

آشنایی با منطق ریاضی



ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

منطق ریاضی که عده‌ای به آن منطق نمادین^۱ نیز می‌گویند؛ دستور زبان ریاضی یا مطالعه ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شود. این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند. امروزه منطق ریاضی در علوم مربوط به رایانه نیز به کار گرفته می‌شود. در این درس کار ما بسیار شبیه به بیان قواعد دستور زبان برای یک زبان معین است.

گزاره

استدلال ساده‌ی زیر را در نظر بگیرید :



تیم ملی فوتبال ایران یا تیم ملی فوتبال استرالیا به جام جهانی می‌رود.

تیم ملی فوتبال استرالیا به جام جهانی نمی‌رود.

نتیجه : تیم ملی فوتبال ایران به جام جهانی می‌رود.

این استدلال از چند جمله خبری به دست می‌آید، چنانچه

دو جمله اول این استدلال را درست در نظر بگیریم، در این صورت نتیجه‌گیری جمله سوم منطقی به نظر می‌رسد. در منطق ریاضی به دو جمله خبری نخست، مفروضات استدلال و به جمله خبری سوم، نتیجه استدلال گفته می‌شود. یک استدلال می‌تواند از چندین جمله خبری تشکیل شود که یکی از آنها نتیجه استدلال و بقیه، مفروضات استدلال هستند.

کار در کلاس

نتیجه استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

۱ هیچ عدد مرکبی، عددی اول نیست.

۴ عددی مرکب است

نتیجه : ۴ عدد اول نیست

^۱ Symbolic Logic

۲ اگر وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم باشد آن گاه مدارس تعطیل است.
فردا وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم پیش‌بینی شده است.

نتیجه: فردا مدارس تعطیل است

این استدلال‌ها، از جمله‌های خبری تشکیل شده است. به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) باشد، گزاره^۱ می‌گوییم. معمولاً گزاره‌ها را با حروف p, q, r و ... نمایش می‌دهند.
درست^۲ یا نادرست^۳ بودن یک گزاره را ارزش گزاره می‌گوییم. ارزش گزاره درست را با حرف «د» یا « T » و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» یا « F » نمایش می‌دهیم.

یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد، یعنی گزاره فقط دارای یک ارزش است. برای مثال گزاره زیر یک حدس در ریاضیات است.

«هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت»
مانند:

$$۴=۲+۲; ۶=۳+۳; ۸=۳+۵; ۱۰=۵+۵; ۱۲=۵+۷; \dots$$

این حدس تاکنون اثبات نشده است؛ از طرفی مثال نقضی هم برای آن یافت نشده است. در هر صورت این گزاره فقط دارای یک ارزش است. اگر ارزش این گزاره درست نباشد، پس ارزش آن حدس نادرست است.

خواندنی

حدس‌ها در ریاضیات به مسائل حل نشده‌ای می‌گویند که پرونده آنها در جهان علم باز است. این گونه مسائل علاوه بر اینکه درستی آنها اثبات نشده است، تاکنون مثال نقضی هم برای آنها پیدا نشده است، حدس گلدباخ نمونه‌ای از این مسائل است.

جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهنده احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند جمله‌های زیر هیچ خبری را بیان نمی‌کنند، بنابراین گزاره محسوب نمی‌شوند.

- چه هوای خوبی! (ابراز احساسات)
- لطفاً درب کلاس را ببندید. (امری)
- اینجا آشپز کیست؟ (پرسشی)

کار در کلاس

از بین جمله‌های زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید و ارزش آنها را در صورت امکان تعیین کنید.

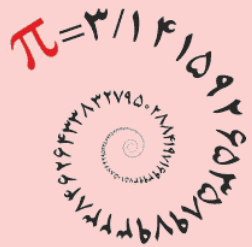
- ایران کشور آسیایی است. گزاره ای درست است
- در پرتاب یک تاس احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید برابر با $\frac{1}{۳}$ است. گزاره ای درست است

۱- Proposition

۲- Truth

۳- False

۴- حدس گلدباخ



■ ای کاش می توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم. **گزاره نیست**

■ آیا $3+2$ برابر با 5 است؟ **گزاره نیست**

■ هر عدد فرد بزرگتر از 5 را می توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت.

گزاره است ولی ارزش آن مشخص نیست

■ هر معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی متمایز است. **گزاره ای نادرست است**

■ صدمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر با 5 است. **گزاره ای نادرست است**

جدول ارزش گزاره‌ها

هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است، بنابراین هر گزاره مانند p فقط یکی از دو حالت ارزش گزاره را طبق جدول روبه‌رو می‌گیرد.

p
د
ن

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

ارزش‌های دو گزاره p و q ، طبق جدول روبه‌رو دارای 4 حالت است.

کار در کلاس

ارزش‌های سه گزاره p ، q و r ، طبق جدول روبه‌رو دارای $8=2^3$ حالت است. جاهای خالی را پر کنید.

