

# درس ۲

## حل معادله درجه ۲ و کاربردها

بر خلاف آنچه در «کار در کلاس های درس اول» دیدیم، در حالت کلی ممکن است نتوان جواب های معادله درجه ۲ را حدس بزنیم.  
در این درس با سه روش برای حل معادله درجه ۲ آشنا می شویم.

### ارزاش اول: تجزیه عبارات های جبری

در سال قبل و در فصل اول این کتاب با مفهوم اتحاد و نیز با چند اتحاد جبری آشنا شدید و استفاده از این اتحادها را در تجزیه عبارات های جبری آموختید. تعدادی از این اتحادها را برای حل معادلات درجه دو به کار خواهیم برد. برای یادآوری این اتحادها را مرور می کنیم:

$$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 & \text{اتحاد مربع مجموع دو جمله ای} \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 & \text{اتحاد مربع تفاضل دو جمله ای} \end{cases}$$

اتحاد مربع دو جمله ای:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

اتحاد مزدوج:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

اتحاد جمله مشترک:

### فعالیت



طرف دوم تساوی های زیر را به کمک اتحادهای خواننده شده کامل کنید:

الف اتحاد مربع جمله ای  $(2x + \frac{1}{4})^2 = 4x^2 + 2x + \frac{1}{4}$  (Handwritten:  $2(2x)(\frac{1}{4})$ )

ب اتحاد مزدوج  $(x-2y)(x+2y) = x^2 - 4y^2$  (Handwritten:  $2(x)(-2y)$ )

ث اتحاد مربع جمله ای  $(x - \frac{3}{2})^2 = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$  (Handwritten:  $2(x)(-\frac{3}{2})$ )

ب)  $(2+3xy)^2 = \dots + 12xy + \dots + 9x^2y^2$  (Handwritten:  $2(2)(3xy)$ )

ت)  $x^2 - 8x + 12 = (x-6)(x-2)$  (Handwritten:  $2(x)(-2)$ )

استقلال تاسی

نوبه کننده:

یادآوری:

شکل کلی معادله درجه دوم:  $ax^2 + bx + c = 0$

فعالیت



مطابق نمونه، اتحاد جبری پیشنهادی در ستون اول را که مناسب برای حل معادله درجه دوم در ستون بعدی است، با یک خط به یکدیگر وصل کنید. سپس معادله فوق را در ستون آخر حل کنید.

| ستون اول                    | ستون دوم                     | ستون سوم   |
|-----------------------------|------------------------------|--|
| اتحاد مربع تفاضل دو جمله    | $x^2 + 6x = 0$ (with $c=0$ ) | $x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x+6) = 0$<br>$\Rightarrow x=0$ یا $x=-6$<br>پس معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.   |
| عامل یابی (فاکتورگیری)      | $x^2 + 6x + 9 = 0$           | $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 = 0 \Rightarrow$<br>$(x+3)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3$ یا $x = -3$<br>ریشه مضاعف  |
| اتحاد جمله مشترک            | $x^2 - 16 = 0$ (with $b=0$ ) | روش ۱: $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+4) = 0$<br>$\Rightarrow x = +4$ یا $x = -4$<br>روش ۲: $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$ |
| اتحاد مربع مجموع دو جمله    | $x^2 + 5x + 6 = 0$           | $x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2) = 0$<br>$\Rightarrow x = -3$ یا $x = -2$  |
| اتحاد مزدوج و روش ریشه گیری | $x^2 - 10x + 25 = 0$         | $x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2 = 0$<br>$(x-5)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 5$ یا $x = 5$<br>ریشه مضاعف  |

در یک معادله درجه ۲، اگر دو ریشه، با هم برابر باشند، اصطلاحاً می‌گوییم، معادله ریشه مضاعف دارد.

۱. با توجه به معادلات فوق در حالت کلی در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$ :

(الف) اگر  $c = 0$  از کدام روش بالا استفاده می‌کنید؟ فاکتورگیری

(ب) در چه صورتی از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنید؟  $a^2 + 2ab + b^2$   $\Rightarrow$   $(a+b)^2$

(پ) برای حل معادله درجه دو به کمک اتحاد مزدوج یا ریشه‌گیری،  $b$  در چه شرطی صدق می‌کند؟  $b=0$

آیا علامت‌های  $a$  و  $c$  مهم است؟ بله - باید مختلف‌العلامت باشند.

(ت) در کدام یک از اتحادهای فوق جواب معادله، ریشه مضاعف محسوب می‌شود؟ اتحاد مربع دو جمله‌ای

۲. آیا می‌توانید معادله درجه دومی بنویسید که جواب نداشته باشد؟ دو نمونه آن را مشخص کنید.

$x^2 + 9 = 0$  و  $-x^2 - 5 = 0$

توجه کنید:

گروه ریاضی منطقه درم متوسطه، استان خوزستان

$x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$   
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 $(x)^2 \quad 2(x\sqrt{2}) \quad (\sqrt{2})^2$



① جواب (الف)  $2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = +2 \text{ یا } x = -2$   
 (روش دوم: توان گرفتن)

(ب)  $(x+2)(x-3) = (x-3) \Rightarrow (x+2)(x-3) - (x-3) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2-1) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -1$   
 روش اول:  $x^2 - x - 6 - x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -1$

(پ)  $x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x^2 = 2 \Rightarrow x = +\sqrt{2} \text{ یا } x = -\sqrt{2} \end{cases}$

(ت)  $x^2 = x - \frac{1}{x}$   
 $x^2 - x + \frac{1}{x} = 0$  اتحاد مربع اولی

$(x - \frac{1}{x})^2 = 0$   
 $(x - \frac{1}{x})(x - \frac{1}{x}) = 0$   
 $x = \frac{1}{x} \text{ یا } x = \frac{1}{x}$   
 روش دوم: ضرب طرفین در  $x$  و بعد استفاده از اتحاد مربع مشترک

