60$

میلیون تومان  
 $3 \times \frac{4x}{3} + 8 \times 2x + 12 \times \frac{2x}{3} = 55.5$   
 $4x + 16x + 8x = 55.5$   
 $28x = 55.5$   
 $x = \frac{55.5}{28} \Rightarrow x = 1.98$

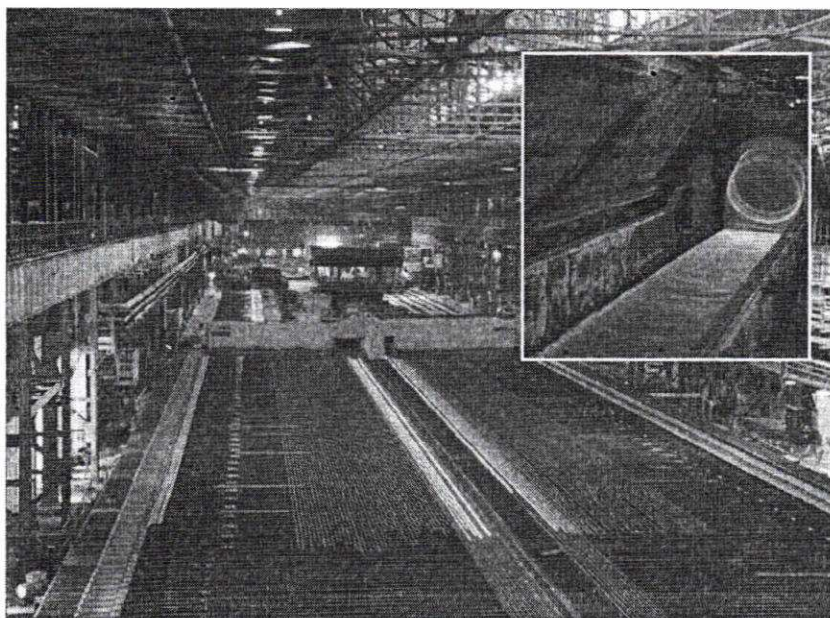


## تهیه کننده:

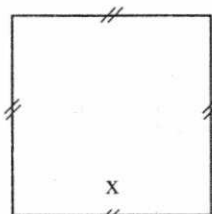
## گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

### کارخانه ذوب آهن اصفهان

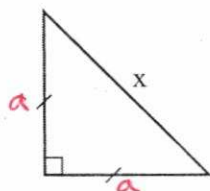
ذوب آهن اصفهان به عنوان یک صنعت مهم و مادر، در سال ۱۳۴۶ در دشت طبس، واقع در ۴۵ کیلومتری جنوب غربی شهر اصفهان، تأسیس و در سال ۱۳۵۰ با ظرفیت محصولات فولادی ۵۵ هزار تن در سال، به بهره برداری رسید. این کارخانه هم اکنون با تلاش شبانه روزی مسئولان و کارمندان آن به ظرفیت تولید بیش از ۲ میلیون تن محصولات فولادی و محصولات متنوع دیگر رسیده است این کارخانه کمکی شایان به ساختن زیربنای کشور عزیزمان، ایران اسلامی دارد.



۴. اگر مجموع مساحت های سه شکل زیر برابر ۷ باشد، طول ضلع مربع چقدر است؟  $x=?$



شکل (۱)  $\text{مساحت مربع} = x^2$



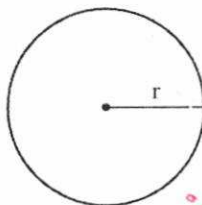
شکل (۲)

قضیه پیتاگورس  $a^2 + a^2 = x^2$

$$\frac{2a^2}{2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{x^2}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times a \times a = \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4}$$



شکل (۳)

$$r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x\right)^2$$

$$= \pi \times \frac{1}{2\pi} x^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$\text{مجموع مساحت ها} = 7 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = 7 \Rightarrow \frac{2x^2}{4} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = 7 \Rightarrow \frac{4x^2}{4} = 7 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \Rightarrow x = \sqrt{7}$$



۱	الف
۲	ب
۳	پ
۴	ت
۵	ث
۶	ج
۷	چ
۸	ح
۹	خ
۱۰	د
۱۱	ذ
۱۲	ر
۱۳	ز
۱۴	س
۱۵	س
۱۶	ش
۱۷	ص
۱۸	ض
۱۹	ط
۲۰	ظ
۲۱	ع
۲۲	غ
۲۳	ف
۲۴	ق
۲۵	ک
۲۶	گ
۲۷	ل
۲۸	م
۲۹	ن
۳۰	و
۳۱	:
۳۲	ی

بازی با حروف الفبا به کمک مدل سازی ریاضی (رمزنگاری)

۵. حروف الفبای فارسی از «الف» تا «ی» را به ترتیب از ۱ تا ۳۲ شماره گذاری کرده ایم. هر حرف بدون نقطه با شماره آن حرف از ۱ تا ۳۲ مشخص می شود. حروف نقطه دار به صورت  $ax^n$  مشخص شده اند که در آن  $a$  شماره حرف الفبا و  $n$  تعداد نقاط حرف مورد نظر است. به عنوان مثال حرف «ح» با عدد ۸ مشخص می شود؛ زیرا هشتمین حرف الفبای فارسی است و حرف «ت» با عبارت  $۴x^۲$  مشخص می شود؛ زیرا چهارمین حرف الفباست ( $a=۴$ ) و دارای دو نقطه است ( $n=۲$ ).

