

# درس ۲

## نمودارهای چندمتغیره



### فعالیت

پوریا علاقه زیادی به جغرافیا دارد. او فهرستی از مقادیر سه متغیر مربوط به ۱۰ کشور را تهیه کرده است:

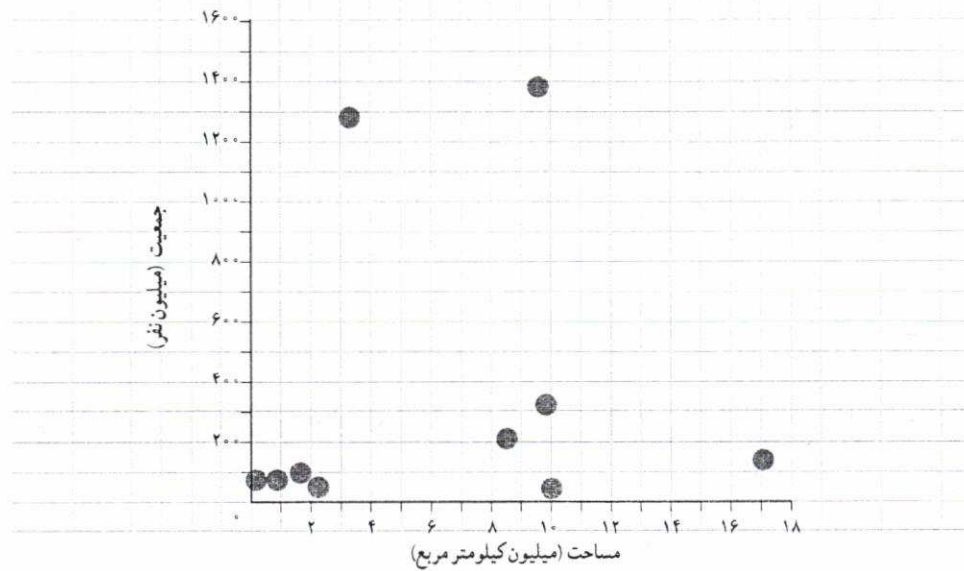
نام کشور	جمعیت (نفر)	مساحت (کیلومتر مربع)	آبها (درصد)
۱ ایران	۷۹,۲۰۰,۰۰۰	۱,۶۴۸,۱۹۵	۰/۷۰
۲ آمریکا	۳۲۲,۳۶۹,۳۱۹	۹,۸۵۷,۳۰۶	۷/۱۰
۳ انگلستان	۶۴,۷۱۶,۰۰۰	۲۴۲,۴۹۵	۱/۳۴
۴ برزیل	۲۰۵,۳۳۸,۰۰۰	۸,۵۱۵,۷۶۷	۰/۶۵
۵ ترکیه	۷۹,۴۶۳,۶۶۳	۸۱۴,۵۷۸	۱/۳۰
۶ چین	۱,۳۷۶,۰۴۹,۰۰۰	۹,۵۹۶,۹۶۱	۲/۸۰
۷ روسیه	۱۴۴,۱۹۲,۴۵۰	۱۷,۰۹۸,۲۴۲	۱۳/۰۰
۸ عمان	۳۰,۷۷۰,۳۷۵	۲,۱۴۹,۶۹۰	۰/۷۰
۹ کانادا	۳۶,۰۴۸,۵۲۱	۹,۹۸۴,۶۷۰	۸/۹۲
۱۰ هند	۱,۲۷۶,۲۶۷,۰۰۰	۳,۲۸۷,۲۶۳	۹/۶۰

پوریا می‌داند که برای هر کدام از متغیرهای مربوط به کشورها؛ یعنی مساحت و جمعیت و درصد آبها، می‌تواند نموداری میله‌ای رسم کند. برای هر جفت از این متغیرها هم می‌تواند پراکنش نگاشت رسم کند (مثلاً نمودار جمعیت در مقابل مساحت)؛ اما این سؤال برایش مطرح است که آیا راهی وجود دارد تا هر سه متغیر مربوط به این کشورها را به‌طور هم‌زمان فقط در یک نمودار نشان دهد؟