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

– به نظر شما جدول ارزش‌های چهار گزاره، دارای چند حالت است؟ $2^4=16$ حالت دارد

– با توجه به اینکه هر گزاره می‌تواند یکی از دو ارزش «د» یا «ن» را داشته باشد و با توجه به اصل ضرب، اگر n گزاره داشته

باشیم، در این صورت جدول ارزش‌های آن گزاره‌ها دارای چند حالت است؟ 2^n حالت دارد

گزاره‌نما

فعالیت

عبارت‌های خبری زیر را در نظر بگیرید :

الف) a عددی فرد است.

ب) در پرتاپ یک تاس احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر با $\frac{1}{4}$ است.

پ) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر با ۶ است. ($3x+2y=6$)

۱ ارزش کدام یک از جملات بالا را می‌توانید تعیین کنید؟ **ارزش هیچکدام را نمی‌توان تعیین کرد**

۲ چنانچه به جای متغیر در جمله « a عددی فرد است» قرار دهیم $a=3$ در این صورت ارزش آن را تعیین کنید؟ **درست است**
اگر در آن $a=4$ قرار دهیم، در این صورت ارزش آن چیست؟ **نادرست است**

هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به کار رفته در آنها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم.

کار در کلاس

جاهای خالی را پر کنید :

اگر در جمله «ب» قرار دهیم $\{ ۱ , ۲ , ۳ \} = A$ در این صورت ارزش گزاره حاصل درست می‌شود. به نظر شما چه مجموعه‌هایی را به جای A قرار دهیم، تا اینکه ارزش گزاره حاصل درست شود.
هر زیر مجموعه‌ی سه عضوی از مجموعه‌ی اعداد ۱ تا ۶، را اگر قرار دهیم ارزش گزاره درست است.

اگر در جمله «ب» قرار دهیم $\{ ۱ \} = A$ در این صورت ارزش گزاره حاصل، نادرست است.
اگر در جمله «پ» قرار دهیم $x=۲$ و $y=۰$ در این صورت ارزش گزاره حاصل درست و در حالتی که $x=۰$ و $y=۲$ در این صورت ارزش گزاره حاصل نادرست است.

دامنه متغیر گزاره‌نما

در هر گزاره‌نما به مجموعه مقادیری که می‌توان آنها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا اینکه گزاره‌نما تبدیل به گزاره شود، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف D نمایش می‌دهند.

برای مثال، دامنه متغیر گزاره‌نمای « p عددی اول است» مجموعه اعداد طبیعی، دامنه متغیر گزاره‌نمای « x عددی زوج است» مجموعه اعداد صحیح و دامنه متغیر گزاره‌نمای « $4x^2+x-5=0$ » مجموعه اعداد حقیقی می‌توان در نظر گرفت.

در هر گزاره‌نما، به مجموعه عضوهای از دامنه متغیر که به ازای آنها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند و همواره داریم: $S \subseteq D$.

دامنه متغیر گزاره‌های زیر داده شده است. مجموعه جواب هریک از آنها را مشخص کنید.

الف) x مضرب ۷ است. $(D = \mathbb{Z})$ $S = \{0, \pm 7, \pm 14, \dots\}$

ب) $15x^2 - 7x - 8 = 0$ $(D = \mathbb{R})$ $S = \{1, -\frac{8}{15}\}$

پ) تاس را پرتاب می‌کنیم و $P(\{x\}) = \frac{1}{6}$ $(D = \{1, 2, \dots, 6\})$ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



ترکیب گزاره‌ها

فعالیت

- ۱ هریک از این جمله‌های زیر، از چند گزاره تشکیل شده است؟
- ۲ آیا می‌توانید با توجه به ارزش گزاره‌های به کار رفته در هر جمله، ارزش آن جمله را تعیین کنید.
 - عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است. دارای دو گزاره است و ارزش آن را می‌توان تعیین کرد.
 - عدد ۲ زوج است یا عدد ۵ مضرب ۳ است. دارای دو گزاره است و ارزش آن را می‌توان تعیین کرد.
 - اگر عدد ۲ زوج باشد آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است. دارای دو گزاره است و ارزش آن را می‌توان تعیین کرد.
 - چنین نیست که عدد ۲ زوج باشد. یک گزاره با ارزش نادرست است.
 - اگر عدد ۲ زوج باشد آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است و برعکس. دارای دو گزاره است و ارزش آن را می‌توان تعیین کرد.

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیلهٔ رابط‌های گزاره‌ای (ادات ربط)، گزاره‌های مرکب به دست می‌آیند. در ادامه ادات ربط را برای ترکیب گزاره‌ها معرفی می‌کنیم. با در دست داشتن ارزش گزاره‌های p ، q ، r و ... و معرفی ادات ربط، می‌توان گزاره‌های مرکب را تعریف کرد که ارزش گزاره‌های مرکب فقط به ارزش گزاره‌های p ، q ، r و ... و ادات ربط بین آنها بستگی دارد.

نقیض یک گزاره

نقیض گزاره p به صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p » می‌خوانیم. اگر ارزش گزاره p درست باشد در این صورت ارزش گزاره $\sim p$ نادرست است و وقتی که p نادرست باشد، ارزش نقیض آن درست است. به علامت « \sim » ناقض گفته می‌شود و «چنین نیست که» خوانده می‌شود.

مثال: نقیض گزاره «۲ عددی گنگ است» را می‌توان به صورت‌های زیر نوشت.

