

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

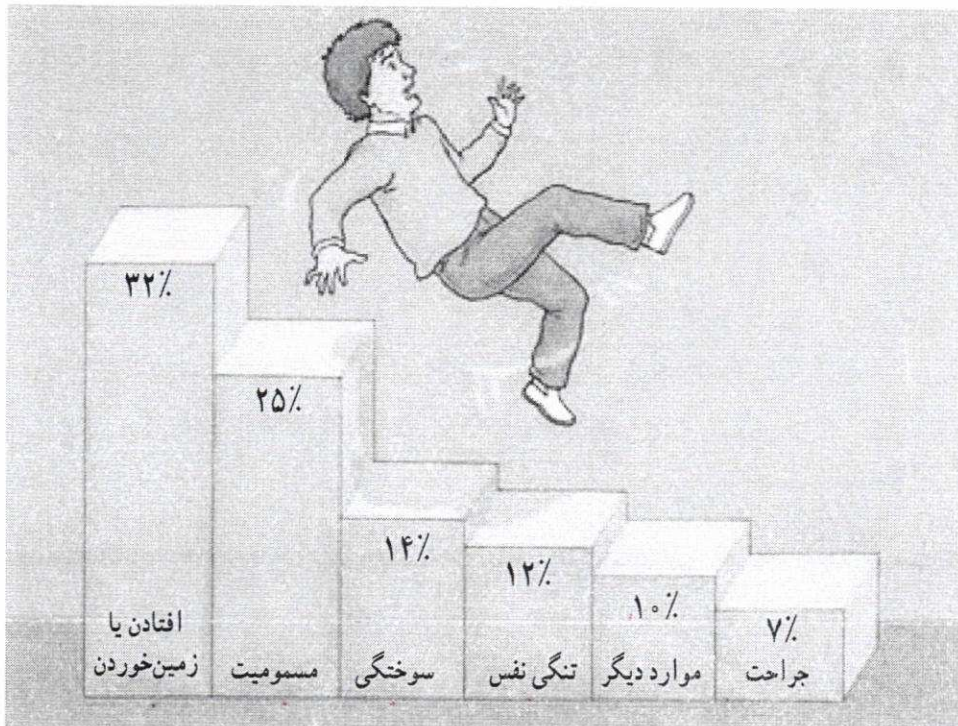
درس ۱

نمودارهای یک متغیره

فعالیت



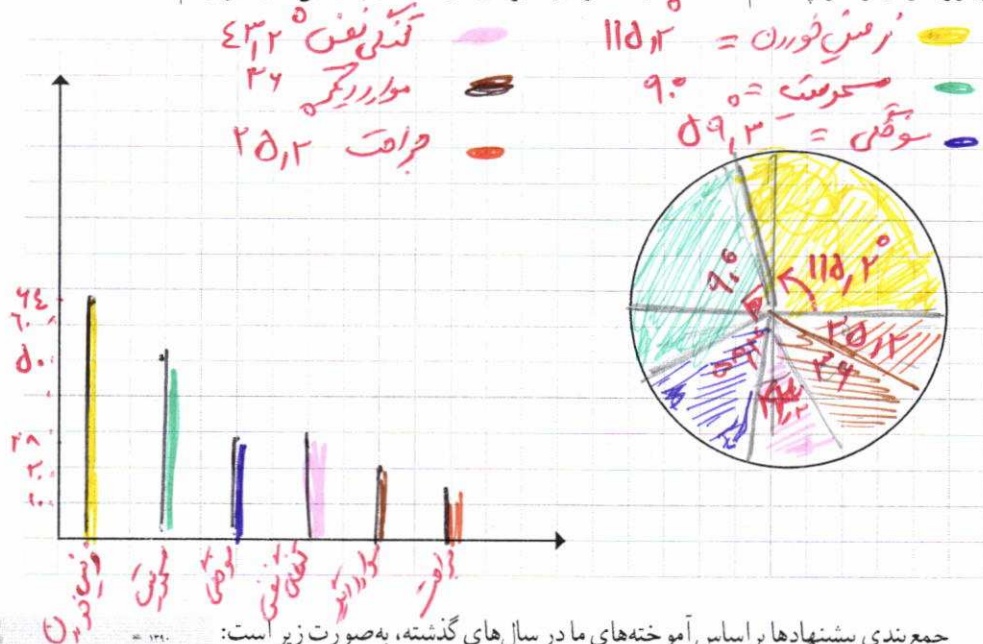
در کلاس قرار شد هر دانش آموز با توجه به داده‌های موجود در رسانه‌ها، درباره یک موضوع اجتماعی یا فرهنگی گزارشی در قالب یک شکل ارائه کند. مثلاً حسن در مورد موضوع علل آسیب‌دیدگی ۲۰۰ نفر در منازل اطلاعاتی کسب کرده بود. او گزارش خود را در یک شکل خلاصه کرده است. او با اطلاعاتی که در اختیار داشته است، ابتکار جالبی به خرج داده و نمودار زیر را رسم کرده است. از این نمودار چه اطلاعاتی می‌توان کسب کرد؟ به عنوان مثال، بیشترین آسیب‌دیدگی در منازل بر اثر افتادن یا زمین خوردن است.