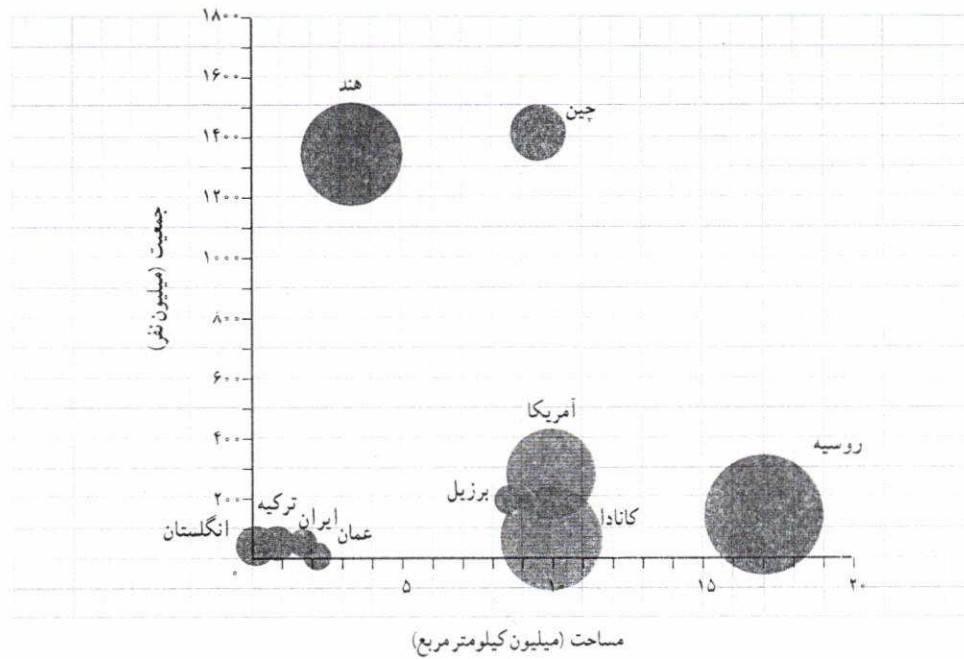
**تهیه کننده:**

**گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان**

### پراکنش نگاهت جمعیت در مقابل مساحت کشورها



پوریا همین طور که به پراکنش نگاهت جمعیت در مقابل مساحت کشورها نگاه می کرد، ناگهان به این فکر افتاد که اندازه نقطه های نمودار را متناسب با درصد آب های کشورها رسم کند. پس نموداری به شکل زیر کشید:



به این ترتیب، او موفق شد سه متغیر مربوط به کشورها را در یک نمودار، نمایش دهد. نموداری که پوریا رسم کرد، به نام نمودار حبابی معروف است.

هر نقطه یا دایره در نمودار حبابی، در واقع یک سه‌تایی مرتب به صورت  $(V_1, V_2, V_3)$  را مشخص می‌کند، که در آن داریم:

- $V_1$ : موقعیت نقطه روی محور افقی،
- $V_2$ : موقعیت نقطه روی محور عمودی،
- $V_3$ : اندازه نقطه (مساحت دایره).

نمودارهای حبابی را می‌توان گونه‌گونی خاصی از پراکنش نگاشت دانست که برای نمایش هم‌زمان سه متغیر عددی به کار می‌روند و در آنها به جای نقطه از دایره‌های توپر استفاده می‌شود.

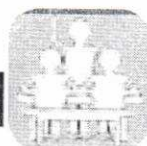
سیستم بینایی انسان به‌طور طبیعی اندازه یک دایره را بر اساس مساحت آن در نظر می‌گیرد. مساحت دایره هم بر خلاف قطر یا محیط آن، متناسب با شعاع دایره نیست؛ بلکه متناسب با توان دوم شعاع است. پس اگر شعاع دایره‌ها را دقیقاً متناسب با مقادیر متغیر سوم در نظر بگیریم، اختلاف ظاهری اندازه دایره‌ها غیر واقعی و گمراه‌کننده خواهد بود. برای برطرف کردن این مشکل باید شعاع دایره‌ها را متناسب با جذر مقادیر متغیر سوم در نظر گرفت.

توجه: متغیر سوم در نمودارهای حبابی نباید دارای مقادیر منفی یا صفر باشد.



