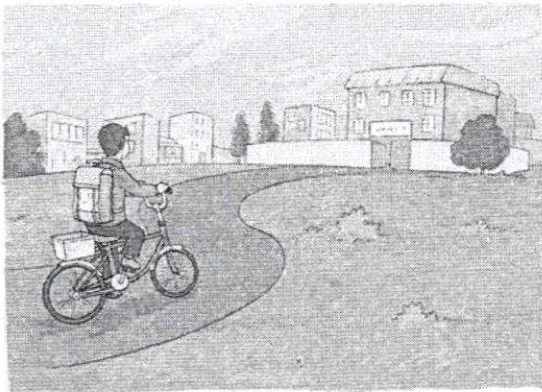
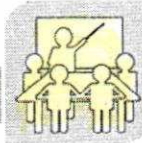


درس ۳

معادلات شامل عبارت‌های گویا

فعالیت



علی هر روز صبح با دوچرخه به مدرسه می‌رود. او از در منزل تا سر خیابان اصلی را ۴ دقیقه رکاب می‌زند و از آنجا تا مدرسه مسافت ۲۵۰۰ متری را از مسیر ویژه دوچرخه‌سواری با سرعت متوسط ۱۵ کیلومتر بر ساعت طی می‌کند. می‌خواهیم با انجام فعالیت زیر مدت زمانی را که طول می‌کشد علی از منزل به مدرسه برسد، محاسبه کنیم.

$2500 = 250 \times 100$
میلی‌متر

۱. دستور محاسبه سرعت متوسط $v = \frac{x}{t}$ است که در آن x مسافت طی شده و t مدت زمان طی مسیر است. داده‌های مسئله را در این دستور جایگزین کنید.

$$15 = \frac{250}{t}$$

۲. برای $15 = \frac{250}{t}$ یک معادله شامل عبارت گویا $\frac{250}{t}$ است. از آنجا که $t \neq 0$ ، پس معادله با معناست.

$$\frac{250}{t} - 15 = 15 - 15 \Rightarrow \frac{250}{t} - 15 = 0$$

برای حل این معادله، دو طرف را با -15 جمع کنید.

۳. با مخارج مشترک گیری سمت چپ معادله را به صورت یک کسر بنویسید.

$$\frac{250}{t} - 15 = 0 \Rightarrow \frac{250 - 15t}{t} = 0$$

۴. کسری که مخراج آن مخالف صفر است، فقط وقتی برابر با صفر می‌شود که صورت آن صفر شود، بنابراین

$$250 - 15t = 0$$

۵. از اینجا به بعد یک معادله یک مجهولی درجه اول به دست می‌آید. آن را حل و مقدار t را محاسبه کنید.

$$250 - 15t = 0 \Rightarrow 15t = 250 \Rightarrow t = \frac{250}{15} = 16\frac{2}{3}$$

۶. مدت زمان رسیدن علی از منزل تا مدرسه چقدر است؟

$$16\frac{2}{3} \times 60 = 1002 \text{ دقیقه}$$

$$4 + 1002 = 1006 \text{ دقیقه}$$

زمان مربوط به علی مسافت از منزل تا سر خیابان اصلی
از خیابان اصلی تا مدرسه

برای حل معادله‌های شامل عبارت‌های گویا، ابتدا با توجه به خاصیت‌های معادله و مخرج مشترک‌گیری، معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ به دست می‌آید. با شرط اینکه $Q(x) \neq 0$ ، وقتی معادله جواب دارد که $P(x) = 0$ است، سپس ریشه‌های این معادله را به دست می‌آوریم. از بین ریشه‌های به دست آمده، آنهایی را قبول می‌کنیم که مخرج کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را صفر نکنند. (چرا؟) چون تقسیم عدد در صفر تعریف نشده است.

مثال: معادله $\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} = 2$ را حل کنید.