کار در کلاس



با استفاده از اتحادهای بالا معادلات زیر را حل کنید:  
 $-2x + 1 = -3 \Rightarrow +4x - 1 = -4 \Rightarrow +2x - 2 = -4$   
 $-2x + 1 = -3 \Rightarrow +4x + 1 = +3 \Rightarrow +4x - 2 = 0$   
 از اتحاد یک جمله مشترک، تساوی را تجزیه کنید:

1)  $x^2 + 3x - 4 = 0$   
 $(x-1)(x+4) = 0$   
 $(x-1) = 0$  یا  $(x+4) = 0 \Rightarrow x = 1$  یا  $x = -4$

2)  $4x^2 - (2-x)^2 = 0$   
 با استفاده از اتحاد مزدوج عبارت جبری سمت چپ تساوی را تجزیه می کنیم:  
 $(2x - (2-x))(2x + (2-x)) = 0 \Rightarrow (3x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ یا } x = -2$   
 $3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$   
 $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

(ث)  $2x^2 - 8x = 0$   
 $2x(x-4) = 0$   
 $x = 0 \text{ یا } x = 4$

(ج)  $x^2 - 5x + 4 = 0$   
 $(x-3)(x-2) = 0$   
 $x = 3 \text{ یا } x = 2$

تمرین



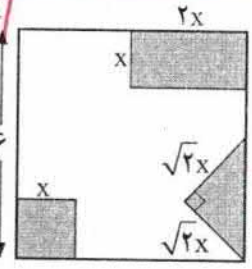
1. معادلات زیر را حل کنید.

(ح)  $\frac{x^2}{3} = x \Rightarrow x^2 = 3x$   
 $x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0$   
 $x = 0 \text{ یا } x = 3$

(ع)  $x^2 = 5 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 5$   
 $x^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = +\sqrt{\frac{5}{2}} \text{ یا } x = -\sqrt{\frac{5}{2}}$

- (الف)  $2x^2 - 8 = 0$
- (ب)  $(x+2)(x-3) = x-2$
- (ت)  $x^2 = x - \frac{1}{x}$
- (ج)  $x^2 - 5x + 6 = 0$
- (ح)  $x^2 = 5 - x^2$
- (د)  $9x^2 + 3x - 2 = 0$
- (خ)  $x^2 + 4x + 4 = 0$
- (ز)  $(x-3)^2 = 4$

(ح)  $x^2 + 4x + 4 = 0$   
 $(x+2)^2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+2) = 0$   
 $x = -2 \text{ یا } x = -2$   
 روش مضاعف



2. از مربعی به ضلع 6cm سه شکل روبه رو بریده شده است. مساحت باقی مانده  $24 \text{ cm}^2$  است. طول ضلع کوچک بریده شده چقدر است؟  
 $36 - 4x^2 = 24 \Rightarrow 4x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$   
 $x = +\sqrt{3}$

$4^2 = 36$   
 $x^2 = x^2$   
 $x \times 2x = 2x^2$   
 $\frac{1}{2}(\sqrt{2}x)(\sqrt{2}x) = \frac{1}{2} \times 2x^2 = x^2$

(د)  $9x^2 + 3x - 2 = 0$   
 $(3x)^2 + 1(3x) - 2 = 0$   
 $(3x+2)(3x-1) = 0$   
 $x = -\frac{2}{3} \text{ یا } x = \frac{1}{3}$

3. معادله درجه دومی بنویسید که  $x=2$  و  $x=-3$  جواب های آن باشند. آیا این معادله منحصر به فرد است؟ بلیه

$x-2 = 0$  یا  $x+3 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+3) = 0$   
 $x^2 + 1x - 4 = 0$   
 $x^2 + 3x - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0$

(ز)  $(x-3)^2 = 4$   
 $x-3 = +2 \Rightarrow x = 5$   
 $x-3 = -2 \Rightarrow x = 1$



جواب ۴)  $x=1$  یا  $x=1$   
 $x-1=0$  یا  $x-1=0 \Rightarrow (x-1)(x-1)=0$   
 $x^2-2x+1=0$

جواب ۵) سمت الف)  $k=2 \Rightarrow (x-1)^2=2$   
 $x-1=+\sqrt{2}$  یا  $x-1=-\sqrt{2}$   
 $x=1+\sqrt{2}$  یا  $x=1-\sqrt{2}$

۴) معادله درجه دومی بنویسید که  $x=1$  ریشه مضاعف آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟ بله  
 ۵) در معادله  $(x-1)^2=K$ :

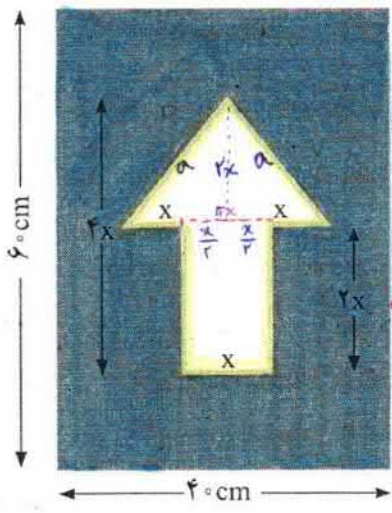
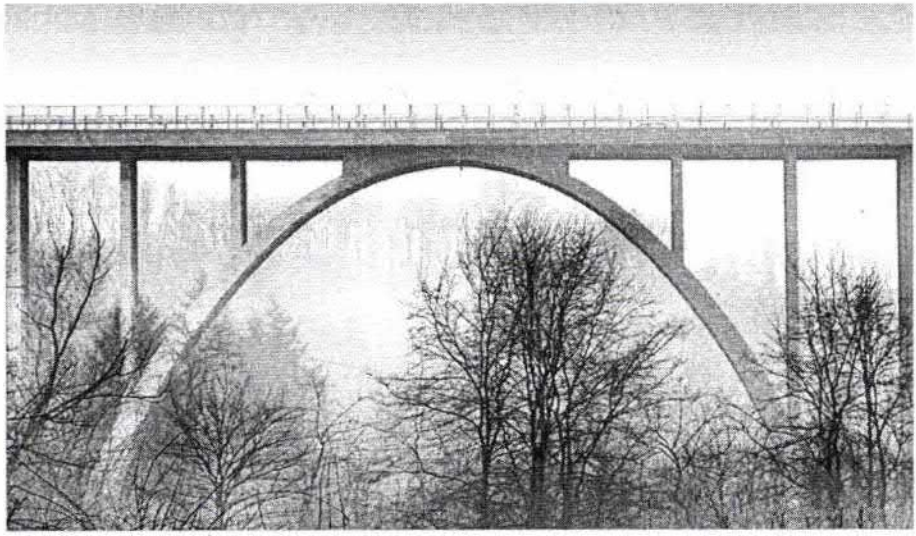
۱)  $k=4 \Rightarrow (x-1)^2=4$   
 $x-1=+2$  یا  $x-1=-2$   
 $x=3$  یا  $x=-1$