اطلاعات اضافی درباره واحدهای آماری (علاوه بر سه متغیر اصلی) را می‌توان با استفاده از رنگ‌ها و طرح‌ها وارد نمودار حبابی کرد. مثلاً در نمودار مربوط به درصد آب‌های کشورها می‌توان قاره‌های مختلف را با رنگ‌های متفاوت دایره‌ها مشخص کرد. اگر علاوه بر آن بخواهیم زبان رسمی کشورها را هم در نمودار مشخص کنیم، چه راهی پیشنهاد می‌کنید؟

## کار در کلاس



قد و وزن و نمره درس‌های ریاضی و ادبیات فارسی دانش‌آموزان کلاس را مشابه آنچه در فعالیت دیدید، در یک جدول یادداشت کنید.

برای هر کدام از دسته‌های سه‌تایی متغیرهای زیر، نمودار حبابی رسم کنید:

- (الف) قد، وزن، نمره ریاضی
- (ب) قد، وزن، نمره ادبیات فارسی
- (پ) قد، نمره ریاضی، نمره ادبیات فارسی

سپس در هر نمودار، جای متغیرها را چنان عوض کنید؛ به طوری که دایره‌ها هر بار، نشان‌دهنده یکی از متغیرها باشند.

## تمرین



۱. مقدار متغیر سوم در نمودار حبابی، متناسب با کدام یک از موارد زیر است؟
  - (الف) شعاع دایره‌ها
  - (ب) قطر دایره‌ها
  - (پ) محیط دایره‌ها
  - (ت)  مساحت دایره‌ها
۲. نمودارهای حبابی برای نمایش چند متغیر عددی در یک نمودار به کار می‌روند؟
  - (الف) یک متغیر
  - (ب) دو متغیر
  - (پ)  سه متغیر
  - (ت) محدودیتی ندارد

**تهیه کننده:**

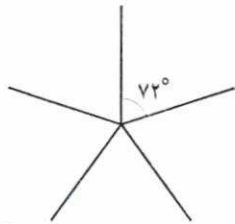
**گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان**

## فعالیت

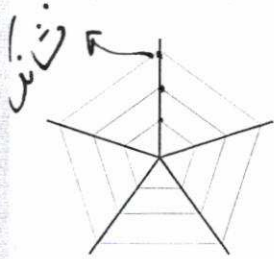


نمودار راداری، روشی برای نمایش داده‌های چندمتغیره در قالب نموداری دوبعدی است، که در آن سه متغیر کتی یا بیشتر بر روی محورهای نشان داده می‌شوند که نقطه شروع همه آنها یکی است. محل قرارگیری و زاویه محورها نسبت به یکدیگر، هیچ اطلاعات خاصی را بیان نمی‌کند.

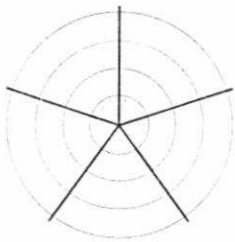
نمودار راداری از چند خط (به‌طور دقیق‌تر: نیم‌خط) به‌شکل یژه‌های چرخ دوچرخه تشکیل می‌شود که در نقطه‌ای مرکزی به یکدیگر اتصال دارند و با زاویه‌های یکسان بین هم، گرداگرد آن نقطه قرار گرفته‌اند. هر کدام از این خطوط، در واقع یک محور و نشان‌دهنده یک متغیر است؛ پس می‌توانند درجه‌بندی شوند. به این خطوط، اصطلاحاً شعاع‌های نمودار راداری می‌گویند.



اگر درجه‌بندی شعاع‌ها به‌گونه‌ای انجام گیرد که فاصله بین نشانک‌های متوالی بر روی همه شعاع‌ها یکسان باشد، می‌توان خطوط راهنمای مقادیر را هم رسم کرد؛ به‌شرطی که باعث شلوغی نمودار نشود.

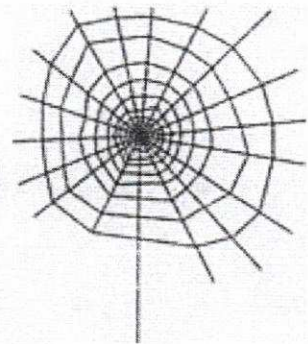


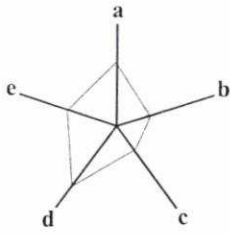
گاهی این خطوط راهنما را به‌جای راست‌خط به‌صورت خط خم و دایره رسم می‌کنند. در این حالت، نمودار واقعاً شبیه صفحه نمایش رادار می‌شود.