«چنین نیست که ۲ عددی گنگ باشد» یا «۲ عددی گنگ نیست.»

جدول ارزش برای نقیض یک گزاره که تمام حالت‌های ممکن را برای درستی یا

نادرستی گزاره در نظر می‌گیرد، به صورت روبه‌رو است:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

مثال : جدول ارزش گزاره $\sim(\sim p)$ را تشکیل دهید و ارزش آن را در هر حالت، با ارزش گزاره p مقایسه کنید.

حل :

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

همان طور که ملاحظه می کنید در هر حالت از جدول، ارزش p با ارزش $\sim(\sim p)$ یکسان است، در این حالت می گوئیم دو گزاره p و $\sim(\sim p)$ هم ارز منطقی هستند و می نویسیم : $\sim(\sim p) \equiv p$.
در حالت کلی اگر دو گزاره p و q هم ارزش باشند می نویسیم $p \equiv q$ و می خوانیم p هم ارز است با q .

ترکیب فصلی دو گزاره

گزاره های زیر را در نظر بگیرید.

p : $\sqrt{3}$ عددی حقیقی است.

q : ۲ عددی اول نیست.

گزاره مرکب « $\sqrt{3}$ عددی حقیقی است یا ۲ عددی اول نیست» که از ترکیب دو گزاره ساده p و q با رابط منطقی «یا» تشکیل شده است، ترکیب فصلی دو گزاره می گوئیم. هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « p یا q » را که به صورت « $p \vee q$ » می نویسند، ترکیب فصلی دو گزاره می گوئیم. در اینجا به رابط منطقی « \vee » فاصل گفته می شود. گزاره مرکب زیر را در نظر بگیرید :
«پدر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می آید یا مادر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می آید.»
اگر پدر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، در این صورت ارزش گزاره مرکب بالا درست است. چنانچه مادر علی هم برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، آن گاه ارزش گزاره مرکب درست است. در حالتی که هم پدر علی و هم مادر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیایند، ارزش گزاره مرکب درست است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

گزاره مرکب بالا وقتی نادرست است که پدر و مادر علی به مدرسه برای گرفتن کارنامه مراجعه نکنند.

بنابراین ارزش گزاره مرکب $p \vee q$ وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره p و q نادرست باشد و در بقیه حالات، ارزش $p \vee q$ درست است. جدول ارزش گزاره $p \vee q$ به صورت رویه رو است.

مثال : هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند به طوری که $a \times b = 0$ در این صورت $a = 0$ یا $b = 0$ یعنی :

$$a, b \in \mathbb{R}, a \times b = 0 \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$$

از ویژگی مثال قبل، برای حل معادله ها استفاده می کنیم :

$$x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(x + 7) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$$

ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \wedge q$ » که خوانده می‌شود « p و q » را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی « \wedge » عاطف گفته می‌شود.

فعالیت

گزاره مرکب زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید.

«سوگند فارغ‌التحصیل شد و پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.»

■ آیا ارزش این گزاره مرکب درست است؟ **ارزش آن بستگی به ارزش گزاره های تشکیل دهنده ی آن دارد.**
فرض کنید:

p : سوگند فارغ‌التحصیل شد.

q : پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.

■ چنانچه ارزش p درست و ارزش q نادرست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ **نادرست**

■ چنانچه ارزش p نادرست و ارزش q درست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ **نادرست**

■ هرگاه ارزش دو گزاره p و q نادرست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ **نادرست**

■ هرگاه ارزش دو گزاره p و q درست باشد، ارزش $p \wedge q$ چیست؟ **درست**

بنابراین ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره

p و q درست باشند و در بقیه حالات ارزش $p \wedge q$ نادرست است. جدول ارزش

$p \wedge q$ به صورت روبه‌رو است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

کار در کلاس

۱ جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
هفته هفت روز دارد.	ماه شهریور ۳۱ روز دارد.	د	د	د	د
در تیر ماه هوای آبادان سرد است.	عدد ۷ مضرب ۵ نیست	ن	د	د	ن
۲ عددی اول است	$۲+۳=۷$	د	ن	د	ن
هر ماه ۳۰ روز دارد.	$۵ < ۱$	ن	ن	ن	ن
(-۷) اول است	۹ عددی مرکب است	ن	د	د	ن

۲ با کامل کردن جدول ارزش‌ها، نشان دهید که گزاره‌های $(p \vee q) \sim$ و $(\sim p \wedge \sim q)$ هم‌ارز منطقی هستند.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

هم‌ارز هستند →

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، همهٔ حالت‌های ارزش‌های گزاره $(p \vee q) \sim$ و $(\sim p \wedge \sim q)$ یکسان هستند پس $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ به این هم‌ارزی قانون دموورگان در منطق ریاضی گفته می‌شود.