الف) جواب این معادله را در صورت وجود به ازای  $K=2, K=4, K=0, K=-9$  به دست آورید.  
 ب) به ازای چه مقادیری از  $k$  معادله ریشه مضاعف دارد؟  $k=0$   
 پ) به ازای چه مقادیری از  $k$  معادله دو ریشه حقیقی دارد؟  $k > 0$  (مقادیر مثبت  $k$ )  
 ت) به ازای چه مقادیری از  $k$  معادله ریشه (حقیقی) ندارد؟  $k < 0$  (مقادیر منفی  $k$ )

۲)  $k=0 \Rightarrow (x-1)^2=0$   
 $(x-1)(x-1)=0$   
 $x=1$  یا  $x=1$   
 ایشه مضاعف

۶) برای ساخت تابلوی راهنمایی «یک طرفه» روی یک پل، مطابق شکل زیر از برجسب های آبی و سفید استفاده می شود. هزینه  $1 \text{ cm}^2$  برجسب سفید  $3^\circ$  تومان و هزینه  $1 \text{ cm}^2$  برجسب آبی  $1^\circ$  تومان است. مجموع هزینه برجسب های سفید و آبی  $27,000$  تومان شده است.

۳)  $k=-9 \Rightarrow (x-1)^2=-9$   
 سمت چپ همواره منفی و سمت راست همواره منفی است و تساوی نمیکنند با اینکه اعداد منفی ریشه دومی ندارند پس معادله جواب ندارد.



الف) اندازه  $x$  چقدر است؟  
 ب) اگر در این تابلوی راهنمایی، مطابق شکل روبه رو از خطوط برجسب شیرنگ زرد استفاده کنیم که هزینه  $1 \text{ cm}$  آن  $100$  تومان است، هزینه رنگ آمیزی تابلو  $34,800$  تومان می شود. در این حالت اندازه  $x$  چقدر است؟

مساحت مثلث = مساحت مثلث سفید + مساحت مثلث مشکی  
 $= \frac{1}{2} \times 2x \times 2x + x \times 2x = 5x^2$   
 $5x^2 \times 30 = 150x^2$   
 هزینه برجسب آبی  
 $2x \times 40 = 80x$   
 $80x - 5x^2 = 24000 \Rightarrow 24000 - 5x^2$

$27,000 = 150x^2 + 24000 - 50x^2 \Rightarrow 100x^2 = 3000 \Rightarrow x^2 = 30 \Rightarrow x = \pm\sqrt{30} \Rightarrow x = +\sqrt{30}$

$(24000 - 5x^2) \times 10 = 240000 - 50x^2$

ب) محیط فلش =  $2a + 3x + 2(2x) = 4(\frac{a}{2}x) + 2x + 4x = 12x$   
 هزینه زرد برجسب  
 $12x \times 100 = 1200x$   
 $150x^2 + 24000 - 50x^2 + 1200x = 34800$

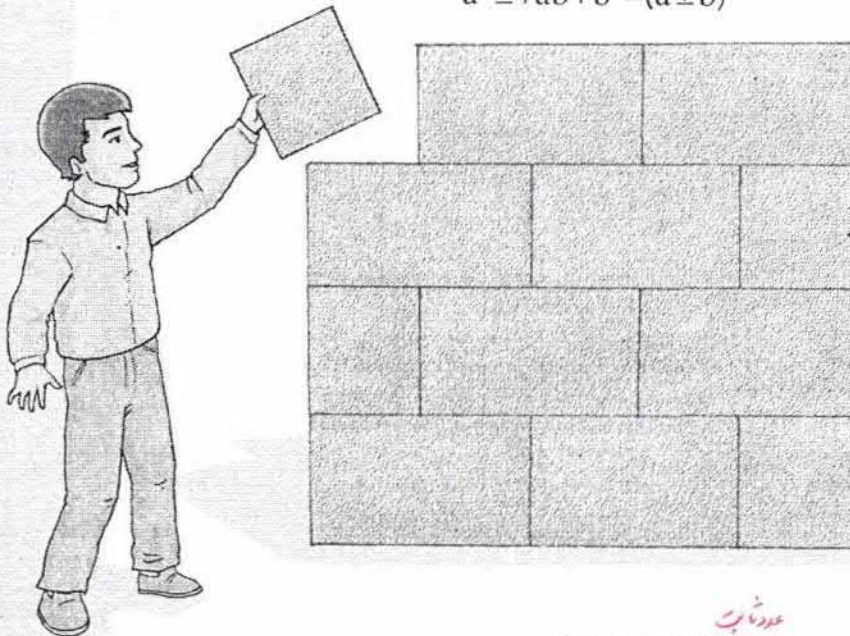
$a^2 = (x + \frac{x}{2})^2 + (2x)^2$   
 $a^2 = \frac{5}{4}x^2 \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}x$   
 $a = \frac{\sqrt{5}}{2}x$

$100x^2 + 1200x - 10800 = 0 \Rightarrow x^2 + 12x - 108 = 0 \Rightarrow (x+18)(x-6) = 0$   
 $x = -18$  یا  $x = 6$



روش دوم: مربع کامل

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$



مثال: معادله درجه دوم  $2x^2 + 3x - 5 = 0$  را حل کنید.