حل: با اضافه کردن ۲- به دو طرف معادله خواهیم داشت:

$$\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - 2 = 0$$

اکنون با مخرج مشترک‌گیری از سمت چپ تساوی آن را به صورت یک کسر بنویسید.

$$\frac{10}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - \frac{2(x-3)}{x-3} = 0 \Rightarrow \frac{10 - 5x + 5 - 2x + 6}{x-3} = 0 \Rightarrow \frac{21 - 7x}{x-3} = 0$$

مشاهده می‌کنیم که به معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ رسیدیم. بنابراین با شرط $x-3 \neq 0$ و با حل معادله $P(x) = 0$ ، ریشه‌های معادله را در صورت وجود پیدا می‌کنیم.

$$21 - 7x = 0 \Rightarrow x = 3$$

چون $x=3$ مخرج کسرها را صفر می‌کند، این ریشه قابل قبول نیست و معادله ریشه ندارد.

مثال: معادله $\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2-6x+5}{x^2-x-20}$ را حل کنید.

$$\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} - \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(x+4) + (x-1)(x-5) - (x^2-6x+5)}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+2x-8 + x^2-6x+5 - x^2+6x-5}{(x-5)(x+4)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2+2x-8}{(x-5)(x+4)} = 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -4, x = 2$$

مثال: بازای چه مقدار a معادله $\frac{a}{x} = \frac{x+1}{x+a}$ دارای جواب $x=1$ است.

عاشق
(مخرج کسرها صفر نرند)

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

$$1 + \frac{1}{x^2} = \frac{4}{x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 1 - 4x}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(1) = 16 - 4 = 12 > 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

$$\text{جواب (ب)}: \frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3} \Rightarrow \frac{(x-2)(x+3)}{(x-4)(x+3)} - \frac{(x+1)(x-4)}{(x+3)(x-4)} = 0$$

$$\frac{x^2 + x - 4 - x^2 + 3x + 4}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{4x - 2}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{جواب (ب)}: \frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$$

$$\frac{24(10-m) + 1(10-m)(10+m)}{(10+m)(10-m)} = \frac{24(10+m)}{(10-m)(10+m)}$$

$$240 - 24m + 100 - m^2 - 240 - 24m = 0$$

$$-m^2 - 48m + 100 = 0$$

$$\frac{-m^2 - 48m + 100}{(10-m)(10+m)} = 0$$

$$-m^2 - 48m + 100 = 0$$

$$\Delta = (-48)^2 - 4(-1)(100) = 2704$$

$$\Delta = 2704 > 0$$

$$m = \frac{+48 \pm \sqrt{2704}}{-2} = \frac{48 \pm 52}{-2}$$

$$m = -5 \quad | \quad m = 2$$

حل: $x=1$ را در معادله قرار می‌دهیم و سپس مقدار a را به دست می‌آوریم.

$$x=1 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{2}{a+1} \Rightarrow \frac{a}{1} - \frac{2}{a+1} = 0 \Rightarrow \frac{a(a+1) - 2}{(a+1)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + a - 2}{a+1} = 0 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ \text{یا} \\ a = 1 \end{cases}$$

چون $a=1$ یا $a=-2$ مخارج کسرهای معادله $\frac{a}{1} - \frac{2}{a+1} = 0$ را صفر نمی‌کنند، پس هر دو قابل قبول اند.

کار در کلاس



معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $1 + \frac{1}{x^2} = \frac{4}{x}$

ب) $\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$

پ) $\frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$

ت) $\frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y}$

ث) به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است؟

چند مسئله کاربردی از معادلاتی عبارت‌های گویا دارند



۱. گلدانی نقره داریم که نسبت وزن نقره خالص به وزن مس خالص آن، برابر ۸ است. استاد قلمکار آن را ذوب و ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کرد و گلدان جدیدی ساخت. می‌دانیم $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید، نقره است. این گلدان قبل از ذوب شدن چه وزنی داشته است؟

حل: $\frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن مس}} = 8$ ، اگر وزن مس را برابر با x در نظر بگیریم، آنگاه وزن نقره $8x$ و وزن گلدان قبل از ذوب شدن برابر با $9x$ است.