در این روش برای نوشتن کلمات از علامت جمع به صورت زیر استفاده می کنیم.  
مثلاً برای معادل ریاضی کلمه «غنچه»:

غنچه: غ + ن + ج + ه  
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 $۳۱ + ۷x^۲ + ۲۹x + ۲۲x$

معادل ریاضی غنچه  $\rightarrow ۲۲x + ۲۹x + ۷x^۲ + ۳۱$

حال با توجه به توضیح فوق:  
۱- جدول زیر را کامل کنید:

کلمه به زبان فارسی	الگوی ریاضی معادل آن
الف + ب = آب	$۲x^۱ + ۱x^۱$
آپ	$۳x^۳ + ۱$
ذرت	$۴x^۲ + ۱۲ + ۱۱x$

۲- الگوی ریاضی معادل کلمه «پیامبر رحمت» را مشخص کنید.  
 $۴x^۲ + ۲۸ + ۸ + ۱۲ + ۱۲ + ۲x^۱ + ۲۸ + ۱x^۱ + ۳۲ + ۳x^۳$

۳- آیا می توانید با این روش نام خود را با رمز ریاضی بیان کنید؟

۴- با الگوی فوق یک پیام کوتاه برای دوست خود بنویسید.

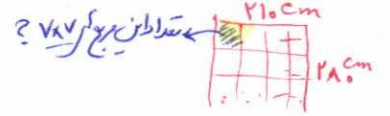
$۲۸ + ۱x + ۲۷ + ۱۵$

من دوست تو هستم.  $۲۸ + ۴x^۲ + ۱۵ + ۳۱ + ۳۰ + ۴x^۲ + ۴x^۲ + ۱۵ + ۳۰ + ۱۰ + ۲۹x^۱ + ۲۸$

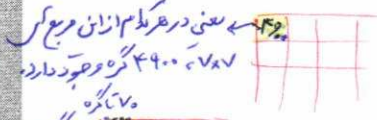
تهیه کننده:



معنی درازن قالی، ۱۲۰۰ مربع ۷×۷ وجود دارد.  $\frac{210 \times 210}{7 \times 7} = 1200$  مساحت قالی = مساحت یک مربع ۷×۷



تعداد گره‌های موجود در یک مربع ۷×۷  $= \frac{5,880,000}{1200} = 4900$



برای سیدار کردن تعداد گره‌ها در یک ضلع این مربع  $= \sqrt{4900} = 70$

سین این قالی، ۷۰ طرح دارد  $\rightarrow$   $70 =$  تعداد گره‌های موجود در یک ضلع ۷۰ سالی مربع ۷×۷ =  $70 \times 70$  طرح  $\rightarrow$  جلین تونز

۶) اگر در یک قالی با ابعاد  $2/80m \times 2/10m$  (که عموماً  $2 \times 3$  نامیده می‌شود) تعداد گره‌های قالی

۵/۸۸۰/۰۰۰ عدد باشد:  $210cm$   $\downarrow$   $280cm$  تبدیل به cm

الف) این قالی چند رج است؟

ب) اگر برای هر گره ۱cm نخ قالی یا همان خامه قالی استفاده شود، در این قالی چند متر نخ قالی

ب)

استفاده شده است؟  $5,880,000 \times 1cm = 5,880,000cm \div 100 = 58,800m$  تبدیل به متر

ج) یک قالی باف حرفه‌ای در یک روز می‌تواند ۶۰۰۰ گره قالی بیافد. اگر این قالی باف ۵ روز در هفته

کار کند، برای اتمام این قالی چند هفته باید کار کند؟  $x = 30000$

کار کند، برای اتمام این قالی چند هفته باید کار کند؟  $\rightarrow$  تعداد گره در ۵ روز با این سرعت کاری

د) اگر این قالی باف برای خرید مواد اولیه قالی شامل تار و پود، نخ قالی و ... پنج میلیون و ششصد

هزار تومان هزینه کرده باشد و بتواند در پایان بافت قالی، آن را به قیمت ۳۵ میلیون تومان بفروشد، این

قالی باف برای هر هفته کار خود چه دستمزدی دریافت کرده است؟

$\frac{5,880,000}{30000} = 196$  پس ۱۹۶ هفته طول می‌کشد

درآمد  $35,000,000 - 5,200,000 = 29,800,000$

$29,800,000 = 150,000$

میزان سود در ۱۹۶ هفته

$\frac{29,800,000}{196} = 150,000$  میزان سود در یک هفته



۱. «رَج قالی» عبارت است از تعداد گره‌های قالی در ۷cm طول یا عرض قالی. به عنوان مثال منظور از یک قالی ۵ رَج، وجود ۵ گره در یک ضلع مربع ۷×۷ است.

رَج قالی = تعداد گره‌های قالی در ۷cm طول یا عرض قالی