۳ با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید که $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

هم‌ارز هستند →

مثال: مقادیر x و y را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$(2x - y)^2 + (x - 1)^2 = 0$$

حل: چون $(x - 1)^2 \geq 0$ و $(2x - y)^2 \geq 0$ بنابراین تساوی بالا وقتی برقرار است که:

$$\left[(2x - y)^2 = 0 \right] \left[(x - 1)^2 = 0 \right] \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 2$$

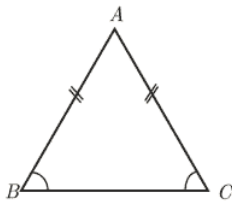
ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q » را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

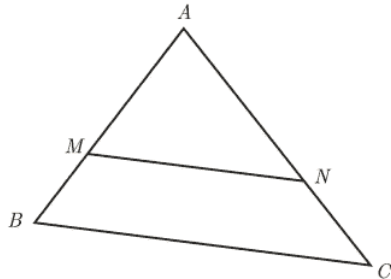
خواندنی

گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » را به صورت‌های « p شرط کافی برای q است» و « q شرط لازم برای p است» می‌خوانیم.

تا به حال در ریاضیات و هندسه با گزاره‌های شرطی بسیاری مواجه بوده‌اید، در زیر چند نمونه می‌آوریم.
۱ اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد. آن گاه دو زاویه مجاور به قاعده برابرند.



$$\triangle ABC : AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$



۲ اگر در مثلث ABC ، داشته باشیم $MN \parallel BC$ آن گاه $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$.

$$a^x \leq b^x \Rightarrow (a \leq |b|) \wedge (a \geq -|b|) \quad ۳$$

$$a^x \geq b^x \Rightarrow (a \geq |b|) \vee (a \leq -|b|) \quad ۴$$

۵ اگر A پیشامدی در فضای نمونه S باشد آن گاه $A \subseteq S$.

جدول ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت زیر است.

با توجه به جدول ملاحظه می‌کنید که:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	ن	د
ن	د	د

۱ هرگاه ارزش p نادرست باشد، آن گاه ارزش گزاره مرکب

« $p \Rightarrow q$ » همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزاره q بستگی ندارد.

در این حالت می‌گویند ارزش « $p \Rightarrow q$ » به انتفای مقدم درست است.

۲ ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ وقتی نادرست است که p درست و q نادرست

باشد.

مثال: ارزش گزاره «اگر ۲ فرد است آن گاه $2 < 5$ » به انتفای مقدم

نادرست است. ~~درست است.~~

کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی در جدول زیر؛ نشان دهید که گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ هم ارزش منطقی هستند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د
ن	د	د	د	د

۲ گزاره « $q \Rightarrow p$ » عکس ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » و گزاره « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » عکس نقیض ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » است. با توجه به جدول ارزش گزاره‌های زیر نشان دهید که « $p \Rightarrow q$ » \equiv « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » یعنی، هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

هم‌ارزند \rightarrow

۳ با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها و با پرکردن جاهای خالی نشان دهید:

(الف) « $p \Rightarrow p \vee q$ » \equiv T
 (ب) « $p \wedge q \Rightarrow p$ » \equiv T

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

هم‌ارز با T است. (ب)

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

هم‌ارز با T است. (الف)

گزاره‌هایی نظیر « $p \Rightarrow p$ » یا « $p \vee \sim p$ » را گزاره‌هایی همیشه درست و گزاره‌هایی نظیر « $p \wedge \sim p$ » را همیشه نادرست می‌نامیم.

مثال: ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 عددی فرد باشد آن‌گاه a عددی فرد است.

حل: به جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم (اثبات عکس نقیض آن ساده‌تر است).

« a^2 عددی زوج است \Rightarrow a عددی زوج است» \equiv « a عددی فرد است \Rightarrow a^2 عددی فرد است»

چنانچه a عددی زوج باشد، یعنی $a = 2k$ ، خواهیم داشت:

$$a^2 = (2k)^2 \quad 4k^2 = \underbrace{2(2k^2)}_{k' \in \mathbb{Z}} = 2k'$$

در نتیجه a^2 عددی زوج است.

ترکیب دو شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم. گزاره « $p \Leftrightarrow q$ » را به صورت زیر می‌خوانیم:

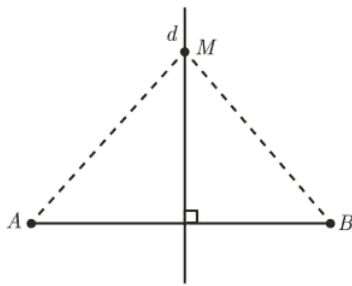
«اگر p ، آن‌گاه q و برعکس»، « p شرط لازم و کافی برای q است» و « p اگر و تنها اگر q »
مثال: گزاره‌های زیر، نمونه‌ای از ترکیب دو شرطی گزاره‌ها است.

(الف) 6 عدد اول است $\Leftrightarrow 2 > 5$

(ب) 99 عدد اول نیست $\Leftrightarrow \sqrt{2}$ عددی گویا است.

(پ) در پرتاب یک تاس شرط لازم و کافی برای آنکه احتمال پیشامدی برابر با صفر باشد، آن است که پیشامد تهی باشد.

(ت) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای واقع بر عمود منصف یک پاره خط باشد آن است که فاصله آن نقطه تا دو سر پاره خط برابر باشد.



$$[M \in d \text{ (عمود منصف پاره خط } AB)] \Leftrightarrow MA = MB$$

کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی، جدول ارزش گزاره مرکب « $p \Leftrightarrow q$ » را از جدول ارزش گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ نتیجه بگیرید.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

با توجه به اینکه $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ، جدول ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ به صورت زیر است:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

۲ با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های منطقی زیر را مانند نمونه اثبات کنید.