## خواندنی

از آنجا که نمودار راداری گاهی شبیه تار عنکبوت است، عده‌ای به آن «نمودار تار عنکبوتی» هم می‌گویند. اگر خطوط راهنما رسم نشوند، این نمودار ممکن است شبیه یک ستاره شود. به همین دلیل، آن را «نمودار ستاره‌ای» هم می‌نامند. البته نام‌های دیگری هم برای این نمودار وجود دارد.





نسبت مقدار یک متغیر، برای یک مشاهده به بیشینه آن متغیر به ازای همه مشاهددها، اندازه آن مقدار روی شعاع مربوط را مشخص می کند. این کار را برای همه متغیرها و بر روی همه شعاع ها انجام می دهیم. سپس نقاط مشخص شده روی شعاع های مجاور به ازای هر مشاهده را به هم وصل می کنیم. به این ترتیب، نمودار راداری برای یک مشاهده به دست خواهد آمد. اگر نمودار مربوط به دو یا چند مشاهده را روی هم بیندازیم، می توانیم مشاهده ها را با هم مقایسه کنیم.

نمودار راداری به ما می گوید:

- کدام مشاهده ها شبیه به یکدیگرند؟
- آیا داده دور افتاده ای وجود دارد؟

- مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به متغیرهای دیگر بیشتر یا کمتر است؟
  - مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به مشاهده های دیگر بیشتر یا کمتر است؟
- از این نمودار در ورزش برای نشان دادن میزان قدرت و ضعف بازیکنان نسبت به یکدیگر استفاده می شود.

**یادآوری:** منظور از مشاهده یا نقطه داده ای در آمار، مجموعه ای است شامل یک یا چند

مقدار اندازه گیری شده برای یک عضو جامعه ای آماری (= واحد آماری).

مثلاً اگر واحدهای آماری، دانش آموزان کلاس باشند و سن و قد و وزن و گروه خونی آنان را ثبت کنیم، مجموعه مقادیر این متغیرها برای هر کدام از دانش آموزان، یک «مشاهده» است.

♦ مثال: نامزدهای نهایی دریافت جایزه «توپ طلا» در سال ۲۰۱۳ میلادی سه بازیکن A و B و C بودند که در نهایت، جایزه به بازیکن A تعلق گرفت.

برای اینکه ببینیم آیا این انتخاب عادلانه بوده است یا نه، داده های گردآوری شده از این سه بازیکن در طول فصل ۲۰۱۳-۲۰۱۲ را بررسی می کنیم. (همه داده ها، به جز تعداد بازی، به صورت میانگین مقادیر اندازه گیری شده در طول هر ۹۰ دقیقه محاسبه شده اند.)

متغیر	A	B	C	بیشینه
تعداد بازی	۳۰/۱	۲۹/۱	۲۳/۵	۳۸
گل زده (غیر از پنالتی)	۰/۹۳	۱/۴۴	۰/۴۳	۱/۶
ضربه به سمت دروازه	۷/۷۸	۵/۶	۲/۷۷	۸
دقت ضربه (درصد)	۴۴/۶	۴۹/۱	۴۷/۷	۷۵
ضربه های گل شده (درصد)	۱۴/۵	۲۸	۱۵/۳	۴۰
پاس گل	۰/۳۳	۰/۴۱	۰/۶	۱
دریبل موفق	۱/۸۹	۴/۱۹	۵/۲	۷
پاس طلایی (مهم)	۲/۰۵	۱/۵۸	۳/۶۶	۵
پاس های موفق (درصد)	۷۶/۸	۸۵	۸۷/۸	۹۵
تک (تکل)	۰/۴۶	۰/۶۵	۱/۱۵	۶
توپ ربایی	۰/۳	۰/۳۴	۰/۸۹	۶