$$\begin{aligned} 32 \times 2 &= 64 \\ 25 \times 2 &= 50 \\ 14 \times 2 &= 28 \\ 12 \times 2 &= 24 \\ 10 \times 2 &= 20 \\ 7 \times 2 &= 14 \end{aligned}$$

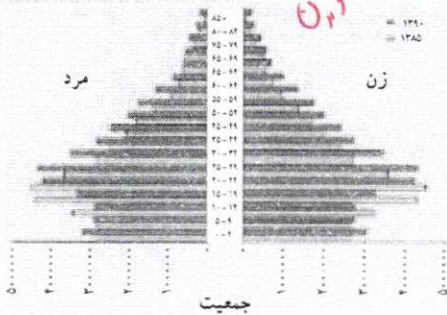
معلم از موضوع انتخابی و نمایش ترتیبی مکعبها برحسب طول آنها رضایت کامل داشت؛ ولی از دانش‌آموزان درخواست کرد که اگر می‌توانند پیشنهادی برای بهتر شدن آن ارائه کنند. آیا شما قبل از دیدن نظرها می‌توانید چند پیشنهاد برای بهبود نمودار ارائه کنید؟

نمودار میله‌ای انواع آسیب‌دیدگی را، برحسب تعداد رسم کنید. مراحل رسم نمودار دایره‌ای را به یاد بیاورید و آن را در چند گام خلاصه کنید. نمودار دایره‌ای درصد آسیب‌دیدگی‌ها را نیز رسم کنید.



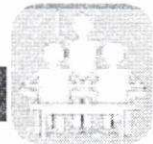
جمع‌بندی پیشنهادها براساس آموخته‌های مادر سال‌های گذشته، به صورت زیر است:

- ✓ رسم مکعب مستطیل به جای مستطیل خوب نیست، چون ممکن است اطلاعات دقیق را به بیننده انتقال ندهد.
- ✓ برای متغیرهای اسمی نمودار میله‌ای بهتر از بافت‌نگاشت (هیستوگرام) است.
- ✓ زمانی که درصد را گزارش می‌کنیم، بهتر است از نمودار دایره‌ای استفاده کنیم تا بهتر بتوانیم مقایسه انجام دهیم. البته به شرطی که بیشتر از ۶ مقدار نداشته باشیم.



مقایسه هرم سنی جمعیت ایران
سال‌های ۱۳۸۵ و ۱۳۹۰

کار در کلاس



در کلاس درس خود متوسط مصرف روزانه انواع میوه‌ها یا سبزی‌ها را به یکی از روش‌های فصل قبل جمع‌آوری کنید و آنها را با یک نمودار مناسب نمایش دهید. مثلاً اگر در روز شنبه ۳، یکشنبه ۶، دوشنبه ۵، سه‌شنبه ۴، چهارشنبه ۳، و پنجشنبه ۷ و جمعه ۸ نوع میوه یا سبزی خورده باشید، میانگین آنها برابر ۵/۱۴ است که آن را ۵ در نظر می‌گیریم.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

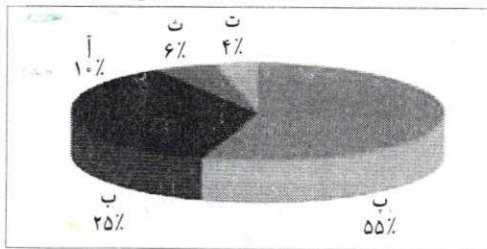
نمایش داده‌ها

نمایش داده‌ها، روشی برای کمک به استخراج اطلاعات از داده‌ها با حس بینایی است.