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

الف) قوانین جابه‌جایی

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

ب) قوانین شرکت‌پذیری

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

پ) قوانین توزیع‌پذیری

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

پاسخ این قسمت در صفحه‌ی بعد نوشته شده است.

در زیر یکی از قانون‌های توزیع‌پذیری اثبات شده است.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

چون دو ستون آخر جدول یکسان شده است، پس $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

سورها

به جملات زیر دقت کنید:

«همه دانش‌آموزان کلاس در سال گذشته قبول شده‌اند». «هر گردو، گرد است». «هر مستطیل یک مربع است». «هر مثلث متساوی‌الاضلاع یک مثلث متساوی‌الساقین است». «بعضی از تیم‌های دسته یک به دسته برتر صعود می‌کنند». «بعضی از اعداد اول، زوج هستند». «بعضی از دوزنقه‌ها، مستطیل هستند». عبارتهای «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به سوره معروف هستند. این عبارتهای می‌توانند قبل از گزاره نماها قرار گیرند و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند.



الف) قوانین جابجایی :

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
د	د	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

ب) قوانین شرکت پذیری :

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(P \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(P \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د	د	د	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	د	د	د	د	د	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د	د	د	ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	د	ن	د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	د	د	د	ن	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$$(P \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(P \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

پ) قوانین توزیع پذیری :

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	د	د	د
د	ن	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

سور کلمه‌ای عربی است و به معنای «بارو» حصار یا دیوار گرداگرد شهر است. نام‌گذاری عبارت‌های «به‌ازای هر» و «به‌ازای بعضی مقادیر» با سور به این جهت است که آنها قلمرو اعضای موضوع مورد بحث را مشخص می‌کنند. از نظر منطق‌دانان وجه تشابه سور با دیوار شهر آن است که دیوار گرداگرد شهر محدوده و قلمرو شهر را مشخص می‌کند و الفاظ به‌کار رفته در گزاره‌نماها، مرز و قلمرو اشیاء مورد استفاده در گزاره‌نماها را تعیین می‌کنند.

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به‌جای «به‌ازای هر» یا «به‌ازای بعضی مقادیر» از نماد \forall و به‌جای «وجود دارد» یا «به‌ازای بعضی مقادیر» از نماد \exists استفاده می‌کنیم. نماد \forall سور عمومی و نماد \exists سور وجودی نامیده می‌شود.

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

عبارت با زبان طبیعی	عبارت با زبان ریاضی
برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2 \geq 0$	$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0$
برای هر عدد زوج a داریم: $a = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$)	$\forall a \in E; a = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$)
وجود دارد عدد اول p بطوریکه: $p = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$)	$\exists p \in P; p = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$)
بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.	$\exists a \in O; a \in P$

در جدول فوق، مجموعه اعداد زوج را با E ، مجموعه اعداد فرد را با O و مجموعه اعداد اول را با P نمایش داده‌ایم.

گزاره نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره نما صدق کند به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

مثال: گزاره $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq x$

نا درست است، زیرا $x = \frac{1}{4}$ برای آن مثال نقض محسوب می‌شود.

مثال: کدام یک از عبارت‌های زیر درست هستند.

(ب) $\forall x \in \mathbb{R}; \tan x \times \cot x = 1$

(الف) $\forall x \in \mathbb{Z}; x(x+1) = 2k$

حل (الف) چون حاصل ضرب هر دو عدد متوالی صحیح، عددی زوج است بنابراین برای هر عضو از دامنه متغیر (\mathbb{Z}) گزاره‌نما به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود، پس این عبارت درست است.

۱- نماد \forall از حرف اول کلمه All گرفته شده است.

۲- نماد \exists از حرف اول کلمه Exist گرفته شده است.

ب) نادرست است، زیرا $x = \frac{\pi}{4}$ ، گزاره نما را به گزاره‌ای نادرست تبدیل می‌کند.

گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد.

مثال: گزاره $\exists x \in \mathbb{Z}; |x| - 1 < 0$

درست است، زیرا حداقل یک عضو $x=0$ وجود دارد که به ازای آن گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود.

مثال: کدام یک از عبارات‌های زیر درست هستند:

الف) $\exists x \in P; x = 2k$ ب) $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 + 1 = 0$

حل. الف) درست است؛ زیرا ۲ عددی اول و زوج است، پس مجموعه جواب گزاره‌نما $\{2\}$ و ناتهی است.

ب) نادرست است؛ زیرا مجموعه جواب گزاره‌نما مجموعه تهی است.

کار در کلاسی

درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد اول، فرد است. نادرست است زیرا ۲ عددی اول و زوج است.

ب) $\exists x \in \mathbb{N}; 2x^2 + 3x + 1 = 0$ نادرست است، زیرا به ازای هر $x \in \mathbb{N}$ عبارت $2x^2 + 3x + 1$ مقداری طبیعی دارد و نمی‌تواند صفر شود.