اکنون اگر بعد از ذوب شدن ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه کنیم، وزن گلدان جدید $9x + 100$ است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

جواب (ت): $\frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y}$

$$\frac{(y+2)(y-3)}{(y+3)(y-3)} - \frac{y^2}{(y-3)(y+3)} = \frac{(y-1)(3-y)}{(3-y)(y+3)} - 1$$

$$\frac{y^2 - y - 6 - y^2}{(y-3)(y+3)} = \frac{3 - y - 3 + y}{(3-y)(y+3)} - 1$$

$$\frac{-y-6}{(y-3)(y+3)} = \frac{0}{(3-y)(y+3)} - 1$$

$$\frac{-y-6}{(y-3)(y+3)} = -1$$

$$\frac{-y-6}{(y-3)(y+3)} + 1 = 0$$

$$\frac{-y-6 + (y-3)(y+3)}{(y-3)(y+3)} = 0$$

$$\frac{-y-6 + y^2 - 9 + 3y - 3y + 9}{(y-3)(y+3)} = 0$$

$$\frac{y^2 - y - 6}{(y-3)(y+3)} = 0$$

$$y^2 - y - 6 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(-6) = 25$$

$$\Delta = 25 > 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$y = \frac{1+5}{2} = 3 \quad | \quad y = \frac{1-5}{2} = -2$$

جواب (ث): $x=2 \Rightarrow \frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} = \frac{a}{2}$

$$\frac{2}{a-2} + \frac{a-2-a}{2} = 0$$

$$\frac{2}{a-2} - \frac{1 \times (a-2)}{1 \times (a-2)} = 0 \Rightarrow \frac{2-a+2}{(a-2)} = 0 \Rightarrow \frac{4-a}{(a-2)} = 0 \Rightarrow a=4$$

از آنجا که $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید نقره است؛ یعنی $\frac{4}{5} = \frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن گلدان جدید}}$ ، پس داریم:

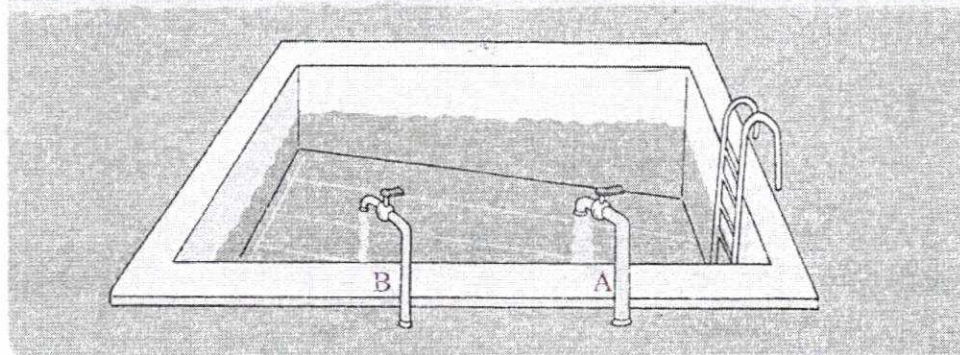
$$\frac{8x}{9x+100} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{8x}{9x+100} - \frac{4}{5} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{8x \times 5}{(9x+100) \times 5} - \frac{4(9x+100)}{5(9x+100)} = 0 \Rightarrow \frac{40x - 36x - 400}{5(9x+100)} = 0 \quad (9x+100 \neq 0 \text{ با شرط})$$

$$4x - 400 = 0 \Rightarrow x = 100$$

از آنجا که وزن گلدان قبل از ذوب شدن $9x$ است، در نتیجه وزن گلدان قبل از ذوب شدن برابر با 900 گرم است.

۲) دو شیر آب A و B به یک استخر متصل اند. شیر A استخر را ۱۰ ساعت زودتر از شیر B پر می کند. چنانچه دو شیر را با هم باز کنیم، آنگاه استخر در ۱۲ ساعت پر می شود. اگر شیر B به تنهایی باز باشد، استخر در چند ساعت پر می شود.