فعالیت

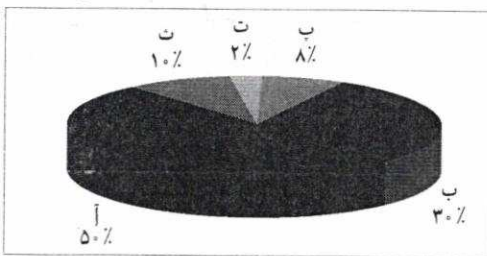


درصد تعداد کاربران اینترنت در پنج کشور



از نمودار دایره‌ای مقابل، برای نشان دادن وضعیت استفاده از اینترنت در پنج کشور استفاده شده است. کدام کشور دسترسی بیشتری به اینترنت دارد؟ آیا اطلاعات این نمودار برای پاسخ به سؤال قبل کافی است؟ چه اطلاعاتی از این نمودار کسب می‌کنید؟

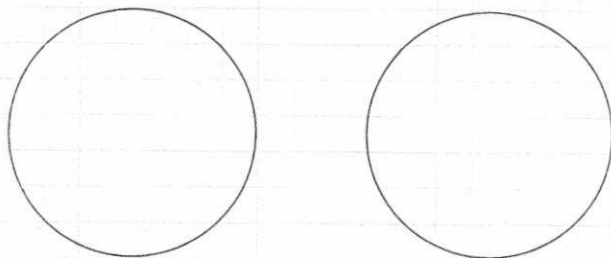
درصد کاربران اینترنت نسبت به کل جمعیت در پنج کشور



اگر عامل جمعیت را در نظر بگیریم، واقعیت میزان توسعه اینترنت و میزان استفاده از آن در کشورهای مختلف را می‌توان به صورت روبه‌رو نشان داد.

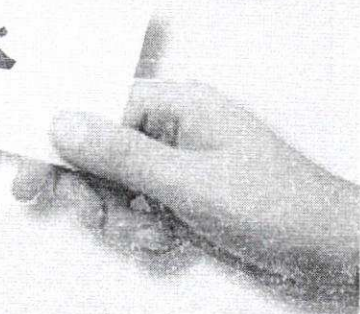
آیا برداشت شما از نمودار قبل تغییر کرد؟

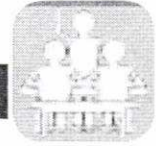
به نظر شما رسم نمودار دایره‌ای به صورت دو بعدی که در سال‌های گذشته با آن آشنا شده‌اید، بهتر است یا سه بعدی؟ مانند دو نمودار قبلی.



انتقال اطلاعات از طریق نمایش داده‌ها بسیار جذاب‌تر و سریع‌تر از ارائه همان اطلاعات در جدول‌هاست. نمودارها باید به گونه‌ای رسم شوند که از آنها سوء برداشت نشود و بی‌طرفی را حفظ کنند. می‌گویند ارزش یک تصویر به اندازه هزار کلمه است.

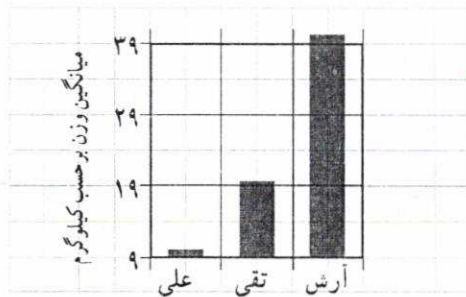
خواندنی





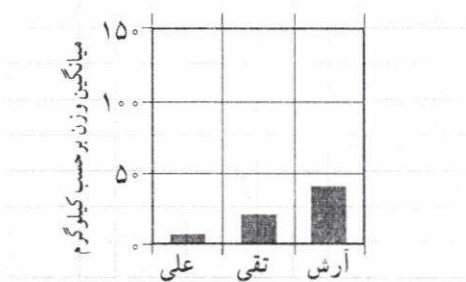
بازی با نمودارها

۳. اگر نقطه شروع محور عرض‌ها را از صفر به عدد ۹ تغییر دهیم، چه تغییری در نتیجه حاصل می‌شود؟



در واقع اعداد همان اعداد قبلی‌اند، اما محور عرض‌ها تغییر کرده است. اکنون این‌طور به نظر می‌رسد که کدو تنبل‌های **بیانج علی وزن بسیار ناچیزی دارند.**

۴. اینک اگر کسی بخواهد دیگران را متقاعد کند که همه کدو تنبل‌ها حدوداً به یک اندازه‌اند، **از چه کاری می‌تواند بکنند؟** به این نمودار نگاه کنید:

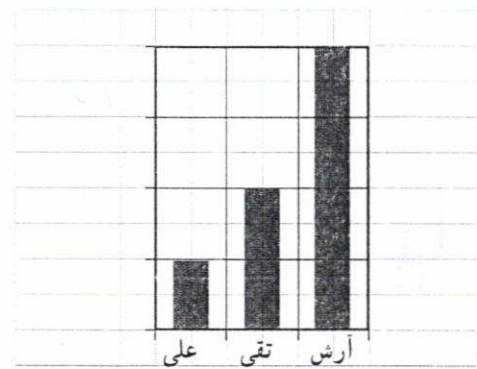


اعداد تغییری نکرده‌اند؛ اما محور عمودی دوباره تغییر کرده است. چه تغییری کرده است؟

مقیاس محور را تغییر دادند.