پ) $\exists x \in \mathbb{Z}; 2x^2 + 3x + 1 = 0$ درست است و مجموعه جواب آن $\{-1\}$ و ناتهی است.

ت) هر عدد زوج، غیر اول است. نادرست است زیرا ۲ عدد زوج اول است.

ث) در آمار، هر متغیر ترتیبی یک متغیر کیفی است. درست است. زیرا طبق تعریف، متغیر ترتیبی نوعی متغیر کیفی است.

ج) در احتمال؛ هر مجموعه پیشامد زیر مجموعه فضای نمونه است. طبق تعریف پیشامد، درست می‌باشد.

چ) در فضای نمونه S ، پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $P(A) > 1$. نادرست است زیرا همواره $P(A) \leq 1$ خواهد بود.

ح) طول هر پاره خط عدد حقیقی است. درست است.

نقیض گزاره‌های سوری

گزاره «علی به مدرسه رفت» را در نظر بگیرید و نقیض آن را در زیر بنویسید. "علی به مدرسه نرفت."



معمولاً برای نقیض کردن یک گزاره، فعل آن را منفی می‌کنند. اکنون گزاره

زیر را در نظر بگیرید می‌خواهیم نقیض آن را بنویسیم.

هر آسیایی، ایرانی است.

در زبان طبیعی معمولاً این اشتباه رخ می‌دهد که برای نوشتن نقیض این گزاره،

فقط فعل آن را منفی می‌کنند و می‌نویسند:

هر آسیایی، ایرانی نیست.

همان طور که ملاحظه می کنید، ارزش دو گزاره قبل نادرست است و این غیر ممکن است (چرا؟) بنابراین جمله دوم نمی تواند نقیض جمله اول باشد.

برای رفع این مشکل؛ فرض کنیم A مجموعه مردمان آسیا و ایرانی بودن x را با $P(x)$ نمایش دهیم؛ بنابراین گزاره «هر آسیایی، ایرانی است» به صورت $\forall x \in A; P(x)$ بیان می شود.

چون ارزش این گزاره « $\forall x \in A; P(x)$ » نادرست است، پس ارزش گزاره نقیض آن یعنی $\sim (\forall x \in A; P(x))$ باید درست باشد. از آنجا که ارزش گزاره $(\forall x \in A; P(x))$ نادرست است، پس وجود دارد $x \in A$ به طوری که $P(x)$ نادرست است و لذا ارزش $\sim P(x)$ درست می باشد، در نتیجه ارزش گزاره $\exists x \in A; \sim P(x)$ درست است و ارزش این گزاره با ارزش گزاره $(\forall x \in A; P(x))$ یکسان است، بنابراین داریم:

$$\sim (\forall x; P(x)) \equiv \exists x; \sim P(x)$$

در این صورت نقیض گزاره «هر آسیایی، ایرانی است» به صورت زیر است:

«بعضی از آسیایی ها، ایرانی نیستند»

به همین ترتیب می توان نقیض گزاره ای را که دارای سور وجودی است، به صورت زیر نوشت:

$$\sim (\exists x; P(x)) \equiv \forall x; \sim P(x)$$

مثال: ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید و سپس نقیض هریک را بنویسید.

$$\text{الف) } \forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0 \quad \text{ب) } \exists y \in \mathbb{R}; y < 0 \wedge y^2 \leq 1$$

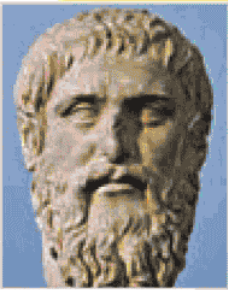
حل الف) ارزش این گزاره نادرست است، چون $x=0$ ، مثالی نقض برای آن است.

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R}; x^2 \not> 0 \equiv \exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0$$

ب) درست است، زیرا $y = -1$ در آن صدق می کند، پس مجموعه جواب آن ناتهی است.

$$\sim (\exists y \in \mathbb{R}; y < 0 \wedge y^2 \leq 1) \equiv \forall y \in \mathbb{R}; \sim (y < 0 \wedge y^2 \leq 1)$$

$$\equiv \forall y \in \mathbb{R}; y \geq 0 \vee y^2 > 1$$



۱ از جملات زیر کدام یک گزاره است و ارزش گزاره‌ها را مشخص کنید.

(الف) خیام پزشک ایرانی است. **گزاره ی نادرست**

(ب) افلاطون فیلسوف یونانی است. **گزاره ی درست**

(ج) عدد ۱۹۱۷ عددی اول است. **گزاره ی نادرست**

(د) عدد $5^9 + 8$ عددی اول است. **گزاره ی نادرست**

(ه) به امید کامیابی شما. **گزاره نیست**

(و) آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. **گزاره ی درست**

۲ در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید به طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند.

(الف) $-7 \times \boxed{1} = -7$ (ب) $5 + \boxed{0/1} \notin \mathbb{Z}$

(پ) $\frac{8 \times \boxed{1}}{4} \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\}$ (ت) $\frac{1^0 \times 9}{3} \geq 5 \times 3$

(ث) $\boxed{0} \times \sqrt{2} = 0$ (ج) $1 \in \{1\}$

(چ) $5(\boxed{7} - 3) = 20$ (ح) $7(\boxed{8} - 3) = 35$

۳ دامنه متغیر هر یک از گزاره‌نماهای زیر، مجموعه اعداد صحیح است، مجموعه جواب هر یک را بنویسید.