حل: فرض کنیم شیر B استخر را در x ساعت پر کند. اگر حجم استخر را V در نظر بگیریم، پس از یک ساعت $\frac{V}{x}$ استخر پر می شود و به همین ترتیب اگر شیر A باز باشد، پس از یک ساعت $\frac{V}{x-10}$ استخر پر می شود. حال اگر دو شیر را با هم باز کنیم، خواهیم داشت:

مراقب باشیم بر $(x \neq 0)$

$$\frac{V}{x} + \frac{V}{x-10} = \frac{V}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} - \frac{1}{12} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 \times 12(x-10) + 1 \times 12x}{x \times 12(x-10)} - \frac{x(x-10)}{12x(x-10)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 34x - 120}{12x(x-10)} = 0 \Rightarrow -x^2 + 34x - 120 = 0$$

$$\frac{12x - 120 + 12x - x^2 + 10x}{12x(x-10)} = 0$$

روش هم می شود

$$x^2 - 34x + 120 = 0$$

$$(x-20)(x-4) = 0$$

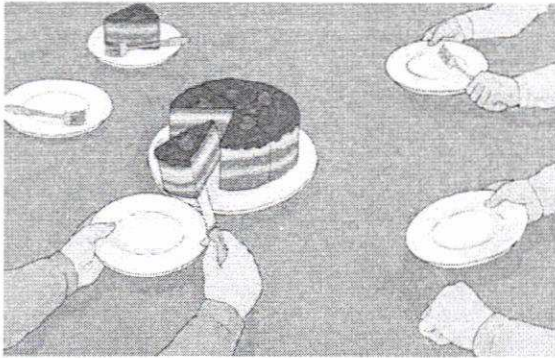
$x=20$ یا $x=4$
عقده

$\Delta = 34^2 - 4(-1)(-120) = 476$
 $\Delta = 476 > 0$ معادله ۲ ریشه دارد

$$x = \frac{-34 \pm \sqrt{476}}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x=20 \\ x=4 \end{cases}$$

عقده

(یعنی شیر B استخر را در ۲۰ ساعت پر می کند، شیر A در $20 - 10 = 10$ ساعت و دو شیر با هم در ۱۲ ساعت پر می کنند)



۳: یک کیک را بین چند نفر تقسیم کردیم و به هر یک مقدار مساوی رسید. سپس یک نفر دیگر به جمع آن اضافه شد و دوباره کیک را بین آنها تقسیم کردیم. در این مرحله به هر یک به اندازه $\frac{1}{6}$ کمتر رسید. مشخص کنید در ابتدا چند نفر بوده اند؟

حل: فرض کنید در ابتدا n نفر بوده اند؛ بنابراین به هر یک $\frac{1}{n}$ کیک رسید، در مرحله بعد به هر یک

$\frac{1}{n+1}$ کیک رسید. از آنجا که در این مرحله به هر یک $\frac{1}{6}$ کمتر رسیده است، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1 \times (n+1) - 1 \times n}{n \times (n+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{6}$$

با حل این معادله $n=2$ به دست می آید.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1 \times (n+1) - 1 \times n}{n \times (n+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{6}$$

$$6(1) = n(n+1) \Rightarrow 6 = n^2 + n \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0$$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow n = 2 \text{ یا } n = -3$$

تصویر تعداد افراد در ابتدا $n=2$

معادله های زیر را حل کنید.

۱) $\frac{3x-5}{x+3} = 1$

۲) $\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$

۳) $\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3$

۴) $\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$

۵) $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$

۶) $\frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2}$

۷) مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{5}{12}$ است. آن دو عدد را پیدا کنید.

۸) هنگامی که دو چاپگر با هم کار می کنند، فیش حقوق کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می شود. اگر چاپگر قدیمی تر به تنهایی برای این کار، ۳ ساعت بیشتری نسبت به چاپگر جدیدتر نیاز داشته باشد، در این صورت هر کدام از چاپگرها به تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می کنند؟

۹) به ازای چه مقدار k ، معادله $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-6t}$ دارای جواب $t=-3$ است.

$$t = -3 \Rightarrow \frac{4-(-3)}{2-2(-3)} = \frac{3(-3)^2+k}{((-3)^2+1)^2-6(-3)}$$

این مسئله اقتباس از کتاب جبر و مقابله خوارزمی است که در آن کتاب به جای (کیک)، کلمه درهم آمده است.

$$\frac{7}{8} = \frac{27+k}{32} \Rightarrow \frac{27+k}{32} - \frac{7}{8} = 0 \Rightarrow \frac{27+k-28}{32} = 0 \Rightarrow k-1=0 \Rightarrow k=1$$