عوضات

۱- ابتدا قرینه عدد ثابت معادله: یعنی  $..... + 5$  را به دو طرف معادله اضافه می کنیم:

$$2x^2 + 3x = -5 \dots \dots \dots (1) \quad \leftarrow 2x^2 + 3x - 5 + 5 = 0 + 5$$

همیشه جملات شمال x در سمت راست مساوی باشند.

۲- اگر ضریب  $x^2$  مخالف 1 باشد، دو طرف معادله را به ضریب  $x^2$  تقسیم می کنیم. بنابراین، در معادله

بالا دو طرف تساوی را بر عدد  $2$  تقسیم می کنیم:

$$\frac{2x^2 + 3x - 5}{2} = \frac{0 + 5}{2} \quad \leftarrow \text{ضریب } x^2$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2} \quad (2)$$

۳- در عبارت  $\frac{3}{2}x$  با در نظر گرفتن اتحاد مربع دو جمله ای  $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

برای ایجاد جمله  $2ab$ ،  $\frac{3}{2}x$  را در عدد 2 ضرب و تقسیم می کنیم:

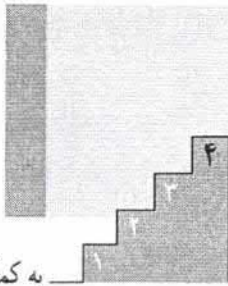
$$\frac{3}{2}x = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}x = 2 \times \left( \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}x \right) = 2 \times \frac{3}{4}x$$

- سپس مربع عدد  $\frac{3}{4}$  را به دو طرف تساوی (2) اضافه می کنیم:

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad (3)$$

نهیته کننده:

گروه ریاضی منطقه دوم خرمسره، استان خوزستان



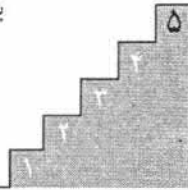
به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای سمت چپ تساوی (۳) را به  $(a+b)^2$  تبدیل می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + 2 \times \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = (x + \frac{3}{4})^2$$

$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$   
 $a^2$                        $b \times a$                        $b^2$                        $(a+b)^2$

بنابراین:

$$(x + \frac{3}{4})^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{16} \rightarrow (x + \frac{3}{4})^2 = \frac{49}{16} \quad (4)$$



با استفاده از ریشه‌گیری از ۲ طرف تساوی، مقدار  $x$  به دست می‌آید:

$$x + \frac{3}{4} = \pm \frac{7}{4} \Rightarrow x = -\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{یا} \quad x = -\frac{3}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

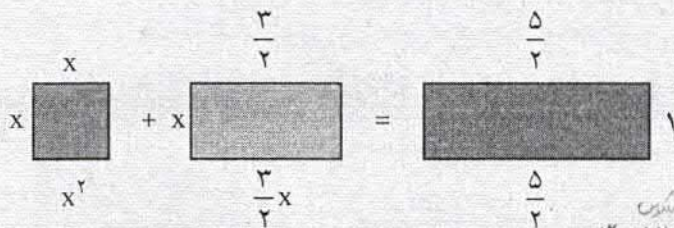
پس جواب‌های معادله  $2x^2 + 3x - 5 = 0$  یا همان ریشه‌های معادله، دو عدد حقیقی

هستند.  $x = -\frac{5}{2}$  و  $x = 1$

مراحل حل معادله ذکر شده را از پله دوم به بعد به کمک تعبیر هندسی

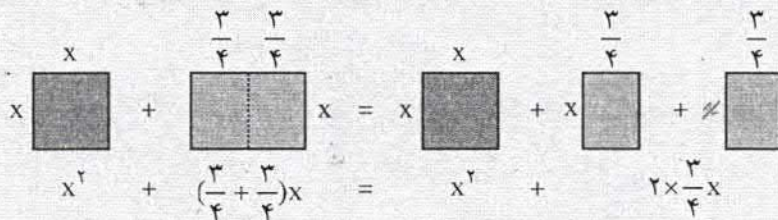
زیر نیز می‌توان بیان کرد:

- اگر  $x^2$  را مساحت مربعی به ضلع  $x$  و  $\frac{3}{2}x$  را مساحت مستطیلی به طول  $\frac{3}{2}$  و عرض  $x$  در نظر بگیریم:

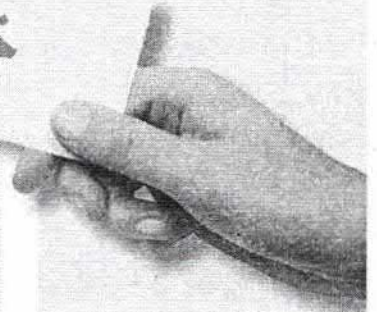


$$\frac{3}{2} \div \frac{2}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

- با نصف کردن مستطیل به طول  $\frac{3}{2}$  در تساوی (۱) و تبدیل آن به دو مستطیل به طول  $\frac{3}{4}$  در تساوی (۲):

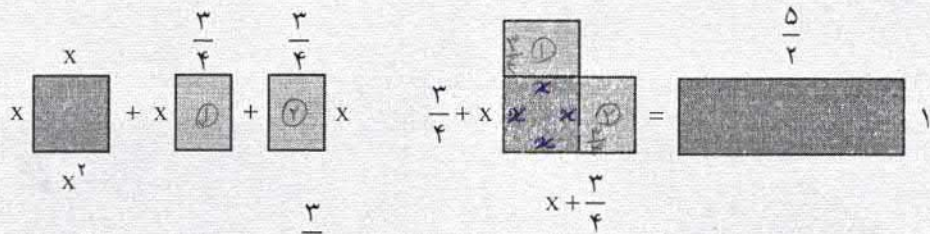


خواندنی

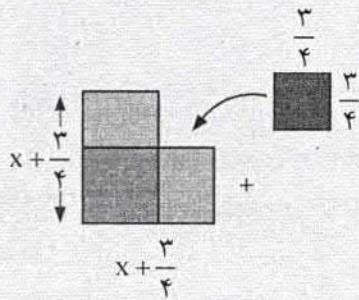




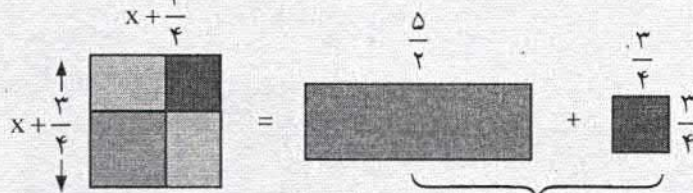
و قرار دادن ۲ مستطیل فوق در کنار مربع  $x^2$ ، تساوی بالا به صورت زیر در می‌آید:



- شکل سمت چپ برای آنکه به یک مربع کامل تبدیل شود نیاز به مربعی به ضلع  $\frac{3}{4}$  دارد.



به اضافه کردن آن به ۲ طرف تساوی:



$(x + \frac{3}{4})^2$  مربع مربع کامل (بزرگتر)

$$= \frac{5}{2} + \frac{9}{16} = \frac{49}{16} \rightarrow (x + \frac{3}{4})^2 = \frac{49}{16}$$

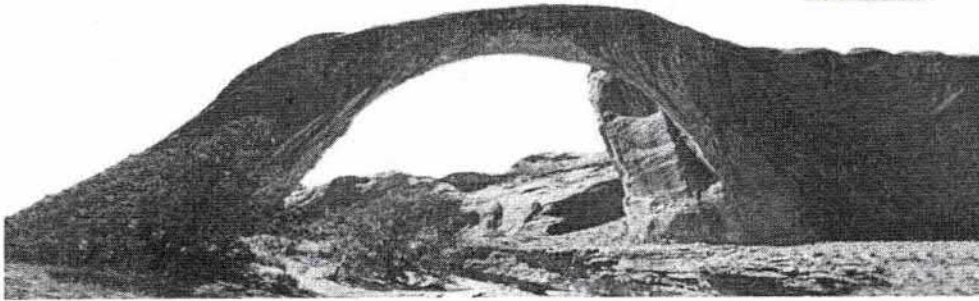
حذر طرفین

که مطابق حل صفحه قبل معادله دارای ۲ جواب  $x=1$  و  $x=-\frac{5}{2}$  است. البته در روش هندسی فوق چون  $x$  طول ضلع است، جواب  $x=-\frac{5}{2}$  معنی پیدا نمی‌کند.

شیوه حل معادله درجه دو به روش هندسی ذکر شده اولین بار توسط ریاضیدان، منجم، مورخ و جغرافیدان ایرانی و مسلمان «ابوعبدالله محمد بن موسی خوارزمی» در کتاب جبر و مقابله در بخش اول کتاب در اواخر قرن دوم هجری مطرح شد. سؤال قبل که صورت کلی آن  $x^2 + px = q$  و با فرض  $p, q > 0$  است، یکی از شش حالت خاصی است که خوارزمی برای حل معادله درجه دو در این کتاب مطرح و حل کرده است. هر چند همه معادلات درجه دوم را نمی‌توان با این شش روش حل کرد؛ اما میان مسائل هندسی در قالب جمله‌های جبری در این کتاب بنای اصلی توسعه نظریه جبری معادلات است. کتاب جبر و مقابله خوارزمی قرن‌ها مرجع و مأخذ اروپاییان و تا قرن شانزدهم میلادی مبنای مطالعات علمی آنان بوده است. این کتاب که به زبان عربی نوشته شده است، در قرن ۱۲ میلادی دوباره توسط «جرارد کرمونی» و «رابرت چستری» به زبان لاتین ترجمه شده است. این ترجمه‌ها را می‌توان آغاز علم جبر در اروپا دانست. همچنین در سال ۱۸۳۱ میلادی نیز «فردریک رزن» این کتاب را بار دیگر از زبان عربی به زبان انگلیسی ترجمه کرده است. گفتنی است که یک نسخه خطی این کتاب در دانشگاه آکسفورد و نسخه خطی دیگر آن در قاهره موجود است.



## کار در کلاس



با محاسبه مجموع زمان طی کردن پله‌های زیر برای مراحل حل معادله درجه دو در چند ثانیه می‌توانید به بالای پله برسید؟ بهترین نتیجه به دست آمده در کلاس چند ثانیه با عملکرد شما اختلاف دارد؟

تمرین قبل از مسابقه

$$1) 2x^2 - 6x - 1 = 0$$

$$2x^2 - 4x - x + 1 = 0 + 1$$

$$\frac{2x^2}{2} - \frac{6x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 3x = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 2x \times \frac{3}{2} + x = \frac{1}{2}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$


---


$$x^2 - 2\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{9}{4} = \frac{1}{2} + \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2} \\ x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2} \end{array} \right.$$

مسابقه

$$2) 3x^2 - 2 = 6x$$

$$\frac{3x^2}{3} - \frac{6x}{3} = \frac{2}{3}$$

$$x^2 - 2x = \frac{2}{3}$$

$$x^2 - 2x \times \frac{1}{2} + x = \frac{2}{3}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$


---


$$x^2 - 2x \times \frac{1}{2} + 1 = \frac{2}{3} + 1$$

$$(x-1)^2 = \frac{5}{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \dots \\ x = \dots \end{array} \right.$$

$$x - 1 = \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{\frac{5}{3}} \\ x = 1 - \sqrt{\frac{5}{3}} \end{array} \right.$$



حذر




$x^2 - 5x + 4 = 0$  *اضافه کردن مربعین*  
 $x^2 - 5x + 4 - 4 = 0 - 4$   
 $x^2 - 5x + 4 - 4 = -4$