(الف) x مربع کامل است $S = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$

(ب) a یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است. $S = \{\dots, -9, -4, 1, 6, \dots\}$

(پ) $\frac{2x+1}{3} \leq -1 \Rightarrow S = \{-2, -3, -4, \dots\}$ (ت) $\{n(n+1) = 0 \mid n \in \mathbb{V}\}$

۴ نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

(الف) $4 \leq 3$ **$4 > 3$**

(ب) ابولوفای بوزجانی ریاضی‌دان ایرانی است. **ابولوفای بوزجانی ریاضی‌دان ایرانی نیست.**

(پ) $a \in \{b, c, d\}$ **$a \notin \{b, c, d\}$**

(ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویا است. **۲ عددی زوج نیست و عدد π گویا نیست**

(ث) خورشید به دور زمین می‌چرخد و سهندج مرکز استان کردستان است.

خورشید به دور زمین نمی‌چرخد یا سهندج مرکز استان کردستان نیست.

(ج) اگر a زوج باشد آن گاه $a+1$ فرد است.

a زوج است و $a+1$ فرد نیست

" توجه داشته باشید که $\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge (\sim q)$ "

۵ ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

(الف) $(2 < 3) \wedge (4 + 3 = 10)$ (ب) $T \vee F \equiv T$ (د) $(5 > 3) \vee (x^2 + 1 = 0)$

(پ) $(\frac{1}{p} \neq \frac{3}{p}) \vee (1 \in \{2, 3, 4\})$ (ت) اگر عدد ۴ فرد باشد آن گاه ۴ مربع کامل نیست. **$F \Rightarrow F \equiv T$**

(ث) در متوازی‌الاضلاع مفروض دو قطر با هم برابرند. **$F \vee F \equiv F$** (ج) ۲ عدد اول نیست اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است. **$F \Leftrightarrow F \equiv T$**

(ح) اگر $a \in \{b\}$ آن گاه $a=b$ و بر عکس. **$T \Rightarrow F \equiv F$** یا **$F \Leftrightarrow F \equiv T$**

(چ) $2 > 3 \Leftrightarrow -2 < -3$ **$F \Leftrightarrow F \equiv T$**

۶ جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش (p⇒q)	ارزش (p∧q)
عدد ۲ زوج است.	عدد ۲ اول است.	د	د	د	د
عدد ۳ فرد است.	۱ < ۲	د	ن	ن	ن
{۱, ۲}	عدد ۱ اول است.	د	ن	ن	ن
۲+۳=۷	عدد ۷ اول است.	ن	د	د	ن

پاسخ این قسمت در صفحه ی
بعد نوشته شده است.

۷ جدول ارزش های هر یک از گزاره های زیر را رسم کنید.

الف) $p \wedge \sim q$	ب) $\sim p \wedge p$
پ) $\sim p \vee p$	ت) $(p \vee q) \wedge \sim p$
ث) $(p \vee q) \leftrightarrow q$	ج) $\sim p \leftrightarrow \sim q$

۸ با استفاده از جدول ارزش ها نشان دهید که :

الف) $p \Rightarrow p \equiv T$	ب) $p \vee F \equiv p$
پ) $p \wedge T \equiv p$	ت) $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
ث) $p \wedge (q \vee p) \equiv p$	ج) $p \vee (q \wedge p) \equiv p$
ج) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$	ح) $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q$

۹ ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آن گاه n نیز مضرب ۳ است.

۱۰ گزاره های زیر را با استفاده از نمادهای \exists, \forall بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.

ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم $a^2 < a$.

پ) همه اعداد اول فرد هستند.

ت) وجود دارد عدد صحیح مثبتی مانند x به طوری که $1 - 2x > 5$

ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش بزرگ تر یا مساوی ۲ است.

ج) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم $x^2 = x$.

۱۱ هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x \leq 5\}$ دامنه متغیر باشد، ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\exists x \in A; x + 4 = 10$	ب) $\forall x \in A; x + 2 \leq 9$
------------------------------------	------------------------------------

پ) $\exists x \in A; x + 3 \leq 4$	ت) $\forall x \in A; x + 1 \geq 6$
------------------------------------	------------------------------------

۱۲ ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$	ب) $\forall n \in \mathbb{N}; (2^{2^n} + 1) \in P$
--	--

پ) $\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2$	ت) $\exists y \in \mathbb{R}; \frac{y - 3}{5} = 0$
--	--



ملا سعیدی @sinxcosx
09168324500

(ب)

p	$\sim p$	$\sim p \wedge p$
د	ن	ن
ن	د	ن

(۷- الف)

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن

(ت)

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \sim p$
د	د	ن	د	ن
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	ن

(پ)

p	$\sim p$	$\sim p \vee p$
د	ن	د
ن	د	د

(ج)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \leftrightarrow \sim q$
د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

(ث)

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \leftrightarrow q$
د	د	د	د
د	ن	د	ن
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

بنابراین $p \vee F \equiv p$ است.