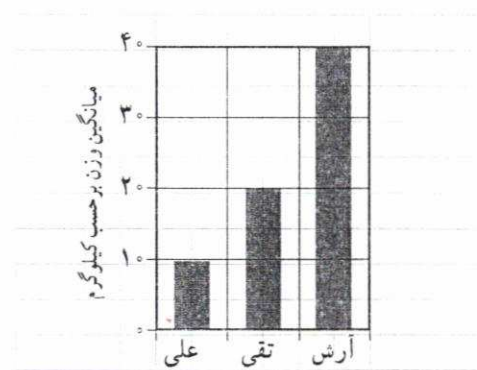
به‌کارگیری غلط نمودارها، راه ساده‌ای برای گمراه کردن افراد است. افراد مایل‌اند به نمودارها به عنوان روشی سریع برای ارزیابی مجموعه‌ای از اعداد بنگرند. اما مراقب باشید که فریب نخورید.

۱. بیایید از کدو تنبل‌های باغ‌های آرش، تقی و علی استفاده کنیم. اولین نمودار به‌صورت زیر است:



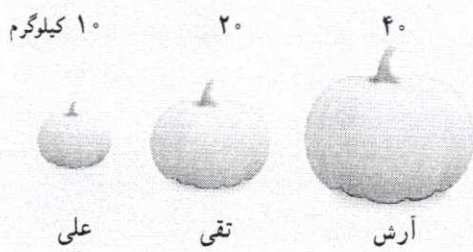
این نمودار چه چیزی را نمایش می‌دهد؟ وزن، حجم، پهنا یا ارتفاع کدو تنبل‌ها را؟ **سودم از نظر**

۲. نمودار زیر چه تفاوتی با نمودار بالا دارد؟



این نمودار به چه اطلاعات بیشتری اشاره می‌کند؟

معنی می‌کند که وزن کدو تنبل‌ها باغ‌ها میانگین آرش بیشتر از تقی و علی است.



گاهی برای نمایش داده‌ها از یک تصویر استفاده می‌شود، مانند شکل روبه‌رو.

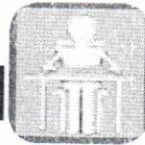
این تصویر، داده‌ها را از شکل طبیعی خارج می‌کند. برای نمایش تفاوت میانگین وزن‌ها، این تصویر ارتفاع هر کدو تنبل را، برای نشان دادن وزنش، تغییر می‌دهد. ارتفاع

کدو تنبل تقی (با وزن ۲۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدو تنبل علی (۱۰ کیلوگرم) است؛ ارتفاع کدو تنبل آرش (۴۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدو تنبل تقی و چهار برابر ارتفاع کدو تنبل علی است. آیا این شکل اطلاعات مورد نظر را به درستی به بیننده منتقل می‌کند؟ (راهنمایی: فرمول‌های محاسبه و مساحت را به یاد آورید: مساحت مستطیل = طول × عرض و مساحت دایره = πr^2)

آر از تقی ۲ برابر بزرگتر است. کدو تنبل

شما چگونه این شکل را رسم می‌کنید تا اطلاعات موجود را بهتر نمایش دهد؟
به نظر شما آیا رنگ در انتقال نظر تان به بیننده تأثیر دارد؟

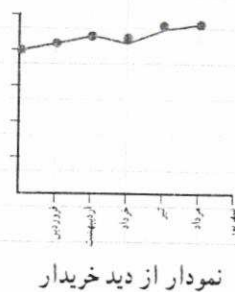
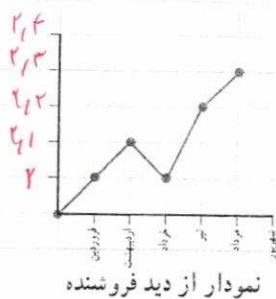
تمرین



۱. سود خالص یک شرکت خدماتی در شش ماه نخست سال بر حسب میلیارد ریال به صورت زیر است:

شهریور	مرداد	تیر	خرداد	اردیبهشت	فروردین
۲/۴	۲/۳	۲/۱	۲/۲	۲/۱	۲/۰

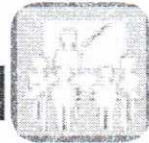
خریدار و فروشنده سهام این شرکت، نمودارهای زیر را رسم کرده‌اند. اعداد روی محورها را مشخص کنید:



به نظر شما کدام یک منطقی‌تر است؟ آیا می‌توانید نموداری بهتر از این دو نمودار رسم کنید؟

نمایش از رسم می‌کند

۲. اگر درصد یا فراوانی متغیرهایی که نمودارهای آنها را رسم می‌کنیم، نزدیک به هم باشند، آیا نمودار میله‌ای دایره‌ای برای مقایسه مناسب‌تر است؟ **فهر**
۳. رسم نمودارهای میله‌ای و دایره‌ای برای داده‌های کمی مناسب‌تر است یا برای داده‌های کیفی؟ **کی**



فعالیت

مربی گروه (تیم) بسکتبال شهر می‌خواهد بر اساس نتایج بازی‌های قبلی دو بازیکن، نسبت به حضور یکی از آنها در بازی بعدی تصمیم بگیرد. امتیازهای کسب‌شده توسط این دو بازیکن به صورت زیر است.

۱۱ بازی بازیکن الف:

۱	۱	۱	۳	۲	۱	۲	تعداد بازی‌ها
۳۰	۱۳	۱۱	۱۰	۷	۶	۳	امتیاز کسب‌شده

۱۰ بازی بازیکن ب:

۱	۱	۲	۲	۲	۱	۱	تعداد بازی‌ها
۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	امتیاز کسب‌شده

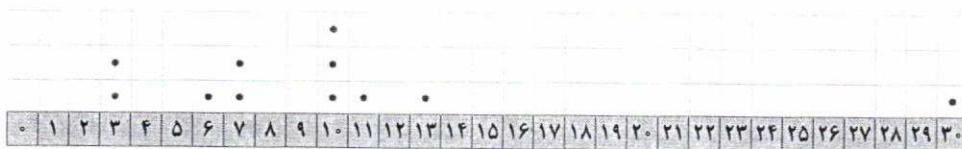
می‌توان داده‌های مرتب‌شده را به صورت زیر نشان داد:

۳	۳	۶	۷	۷	۱۰	۱۰	۱۰	۱۱	۱۳	۳۰	بازیکن الف
۷	۸	۹	۹	۱۰	۱۰	۱۱	۱۱	۱۲	۱۲	۱۳	بازیکن ب

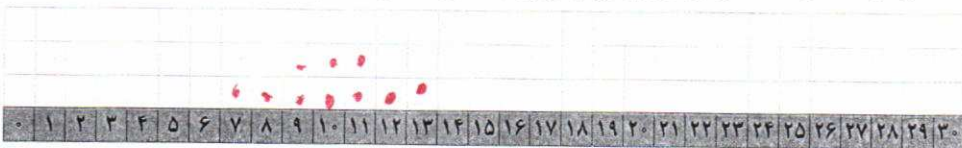
تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

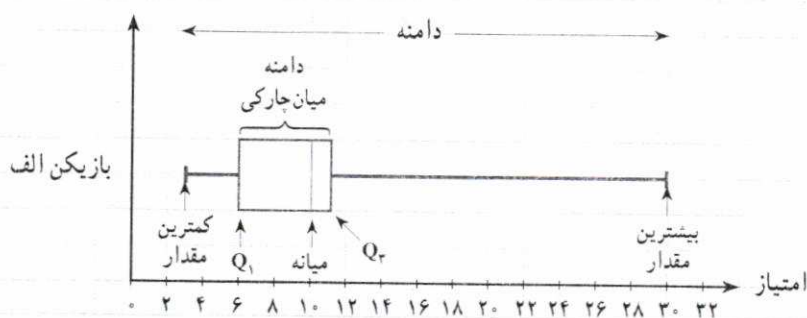
اگر هر یک از اعداد را به صورت نقطه بالای یک محور علامت بزنیم، به نمودار حاصل نمودار نقطه‌ای داده‌ها می‌گویند. نمودار نقطه‌ای امتیازهای بازیکن الف را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.



نمودار نقطه‌ای داده‌ها را برای بازیکن ب بر روی محور نمایش دهید.