$x^2 - 2(\frac{5}{2}x) = -4 \rightarrow x^2 - 2(\frac{5}{2}x) + \frac{25}{4} = -4 + \frac{25}{4}$   
 $(\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{4}$  *مربعین اضافه*  
 $(x - \frac{5}{2})^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x - \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2}$   
 $\begin{cases} x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \\ x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \end{cases}$

$(.) x^2 + 3x - 2 = 0$  *اضافه کردن مربعین*  
 $9x^2 + 3x - 2 + 2 = 0 + 2 \rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x = 2$   
 $x^2 + 2(\frac{1}{6}x) = 2 \rightarrow x^2 + 2(\frac{1}{6}x) + \frac{1}{9} = 2 + \frac{1}{9}$   
 $(\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{36}$  *مربعین اضافه*  
 $(x + \frac{1}{6})^2 = \frac{19}{9} \rightarrow x + \frac{1}{6} = \pm \frac{\sqrt{19}}{3}$   
 $\begin{cases} x = -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{19}}{3} = \frac{-1 + \sqrt{19}}{6} \\ x = -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{19}}{3} = \frac{-1 - \sqrt{19}}{6} \end{cases}$

$(ب) x^2 + \frac{1}{4} = -x \rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow x^2 + 2(\frac{1}{2}x) + \frac{1}{4} = 0 + \frac{1}{4}$   
 $x^2 + 2(\frac{1}{2}x) = -\frac{1}{4} \rightarrow x^2 + 2(\frac{1}{2}x) + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \rightarrow (x + \frac{1}{2})^2 = 0 \rightarrow (x + \frac{1}{2}) = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$   
 $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$  *مربعین اضافه*

*ریشه مضاعف است*  


$(ب) x^2 + 4x + 9 - 9 = 0 - 9 \rightarrow x^2 + 4x = -9 \rightarrow x^2 + 2(\frac{4}{2}x) = -9$   
 $x^2 + 2(\frac{4}{2}x) + 4 = -9 + 4$   
 $(x + 2)^2 = 0 \rightarrow (x + 2) = 0 \rightarrow x = -2$   
 $(\frac{4}{2})^2 = 4$  *مربعین اضافه*

معادلات درجه دو زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید.  
 (ب)  $9x^2 + 3x - 2 = 0$   
 (ج)  $x^2 + 6x + 9 = 0$   
 (الف)  $x^2 - 5x + 6 = 0$   
 (ب)  $x^2 + \frac{1}{4} = -x$

**روش سوم: روش کلی حل معادله درجه دوم**

با استفاده از روش مربع کامل برای حل معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  روش کلی برای حل معادله به دست می آید. با مرور پله های گفته شده در بخش قبل:

1- قرینه عدد ثابت معادله را به دو طرف معادله اضافه می کنیم:

$ax^2 + bx = -c$  (1)

$\frac{ax^2 + bx}{a} = \frac{-c}{a}$  *ضرب*

2- دو طرف معادله را به ضرب  $x^2$  یعنی  $a$  تقسیم می کنیم:

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$  (2)

3- ضرب  $\frac{b}{2a}$  را در عدد 2 ضرب و تقسیم می کنیم و مربع عدد به دست آمده؛ یعنی  $\frac{b^2}{4a^2}$  را به دو طرف تساوی (2) اضافه می کنیم:

$x^2 + 2(\frac{b}{2a})x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + 2(\frac{b}{2a})x + (\frac{b}{2a})^2 = (\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}$  (3)

4- عبارت سمت چپ تساوی (3) را به مربع کامل تبدیل می کنیم:

$\Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

5- با شرط  $b^2 - 4ac > 0$  و با استفاده از ریشه گیری از طرف تساوی:

$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

**نکته کنده:**

**گروه ریاضی مناطق درم متوسطه، استان خوزستان**



دلتا

عبارت  $b^2 - 4ac$  را مبین معادله درجه دوم می نامند و آن را با  $\Delta$  نشان می دهند.

بر اساس علامت  $\Delta$  می توان در وجود و تعداد ریشه های معادله درجه دوم اظهار نظر کرد:

الف) اگر  $\Delta > 0$  باشد، معادله دارای ۲ جواب است که عبارت اند از:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ب) اگر  $\Delta = 0$  باشد، معادله دارای یک جواب است. (در این حالت این ریشه را ریشه مضاعف می نامند.)

$$x = -\frac{b}{2a}$$

پ) اگر  $\Delta < 0$  باشد معادله جواب ندارد. (چرا؟) **چون اعداد منفرجه، ریشه دوم ندارند.**

### فعالیت



۱. جواب های معادله  $x^2 - 3x + 2 = 0$  را در صورت وجود به دست آورید.

■ حل: با توجه به ضرایب معادله، به ترتیب:  $c = 2$  و  $b = -3$  و  $a = 1$  است.

بنابراین:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

$\Delta > 0$  پس معادله دارای ۲ جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = 1$$

۲. جواب های معادله  $4x^2 + 7x - 2 = 0$  را در صورت وجود به دست آورید.

■ حل: با در نظر گرفتن  $a = 4$ ،  $b = 7$ ،  $c = -2$ :

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 49 - 4 \times 4 \times (-2) = 81$$

$\Delta > 0$  و معادله دارای دو جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2 \times 4} = \frac{-7 \pm 9}{8} \Rightarrow x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{یا} \quad x = \frac{-16}{8} = -2$$

۱.  $\Delta$  چهارمین حرف الفبای یونانی است که آن را «دلتا» می خوانند. در الفبای یونانی، دلتای بزرگ را با علامت  $\Delta$  و دلتای کوچک را با علامت  $\delta$  نشان

می دهند.

نویسنده: ...

گروه ریاضی منطق دوم متوسطه، استان خوزستان

بصراحت  
مثال نمی از معادلاتی که آسانتر در شده  
نشینند و یا  $\Delta$  را آنجا جزو عامل بزارند،  
حل نشود.  
همین مثال برای  $\Delta = 0$  و  
داشتن ریشه مضاعف حل نشود.