(ب)

p	F	$p \vee F$
د	ن	د
ن	ن	ن

بنابراین $p \Rightarrow p \equiv T$ است.

(الف-۸)

p	$p \Rightarrow p$
د	د
ن	د

(ت)

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

بنابراین $p \wedge T \equiv p$ است.

(پ)

p	T	$p \wedge T$
د	د	د
ن	د	ن

بنابراین $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ است.

(ج)

p	q	$q \wedge p$	$p \vee (q \wedge p)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

بنابراین $p \vee (q \wedge p) \equiv p$ است.


(ث)

p	q	$q \vee p$	$p \wedge (q \vee p)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

بنابراین $p \wedge (q \vee p) \equiv p$ است.

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$ (ج)
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	د	ن	د	د
ن	د	ن	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	ن	د	ن	د	د

بنابراین $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ است .

@sinxcosx ملاحی

 09168324500

p	q	$\sim p$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim (p \Leftrightarrow q)$	$\sim p \Leftrightarrow q$ (ج)
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	ن	د	د
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	ن

بنابراین $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$ است .

۹- به جای اثبات این حکم ، عکس نقیض آن را ثابت می کنیم . یعنی نشان می دهیم :

برای هر عدد صحیح n اگر n مضرب ۳ نباشد آنگاه n^2 مضرب ۳ نیست .

چنانچه n مضرب ۳ نباشد ، یعنی باقیمانده تقسیم آن بر ۳ برابر ۱ یا ۲ است . به عبارت دیگر :

$$n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow n^2 = 3k' + 1 \Rightarrow n^2 \text{ مضرب ۳ نیست}$$

$$n = 3k + 2 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \Rightarrow n^2 = 3k'' + 1 \Rightarrow n^2 \text{ مضرب ۳ نیست}$$

پس در هر صورت n^2 مضرب ۳ نیست .

در نتیجه حکم سوال برقرار است .

۱۰- الف) $\forall a \in \mathbb{N}, (a \in E \vee a \in O)$ درست است زیرا اگر عدد زوج باشد، فرد نخواهد بود و اگر عددی زوج نباشد فرد خواهد بود.

در نتیجه در ترکیب فصلی یکی از گزاره ها درست و یکی نادرست است، پس در کل درست است.

ب) $\exists a \in \mathbb{W}, a^r < 0$ نادرست است زیرا هیچ عددی وجود ندارد که مربع آن منفی شود به عبارت دیگر مجموعه جواب آن تهی است.

پ) $\forall a \in P, a \in O$ نادرست است زیرا به عنوان مثال نقض، عدد ۲ اولی بوده ولی فرد نیست.

ت) $\exists x \in \mathbb{Z}^+, 1 - 2x > 5$ نادرست است زیرا $x < -2 \Rightarrow 1 - 2x > 5$ ، یعنی x منفی است و هیچ عدد مثبتی در آن صدق نمی کند.

ث) $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, x + \frac{1}{x} \geq 2$ نادرست است به عنوان نمونه $x = -1$ مثال نقض است زیرا $2 \not\geq -1 + \frac{1}{-1} = -2$.

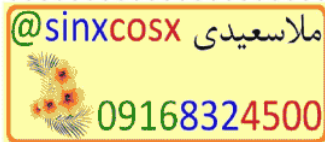
ج) $\exists x \in \mathbb{R}, x^3 = x$ درست است زیرا مجموعه جواب آن $S = \{0, \pm 1\}$ ناتهی است.

۱۱- الف) نادرست است زیرا $x + 4 = 10 \Rightarrow x = -6 \notin A$

ب) درست است زیرا $x + 2 \leq 9 \Rightarrow x \leq 7 \Rightarrow S = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A$ یعنی تمام اعضای دامنه ی تغییر جواب هستند.

پ) درست است زیرا $x + 3 \leq 4 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow S = \{1\} \neq \emptyset$

ت) نادرست است زیرا $x + 1 \geq 6 \Rightarrow x \geq 5 \Rightarrow S = \{5\} \neq A$ فقط برای یک عضو دامنه ی تغییر بر قرار است و اعدادی مثل ۱، ۲، ۳ و ۴ مثال نقض برای آن می باشند.



۱۲- الف) نادرست است زیرا برای $x = 1$ تساوی داده شده، تعریف نمی شود.

نقیض گزاره: $\exists x \in \mathbb{R}, \frac{x^2-1}{x-1} \neq x + 1$

ب) نادرست است. در حالت $n = 5$ عدد بدست آمده اول نیست، زیرا بر ۶۴۱ بخش پذیر است.

نقیض گزاره: $\exists n \in \mathbb{N}, 2^{2^n} + 1 \notin P$

پ) نادرست است به عنوان نمونه $x = -1$ مثال نقض است زیرا $2 \not\geq -1 - \frac{1}{-1} = 0$

نقیض گزاره: $\exists x \in (-\infty, 0), x - \frac{1}{x} > -2$

ت) درست است. زیرا مجموعه جواب آن $S = \{3\}$ ناتهی است.

نقیض گزاره: $\forall y \in \mathbb{R}, \frac{y-3}{5} \neq 0$