به نظر شما کدام بازیکن بهتر است؟ البته سؤال کلی است و اگر به شما بگویم این بازی آخر است یا گروه مقابل تیمی است که تاکنون امتیاز بیشتری نسبت به گروه شهر کسب کرده، ممکن است پاسخ سؤال عوض شود. در فصل گذشته برای تصمیم درست‌تر، از معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی به طور هم‌زمان استفاده می‌شد. پس خالی از لطف نیست که معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی مجموعه‌های گوناگون از داده‌ها را به شکل تصویری مورد مقایسه قرار دهیم. امتیازهای بازیکن الف را در نظر بگیرید. برای این منظور کمترین مقدار، چارک اول، میانه، چارک سوم و بیشترین مقدار را محاسبه کنید و روی یک محور نمایش دهید. برای مشخص کردن حدود دامنه میان‌چارکی، یک جعبه به عرض دلخواه رسم می‌کنیم. برای مشخص کردن دامنه دو خط، از دو طرف جعبه به کمترین مقدار و بیشترین مقدار داده‌ها وصل می‌کنیم. با مشخص کردن میانه روی جعبه، نمودار جدیدی ارائه کرده‌ایم به نام نمودار جعبه‌ای. برای این منظور خطی عمودی بکشید تا میانه مشخص شود.



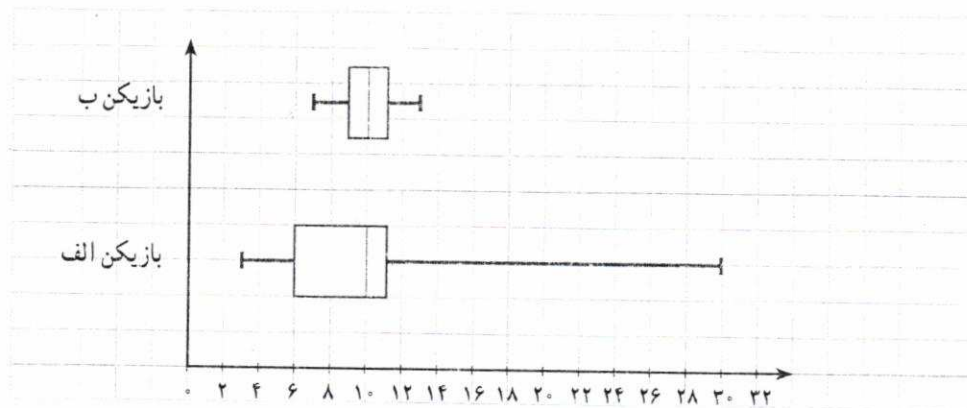
این نمودار دامنه، دامنه میان‌چارکی و میانه مجموعه داده‌ها را به طور هم‌زمان نشان می‌دهد. بیش از یک مجموعه داده را می‌توان در یک نمودار نشان داد. این بدان معناست که این روش برای مقایسه داده‌ها بسیار عالی است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

اگر داده‌ها در برگیرنده داده دور افتاده بودند، دامنه وسیع‌تر می‌بود. در نمودار جعبه‌ای، طول سبیل‌ها با توجه به مرزهای بالا و پایین افزایش \times می‌یابد. با نگاه کردن به سبیل‌های نمودار جعبه‌ای، می‌توانید به نامتقارن بودن داده‌ها پی ببرید.

نمودار جعبه‌ای دو بسکتبالیست در اینجا نشان داده شده است. دامنه این امتیازات را مقایسه کنید. اگر مجبور بودید از بین این دو بازیکن، یک نفر را انتخاب کنید، کدام را انتخاب می‌کردید؟ اکنون بهتر می‌توانید به سؤال قبل در وضعیت‌های مختلف گروه مقابل یا حساسیت بازی تصمیم‌گیری کنید.



بازیکن ب دامنه نسبتاً کوچکی دارد، ولی میانه هر دو برابر با ۱۰ است.

بازیکن الف دامنه امتیازات بزرگی دارد. گاهی این بازیکن، امتیازاتی بسیار بیشتر از بازیکن ب می‌آورد،

و گاهی هم بسیار کمتر.

بازیکن ب ثبات بیشتری دارد و معمولاً امتیازاتش از بازیکن الف بیشتر است (میانه‌ها و دامنه میان‌چارکی

را با هم مقایسه کنید)، پس بهتر است بازیکن ب را انتخاب کنیم.

از آنجا که دو خط
دو طرف جعبه شبیه سبیل
گره است. بعضی مواقع
به آن نمودار جعبه و سبیل
گفته می‌شود.