الف)  $3x^2 + 5x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(3)(-2) = 49 \Rightarrow \Delta = 49 > 0$

معادله ۲ ریشه دارد.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2(3)} \Rightarrow x_1 = -2 \quad x_2 = \frac{1}{3}$

$x_1 + x_2 = -\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{-5+1}{3} = \frac{-4}{3} = -\frac{b}{a}$

ب)  $4x^2 + 3x - 7 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4(4)(-7) = 121 > 0$   
معادله ۲ جواب دارد.

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{8}$

$x_1 = -\frac{7}{4} \quad x_2 = 1$

$x_1 + x_2 = -\frac{7}{4} + 1 = -\frac{3}{4} = -\frac{b}{a}$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

۳) جواب های معادله  $3x^2 + x + 7 = 0$  را در صورت وجود به دست آورید.

حل: با در نظر گرفتن  $a=3 \quad b=1 \quad c=7$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(3)(7) = 1 - 84 = -83$

$\Delta < 0$  بنابراین معادله ریشه حقیقی ندارد.

کار در کلاس



معادلات زیر را حل کنید و با به دست آوردن ریشه های معادله،  $x_1$  و  $x_2$  حاصل  $x_1 + x_2$  را به دست آورید. آیا ارتباطی میان مجموع ریشه ها و ضرایب  $a, b, c$  در معادله درجه دو گفته شده وجود دارد؟

الف)  $3x^2 + 5x - 2 = 0$

ب)  $4x^2 + 3x - 7 = 0$

طرح راجل هند مسئله کاربردی از معادله درجه دو

مسئله اول:

مقدمه: در هر مسئله اقتصادی اگر  $x$  مقدار یا تعداد محصول باشد، سه تابع مهم زیر تعریف می شوند:

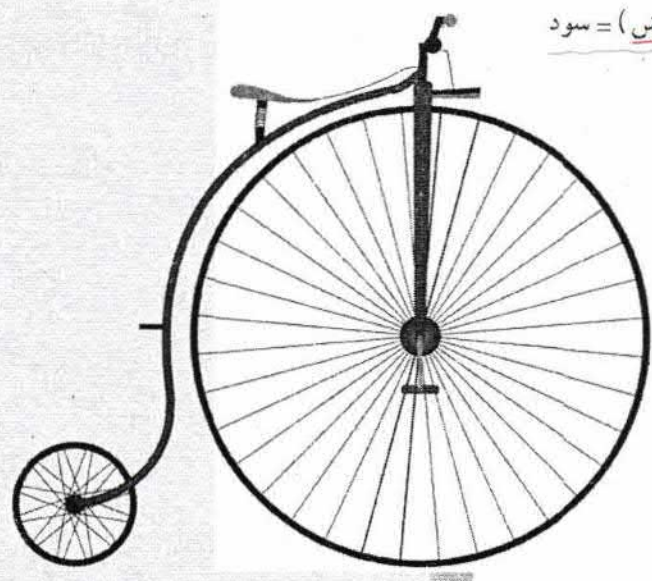
تابع هزینه (cost) یا  $C(x)$ : هزینه تولید  $x$  واحد کالا

تابع سود (profit) یا  $P(x)$ : سود حاصل از فروش  $x$  واحد کالا

تابع درآمد (Revenue) یا  $R(x)$ : درآمد حاصل از فروش  $x$  واحد کالا

رابطه میان ۳ تابع فوق به صورت زیر است:

$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow$  هزینه - درآمد (فروش) = سود



فرض کنید، شما یک دوچرخه جدید طراحی کرده اید و پس از آزمایش ها و تأییدهای اولیه می خواهید آن را به صورت انبوه تولید کنید. هزینه های شما شامل ۲ بخش اند:

۱. هزینه اولیه شامل ۷ میلیون تومان برای خرید دستگاه های کارخانه و تبلیغات.
۲. هزینه تولید که عبارت است از ۱۱۰ هزار تومان برای ساخت هر دوچرخه.



هزینه اولی برای هر یک: ۷ میلیون تومان

هزینه تولید هر دوچرخه: ۱۱۰ هزار تومان

۷۰,۰۰۰  
امثال باقی

اگر ۷ قیمت یک دوچرخه باشد و تعداد فروش دوچرخه از رابطه  $70,000 - 200v$  به دست آید:

الف) تابع سود کارخانه را به دست آورید.

ب) سود کارخانه پس از تولید چند دوچرخه حاصل می شود؟

■ حل:

درآمد  $R(x) =$  قیمت هر دوچرخه  $\times$  تعداد فروش دوچرخه  $= (70,000 - 200v) \times 7 = 70,000 \cdot 7 - 200 \cdot 7v$

هزینه  $C(x) =$  هزینه اولیه  $+ \text{هزینه تولید} = 7,000,000 + 110 \cdot (70,000 - 200v) = 14,700,000 - 22,000v$

سود  $P(x) = \dots$

مسئله دوم:

در یک کارگاه تولید چتر، سود حاصل از فروش  $x$  چتر از رابطه  $p(x) = -0.0045x^2 + 8.15x - 100$

به دست می آید.

الف) اگر این کارگاه چتری نفروشد،  $x=0 \Rightarrow P(0) = -7004.5x^2 + 8.15x - 100$

$P(0) = -100$

چقدر از دست می دهد؟ ۱۰۰ واحد

ب) نقطه سر به سر (break-even)

میزانی از تولید یک بنگاه

اقتصادی را نشان می دهد که در

آن میزان هزینه ها با میزان درآمدها

برابر می شود و بنگاه در این سطح

از تولید نه سود می کند و نه ضرر.

اگر تولید بیشتر از نقطه سر به سر

باشد، بنگاه سود خواهد برد و اگر

کمتر باشد، زیان خواهد دید.