**تهیه کننده:**

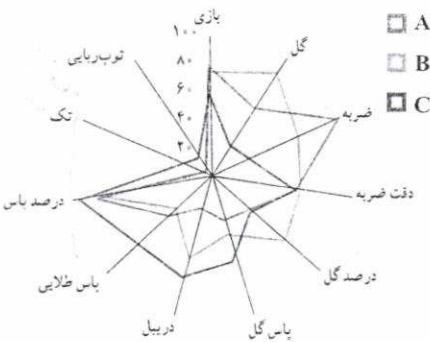
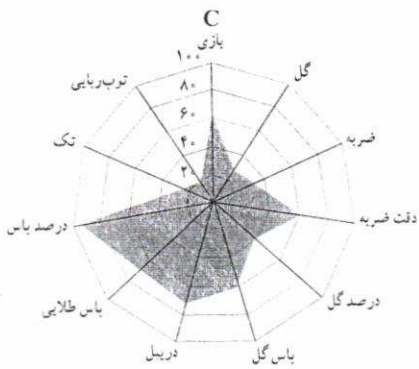
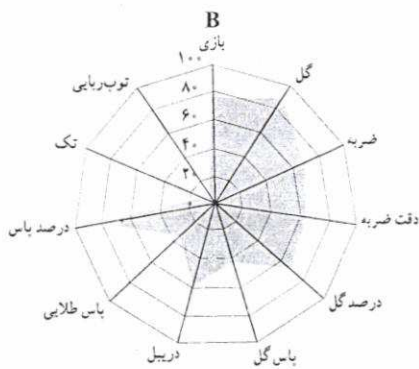
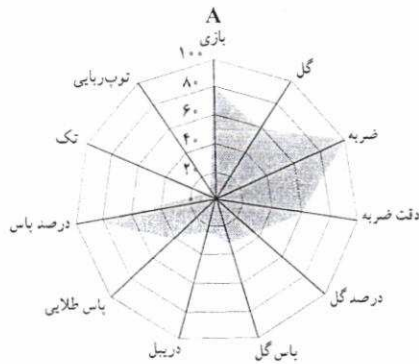
**گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان**



توپ طلای فدراسیون بین المللی فوتبال (فیفا)، جایزه ای است که هر سال توسط فیفا و مجله فرانس فوتبال به بهترین بازیکن فوتبال مرد داده می شود. انتخاب بهترین بازیکن بر اساس رأی گیری از نمایندگان رسانه های بین المللی و سرمربیان و کاپیتان های تیم های ملی فوتبال صورت می گیرد.

مشاهده = (تکامل هر ...)

از رده استادی زد  
 ۳۰ نفر از بین ۱۰۰ نفر



اکنون نمودار راداری مربوط به هر سه بازیکن را رسم می‌کنیم.

ملاحظه می‌شود که تعداد ضربه‌های بازیکن A به سمت دروازه، تقریباً به حد نهایی نمودار رسیده است. یعنی تعداد ضربه‌های او به سمت دروازه، بیشتر از هر بازیکن دیگری در جهان بوده است؛ اما از سوی دیگر، تعداد دریبل‌های موفق او به‌ویژه نسبت به دو نامزد دیگر، خیلی کم است.

تعداد گل‌های زده بازیکن B در جریان بازی، نزدیک به حد نهایی نمودار شده و از این لحاظ، او جزء برترین‌های جهان بوده است. درصد ضربه‌هایی هم که او به سمت دروازه زده و گل شده (درصد گل)، بسیار زیاد است. به‌طور کلی، ناحیه مربوط به گل زدن در نمودار B، وسعت زیادی دارد.

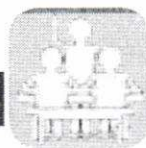
نمودار C به‌شکل جذابی کاملاً متفاوت با نمودار دو نامزد دیگر است. علت این موضوع، نقش متفاوت او در زمین است.

نمودارهای A و B شباهت زیادی به هم داشت. آنان از بزرگ‌ترین گلزنان اند؛ اما بازیکن C یک «گل‌ساز» بزرگ است. با اینکه آمار تعداد گل‌های او برای یک هافبک کناری، بسیار خوب است و درصد ضربه‌های گل شده‌اش نیز عالی است، درخشش اصلی او در آمار پاس و دریبل است. ببینید که ناحیه مربوط به پاس و دریبل در نمودارش چه وسعت زیادی دارد.