نمودار جعبه‌ای، روشی سودمند برای نمایش دامنه‌ها و چارک‌های داده‌هاست. یک جعبه، مکان قرارگیری چارک‌ها و دامنه میان‌چارکی را نشان می‌دهد و سبیل‌ها کمترین و بیشترین داده را نشان می‌دهند. در یک نمودار جعبه‌ای بیش از یک مجموعه داده را می‌توان نشان داد؛ پس این نمودار برای مقایسه مناسب است.

دامنه میان‌چارکی به نظر مفید می‌رسد. این دامنه در مورد بازیکنانی که گاهی امتیازات بسیار پایینی

کسب می‌کنند چگونه؟ اگر بازیکنی در روز مسابقه، بد بازی کند، برای ما به قیمت دادن قهرمانی در تیمگان (لیگ) تمام می‌شود. مطمئن نیستیم که دامنه یا دامنه میان‌چارکی برای ما مشخص می‌کند که کدام بازیکن واقعاً ثبات بیشتری دارد.

مربی نباید فقط دامنه امتیازات بازیکنان را مقایسه کند. او به راهی نیاز دارد تا به طور دقیق از روی مقادیر موجود محاسبه کند که کدام بازیکن در روز مسابقه ثبات بیشتری دارد. به عبارت دیگر، او باید بازیکنی را پیدا کند، امتیازاتش کمترین تغییرات را داشته باشد.



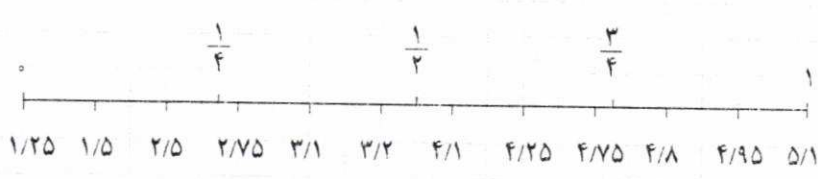
مشکل دامنه و دامنه میان چارکی این است که فقط تفاوت بین مقادیر کم و زیاد را به شما می گویند؛ اما نمی گویند که چند وقت به چند وقت بازیکنان این امتیازات کم و زیاد را در مقابل امتیازات نزدیک به میانه کسب می کنند. این برای مربی مهم است.

کار در کلاس



برای مجموعه داده های زیر نمودار جعبه ای بکشید.
 $\frac{1}{25}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{25}, \frac{4}{75}, \frac{4}{95}, \frac{5}{1}$
 راهنمایی: $\frac{4}{95}$ $\frac{5}{1}$

گام اول: کمترین مقدار و بیشترین مقدار را مشخص کنید.
 از آنجا که اعداد به ترتیب چیده شده اند، اولین عدد کمترین مقدار است و آخرین عدد بیشترین مقدار.
 گام دوم: چارک ها را مشخص کنید.
 در این مجموعه ۱۲ عدد وجود دارد. می توانیم از شکل زیر یا از فرمول برای تعیین چارک ها استفاده کنیم.