هزینه = درگاه  
(سود منتهی ضرر)

۲۰۰۰ چتر

در مثال بالا به ازای چه تعداد فروش چتر، کارگاه به نقطه سر به سر خود می رسد؟ چندمین تولید چتر

برای کارگاه سودآور است؟ کی بیشتر، یعنی ۲۰۰۰ امین چتر

در نقطه سر به سر  $P(x) = 0$

$-7004.5x^2 + 8.15x - 100 = 0$

$\Delta = (8.15)^2 - 4(-7004.5)(-100) = 44,802.5 > 0$  معادله ۲ ریشه دارد

$x = \frac{-8.15 \pm \sqrt{44,802.5}}{2(-7004.5)}$   $x \approx 12,242$  و  $x \approx 2000$

$x = 2000$



حل 1)  $x^2 - x + 5 = 0$   
 $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(5) = -19 < 0$  معادله ریشه ندارد.

(3)  $4x^2 - 4x + 1 = 0$   
 $\Delta = (-4)^2 - 4(4)(1) = 0$  معادله ریشه مضاعف دارد.  
 $x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(5)  $3x^2 - x + 4 = 0$   
 $\Delta = (-1)^2 - 4(3)(4) = -47 < 0$  معادله ریشه ندارد.

(2)  $2x^2 + x - 1 = 0$   
 $\Delta = (1)^2 - 4(2)(-1) = 9 > 0$  معادله 2 ریشه دارد.  
 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \quad \vee \quad x = -1$

(4)  $x^2 + 17x - 18 = 0$   
 $\Delta = (17)^2 - 4(1)(-18) = 341 > 0$  معادله 2 ریشه دارد.  
 $x = \frac{-17 \pm \sqrt{341}}{2 \times 1} \Rightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = -18$

تمرین



1. معادلات درجه دوم زیر را حل کنید.

- (1)  $x^2 - x + 5 = 0$
- (2)  $2x^2 + x - 1 = 0$
- (3)  $4x^2 - 4x + 1 = 0$
- (4)  $x^2 + 17x - 18 = 0$
- (5)  $3x^2 - x + 4 = 0$
- (6)  $x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$

2. معادله  $2x^2 - 3x - 5 = 0$  را به روش  $\Delta$  حل کنید. با محاسبه ریشه‌های  $x_1$  و  $x_2$  حاصل ضرب آنها را  $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$  بدست آورید.  
 $\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-5) = 49 > 0$   
 $x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2 \times 2} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2} \quad \vee \quad x_2 = -1$   
 $x_1 \times x_2 = \frac{5}{2} \times (-1) = -\frac{5}{2} = \frac{c}{a}$

3. اگر یکی از جواب‌های معادله  $2x^2 - ax + 28 = 0$  برابر  $-4$  باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟  
 $x = -4 \Rightarrow 2(-4)^2 - a(-4) + 28 = 0 \Rightarrow 32 + 4a + 28 = 0 \Rightarrow 4a = -60 \Rightarrow a = -15$

$2x^2 + 15x + 28 = 0$   
 $\Delta = 1 > 0$  معادله 2 ریشه دارد.  
 $x = \frac{-15 \pm 1}{4}$   
 $x_1 = -4$  ریشه داده شده  
 $x_2 = -\frac{7}{2}$

4. مساحت مثلث و مستطیل در شکل زیر مساوی اند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟  
 $3x^2 + 5x + 2 = 3x^2 + 4x \Rightarrow 3x^2 + 5x + 2 - 3x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$   
  
 $\text{مساحت مثلث} = \frac{(3x+2)(x+1)}{2}$   
 $\text{مساحت مستطیل} = (3x+6)(x+1)$   
 $\frac{(3x+2)(x+1)}{2} = (3x+6)(x+1)$   
 $(3x+2)(x+1) = 2(3x+6)(x+1)$   
 $3x^2 + 4x + 2 = 6x^2 + 12x + 12$   
 $3x^2 + 5x + 2 = 0$

5. کدام یک از معادلات زیر به ازای هر مقدار  $a$  همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟  
 الف)  $x^2 + ax - 1 = 0$   $\Delta = a^2 - 4(1)(-1) = a^2 + 4 > 0$   
 ب)  $x^2 - x + a = 0$   $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(a) = 1 - 4a$   
 $1 - 4a \geq 0 \Rightarrow 4a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{4}$   
 پ)  $x^2 + 4 = 0$   $\Delta = 0^2 - 4(1)(4) = -16 < 0$

6. نشان دهید در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر  $a+c=b$  باشد، یکی از ریشه‌های معادله برابر  $x = -1$  و دیگری  $x = -\frac{c}{a}$  است.

7. با تعیین ریشه‌های معادله نشان دهید حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  دو برابر  $\frac{c}{a}$  است.  
 $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$   
 $x_1 \times x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

8. نشان دهید در هر معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد ( $a+b+c=0$ ) یکی از ریشه‌های معادله  $x=1$  و دیگری  $x = \frac{c}{a}$  است.  
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-a-c)^2 - 4ac = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac = a^2 + c^2 - 2ac = (a-c)^2$   
 $\Delta = (a-c)^2 \geq 0$   
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-a-c) \pm \sqrt{(a-c)^2}}{2a} = \frac{a+c \pm (a-c)}{2a}$   
 $x = \frac{a+c+a-c}{2a} = \frac{2a}{2a} = 1$   $\vee$   $x = \frac{a+c-a+c}{2a} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$

توجه: در حل تمرین 3، می‌توان عبارات یافتن مقدار مجهول  $a$ ، از مجموع یا حاصل ضرب ریشه‌ها، برای یافتن ریشه‌ی دوم استفاده کرد.

جواب 5)  $\Delta = b^2 - 4ac = (a+c)^2 - 4ac = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2 = (a-c)^2$   
 $\Delta = (a-c)^2 \geq 0$   
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-a-c+a-c}{2a} = \frac{-a-c}{a} \\ x = \frac{-a-c+a+c}{2a} = \frac{-a+c}{a} \end{cases}$   
 $x = -\frac{a-c}{a} \quad \vee \quad x = \frac{-a+c}{a}$   
 $x = -\frac{xc}{xa} \quad \vee \quad x = \frac{-xc}{xa}$   
 $x = -\frac{c}{a} \quad \vee \quad x = -1$