اگر داده‌های مربوط به هر سه نفر را در قالب یک نمودار رسم کنیم، شاید مقایسه بین آنان آسان‌تر شود. اکنون آیا می‌توانید بگویید که کدام بازیکن، شایستگی بیشتری برای دریافت توپ طلا سال ۲۰۱۳ میلادی داشت؟

C  
A

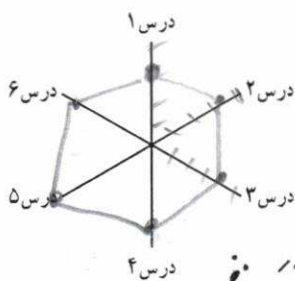
## کار در کلاس



آموزگارتان شش درس را انتخاب و برای شما به صورت زیر فهرست می کند:

- ۱- ریاضی در آمار ..... ۱۰ ..... ۲- منطق ..... ۱۶ .....  
 ۳- عربی ..... ۱۶ ..... ۴- مطالعات ..... ۱۷ .....  
 ۵- ورزش ..... ۲۰ ..... ۶- ادبیات ..... ۱۸ .....

الف) نمودار راداری نمره‌های خود را به صورت مقابل رسم کنید:



ب) نمودار خود را با یکی دیگر از دانش‌آموزان ادغام کنید و با کمک یکدیگر، نمودار جدیدی رسم کنید.

پ) به نظر شما نمره‌های کدامتان بهتر است؟ هر نمودار را در روی برگه بنویسید.

## تمرین



۱. نمودار راداری برای نمایش داده‌های چند متغیر کمتی به طور هم‌زمان به کار می‌رود؟ **۳ یا بیشتر است**  
 ۲. زاویه بین شعاع‌های مجاور در نمودار راداری، چه چیزی را نشان می‌دهد؟ **واسطه به تعداد متغیرها**  
 ۳. نمودار راداری چه چیزی به ما می‌گوید؟ **داده خاص را نشان می‌دهد**  
 ۴. کاربرد نمودار راداری در ورزش چیست؟ **قدرت و ضعف بازیکنان**  
 ۵. اگر زاویه بین دو شعاع مجاور در نمودار راداری،  $40^\circ$  درجه باشد، چند متغیر در نمودار حضور دارد؟ **۹ متغیر**  
 ۶. داده‌های زیر را که مربوط به شاخص‌های سلامت است، در قالب یک نمودار راداری نمایش دهید:

متغیر	ایران	پاکستان	ترکیه	بیشینه
$X_1$ عمر مورد انتظار در بدو تولد (سال)	۷۵/۵	۶۶/۴	۷۵/۸	۸۴
$X_2$ نسبت متخصصان سلامت (به ازای هر ۱۰ هزار نفر جمعیت)	۲۳/۰	۱۴/۰	۴۱/۱	۲۴۵
$X_3$ نسبت ولادت‌ها به وسیله متخصصان سلامت (درصد)	۹۶	۵۲	۹۷	۱۰۰
$X_4$ نسبت جمعیت دارای دسترسی به شبکه فاضلاب	۹۰	۶۴	۹۵	۱۰۰
$X_5$ شاخص آمادگی اجرای مقررات بین‌المللی سلامت	۸۵	۴۳	۷۸	۱۰۰

(داده‌ها برگرفته از گزارش آماری سازمان جهانی بهداشت، سال ۲۰۱۶ میلادی)

منابع

۱. آنتسفته (۱۳۹۵)، ترندمار و سواد آماری، خانه آمار اصفهان
۲. ج. بهرودیان (۱۳۹۳)، آمار و احتمال مقدماتی، انتشارات آستان قدس
۳. گسروه مؤلفان (۱۳۹۵)، آمار و مدل‌سازی، وزارت آموزش و پرورش

۴. C. H. Brase and C. P. Brase (2012), Under-standable Statistics, Brooks/Cole
۵. D. Griffiths (2009), Head First Statistics, O'Reilly Media
۶. S. McKillup (2004), Statistics Explained: An Introductory Guide for Life Scientists, Cambridge Univ. Press
۷. A. J. Vickers (2009), What is a p-value anyway? 34 Stories to Help You Actually Understand Statistics, Pearson
۸. Written by Volunteers (2014), Everything Maths: Grade 10 and 11 Mathematical Literacy, Siyavula

داده



جواب ۳: کدام مشاهده‌ها بیشترین تغییر را دارند - آیا داده در نمودار - مقدار کدام متغیر بزرگترین است  
 نسبت به متغیرهای دیگر بیشتر یا کمتر است. مقدار کدام متغیر نسبت به همه‌ها کوچکترین است