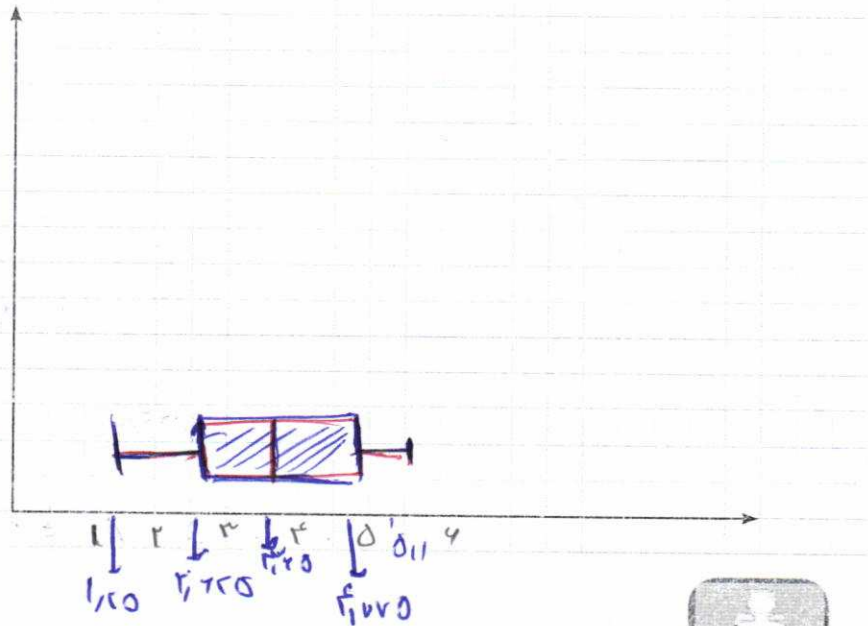


با نگاه به شکل بالا در می یابیم که میانه بین مقادیر $\frac{3}{1}$ و $\frac{3}{2}$ است. بنابراین، مقدار میانه می شود: $\frac{3}{2}$.
 چارک اول، بین مقادیر $\frac{1}{5}$ و $\frac{2}{75}$ قرار می گیرد. بنابراین، مقدار اولین چارک می شود: $\frac{2}{75}$.
 چارک سوم بین مقادیر $\frac{4}{75}$ و $\frac{4}{8}$ قرار می گیرد. بنابراین، مقدار سومین چارک می شود: $\frac{4}{75}$.

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

گام سوم: نمودار جعبه‌ای رسم کنید.



تمرین



۱. نمودارهای میله‌ای فراوانی یا درصدها را نشان می‌دهند. چه زمانی باید از فراوانی‌ها و چه زمانی از درصدها استفاده کرد؟ **۶ وقتی فاصله فراوانی داده کم باشد - فراوانی**
۲. نمودارهای میله‌ای افقی درست شکبیه نمودارهای میله‌ای عمودی هستند. برای نمودارهای محورها چرخیده‌اند. نمودارهای میله‌ای عمودی مرسوم تر هستند. به نظر شما رسم نمودارهای میله‌ای افقی چه زمانی مفید است؟ **وقتی که اسم رده‌ها طولانی باشد -**
۳. سن بازیکنان تیم ملی فوتبال یک کشور به شرح زیر است:

۲۷ | ۲۴ | ۲۶ | ۲۶ | ۲۹ | ۱۹ | ۳۱ | ۱۸ | ۲۳ | ۲۲ | ۲۵ | ۲۶ | ۲۷ | ۲۳ | ۲۹ | ۲۵ | ۲۵ | ۳۳ | ۳۱ | ۲۱ | ۲۶ | ۲۵

الف) نمودار نقطه‌ای رسم کنید و مقادیر میانگین، مد و میانه سن بازیکنان این تیم روی محور افقی نشان دهید.

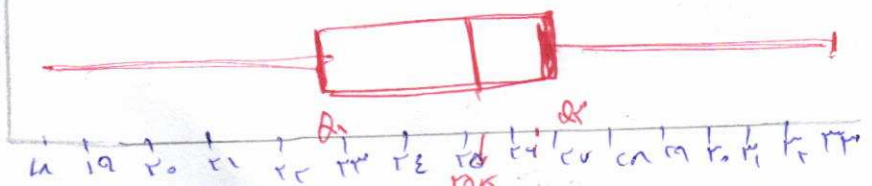
ب) نمودار جعبه‌ای داده‌ها را رسم کنید.

پ) تعداد بازیکنانی که سن آنها بیشتر از میانگین است، بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها از میانگین کمتر است؟ **بیشتر میانگین (۱۱) کمتر میانگین (۱۸)**

ت) تعداد بازیکنانی که سن آنها بالاتر از میانه است بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها از میانه کمتر است؟ میانگین را در این بررسی مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ **بیشتر میانگین (۱۱) کمتر میانگین (۱۸)**

ث) چه تعداد از بازیکنان سن آنها بین چارک اول و سوم قرار دارد؟ آیا بدون محاسبه چارک‌ها می‌توانستید

به این سوال پاسخ دهید؟ **بله طبق فرکانس داده‌ها بین چارک اول و سوم هستند**



نمودارهای میله‌ای افقی درست شبیه نمودارهای میله‌ای عمودی‌اند، با این فرق که محورها چرخیده‌اند. در نمودارهای میله‌ای افقی، رده‌ها روی محور عمودی و درصد یا فراوانی روی محور افقی نشان داده می‌شود.

نمودارهای میله‌ای عمودی مرسوم‌ترند، اما نمودارهای میله‌ای افقی در صورتی که اسم رده‌ها طولانی باشند، مفید واقع می‌شوند. آنها برای نمایش اسامی رده‌ها، بدون نیاز به عمودی نوشتن، فضای زیادی را در اختیارمان می‌گذارند.

$\bar{x} = 25,15$
 $\text{میانه} = 25,15$
 $s = 25,24$

$\sigma_1 = 23$
 $\sigma_2 = 25,15$
 $\sigma_3 = 27$