جواب ۷) $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+2} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{1 \times (k+2) + 1 \times k}{k \times (k+2)} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{k+2+k}{k(k+2)} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{2k+2}{k(k+2)} = \frac{5}{12}$

$$-2k^2 + 14k + 24 = 0 \Rightarrow \Delta = 14^2 - 4(-2)(24) = 272 > 0$$

$$k = \frac{-14 \pm \sqrt{272}}{-4} \Rightarrow k = 4 \text{ یا } k = -4$$

جواب ۸)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1 \times (x+3) + 1 \times x}{x \times (x+3)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x+3+x}{x(x+3)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2x+3}{x(x+3)} = \frac{1}{4}$$

$$4(2x+3) = x(x+3) \Rightarrow 8x+12 = x^2+3x \Rightarrow x^2-5x-12=0$$

$$\Delta = 25 + 48 = 73$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{-2}$$

$$-x^2 + 5x + 12 = 0$$

$$\Delta = 25 + 48 = 73$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{-2}$$

① $\frac{3x-5}{x+3} = 1$

$\frac{(3x-5)(x)}{(x+3)(x)} - \frac{1(x+3)}{1(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{3x^2+5x-x-3}{x+3} = 0 \Rightarrow \frac{3x^2+4x-3}{x+3} = 0 \Rightarrow 3x^2+4x-3 = 0 \Rightarrow x = -1$

② $\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$

$\frac{(3x-2)(x+3)}{x(x+3)} + \frac{(2x+5)x}{(x+3)x} - \frac{5x(x+3)}{1x(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{3x^2+9x-2x-6+2x^2+5x-5x^2-15x}{x(x+3)} = 0$

$\frac{-3x^2-4x-6}{x(x+3)} = 0 \Rightarrow -3x^2-4x-6 = 0 \Rightarrow x = -2$

③ $\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3$

$\frac{2+x}{x+2} = x+3 \Rightarrow \frac{(x+2)x}{(x+2)x} - \frac{(x+3)(x+2)}{1x(x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{x+2-x^2-5x-6}{(x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2-4x-4}{(x+2)} = 0$

$-x^2-4x-4 = 0 \Rightarrow x^2+4x+4 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$
 معادله جواب ندارد چون مربع کسر را صفر کند

پس معادله جواب ندارد چون مربع کسر را صفر کند

تهیه کننده:

④ $\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$

$\frac{(x^2-2x+2)x}{x(x-2)x} - \frac{(1+x)(x-2)}{xx(x-2)} - \frac{(x-1)xx}{(x-2)xx} = 0$

$\frac{x^2-2x+2-x^2+2x-2-x^2+2x}{x(x-2)} = 0 \Rightarrow \frac{-x^2+4x}{x(x-2)} = 0 \Rightarrow -x^2+4x = 0 \Rightarrow x^2-4x = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

$x = -2$ و $x = +2$
 غلطی چون مربع کسر را صفر کند

⑤ $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$
 $\frac{3x(x+3)(x-2)}{(x-1)(x+3)(x-2)} - \frac{2x(x-1)(x-2)}{(x+3)(x-1)(x-2)} - \frac{4x(x-1)(x+3)}{(x-2)x(x-1)(x+3)} = 0$

$\frac{3x^2-3x-12-2x^2+4x-4-4x^2-12x+12}{(x+3)(x-1)(x-2)} = 0 \Rightarrow \frac{-3x^2-5x-10}{(x+3)(x-1)(x-2)} = 0$

$-3x^2-5x-10 = 0 \Rightarrow 3x^2+5x+10 = 0 \quad \Delta = 5^2 - 4(3)(10) = 25 - 120 = -95$
 $\Delta = -95 < 0$
 معادله ریشه ندارد

$$\textcircled{4} \quad \frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{\cancel{1-x} \cdot (x-2)} = \frac{2x-3}{x+2}$$

$$\frac{11}{(x-2)(x+2)} - \frac{(x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} - \frac{(2x-3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = 0$$

$$\frac{11 - x^2 - 5x - 6 - 2x^2 + 4x + 3x - 6}{(x-2)(x+2)} = 0 \Rightarrow \frac{-3x^2 + 2x - 1}{(x-2)(x+2)} = 0$$

$$-3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4(-3)(-1) = 4 - 12 = -8 \Rightarrow \Delta = -8 < 0 \quad ; \quad \text{دو معادله جواب ندارد.}$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان