۲ مجموعه ـ زیر مجموعه

یادآوری : در سال‌های قبل با مفهوم مجموعه آشنا شده‌اید، برای مثال مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی به صورت زیر است :

$A=\{۲, ۳, ۵, ۷\}$

می‌توان این مجموعه را با نمادهای ریاضی به صورت $A=\{x \in P \mid x<۱۰\}$ نوشت که در آن P مجموعه اعداد اول است. چون عضو ۲ متعلق به مجموعه A است، می‌نویسیم $۲\in A$، از طرفی واضح است که $۶\notin A$ یعنی عضو ۶ به مجموعه A تعلق ندارد.

کار در کلاس

۱ فرض کنید $A=\{a , b\}$، درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\{a\} \in A$ نادرست زیرا در مجموعه ی A عضوی به صورت $\{a\}$ وجود ندارد

ب) $\varnothing\in A$ نادرست زیرا در مجموعه ی A عضوی به صورت $\varnothing$ وجود ندارد

پ) $\{a\} \subseteq A$ درست است زیرا $a \in A$ است .

ت) $b\subseteq A$ نادرست است زیرا b مجموعه نیست و نمی تواند زیر مجموعه باشد .

ث) $a \in A$ درست است زیرا a درون مجموعه ی A است .

ج) $\{a , b\} \subseteq A$ درست است زیرا a, b هر دو عضو مجموعه ی A هستند .

۲ کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر با تهی و کدام یک ناتهی هستند؟

الف) $\{x \in\mathbb{Z} \mid x^۲=۹ \text{ و } ۲x=۴\}$ $\quad$ $x^۲=۹ \Rightarrow x=\pm۳$ و $۲x=۴\Rightarrow x=۲$ ، بنابراین هم زمان $x=۲$ و $x=\pm۳$ نمی تواند باشد در نتیجه مجموعه تُهی است .

ب) $\{x \in\mathbb{Z} \mid x+۸=۸\}$ $\quad$ $x+۸=۸\Rightarrow x=۰$ ، بنابراین مجموعه برابر $\{۰\}$ بوده و ناتُهی است .

پ) $\{x \in\mathbb{Z} \mid x \neq x\}$ وجود ندارد عددی که با خودش برابر نباشد ، بنابراین مجموعه هیچ عضوی ندارد و تُهی است .

ت) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^۲=۷x\}$ $\quad$ $x^۲=۷x \Rightarrow x=۰ \vee x=۷ \xrightarrow{x\in\mathbb{N}} x=۷$ ، بنابراین مجموعه به صورت $\{۷\}$ بوده و ناتُهی است .

۳ مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آنها مشخص کنید.

$B=\{m\in\mathbb{Z} \mid m^۳=m\}=\{-۱,۰,۱\}$

$A=\{x \in\mathbb{Z} \mid |x|\leq۲\}=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

$D=\{a\in S \mid$ فضای نمونه پرتاب یک تاس است $S\}=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

$C=\{k\in \mathbb{R} \mid k^۲-۱=۰\}=\{-۱,۱\}$

۴ با توجه به مجموعه‌ها در قسمت ۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$B\subseteq A \longrightarrow$ درست

$A\cap D\subseteq C \xrightarrow{A\cap D=\{۱,۲\}}$ نادرست

$B\subseteq C\cup A \xrightarrow{C\cup A=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}}$ درست

$B\in A \longrightarrow$ نادرست

$B-D\subseteq A \xrightarrow{B-D=\{-۱,۰\}}$ درست

$C \not\subseteq A \longrightarrow$ نادرست

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

فعالیت

مجموعه $A=\{a , b , c\}$ را در نظر بگیرید.

۱ همهٔ زیرمجموعه‌های A را بنویسید. $\varnothing , \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a,b\} , \{a,c\} , \{b,c\} , \{a,b,c\}$

۲ با دو رقم ۰ و ۱ می‌توانیم زیرمجموعه $B=\{b , c\}$ از مجموعهٔ A را با کد سه رقمی ۰۱۱ مشخص کنیم، چون $a \notin B$ متناظر با آن کد ۰ و $c \in B$ و b متناظر با آنها کد ۱ را در نظر گرفته‌ایم. همچنین زیرمجموعه $\{a\} \subseteq A$ را با کد ۱۰۰ متناظر می‌کنیم. اکنون شما بقیه زیرمجموعه‌های A را با کدهایی سه رقمی نظیر کنید.

زیر مجموعه	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
کُد زیر مجموعه	۰۰۰	۱۰۰	۰۱۰	۰۰۱	۱۱۰	۱۰۱	۰۱۱	۱۱۱

۳ با این روش کدگذاری و به کمک اصل ضرب (سال گذشته در فصل شمارش، بدون شمردن خوانده‌اید) تعداد زیرمجموعه‌های A را تعیین کنید.

رقم اول ۲ — رقم دوم ۲ — رقم سوم ۲ $\xrightarrow{\times}$ $۲^۳ = ۸$

۴ فرض کنید $A=\{a_1 , a_2 , a_3 , a_4\}$، با روش کدگذاری با رقم‌های ۰ و ۱ و به کمک اصل ضرب تعیین کنید که A چند زیرمجموعه دارد.

رقم اول ۲ — رقم دوم ۲ — رقم سوم ۲ — رقم چهارم ۲ $\xrightarrow{\times}$ $۲^۴ = ۱۶$

۵ اگر $A=\{a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n\}$ در این صورت با این روش کدگذاری مشخص کنید که A چند زیرمجموعه دارد.

رقم اول ۲ — رقم دوم ۲ — رقم سوم ۲ ... رقم nام ۲ $\xrightarrow{\times}$ ۲^n

فرض کنید A یک مجموعه n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های A برابر با ۲^n است.

مثال : مجموعه $A=\{a , \{a\} , \varnothing\}$ را در نظر بگیرید و همهٔ زیرمجموعه‌های A را در یک مجموعه بنویسید.

$$P(A) = \{\varnothing , \{a\} , \{\{a\}\} , \{\varnothing\} , \{a,\{a\}\} , \{a,\varnothing\} , \{\{a\},\varnothing\} , \{a,\{a\},\varnothing\}\}$$

خواندنی

مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A، مجموعهٔ توانی A نامیده می‌شود و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم.

چنانچه A دارای n عضو باشد در این صورت $P(A)$ دارای ۲^n عضو است.

اگر $A \subseteq B$ به‌طوری که $A \neq B$ آن‌گاه A زیرمجموعه محض یا سرهٔ B نامیده می‌شود.

مثال : مجموعهٔ متناهی A را در نظر بگیرید، چنانچه ۲ عضو به اعضای A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۸ واحد افزایش می‌یابد، مشخص کنید A چند عضوی است.

حل : فرض کنیم A دارای n عضو باشد، پس دارای ۲^n زیرمجموعه است، چنانچه ۲ عضو به اعضای A اضافه شود، در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های A، ۴۸ واحد افزایش می‌یابد، یعنی در این حالت تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر با $۲^n+۴۸$ است.

از طرفی وقتی ۲ عضو به اعضای A اضافه می‌شود، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه جدید برابر است با $۲^{n+۲}$ است، بنابراین داریم :

$$۲^n+۴۸ = ۲^{n+۲}= ۲^n \times ۲^۲$$

$$\Rightarrow ۲^n+۴۸=۴\times ۲^n \Rightarrow ۴\times ۲^n-۲^n=۴۸$$

$$\Rightarrow ۳\times ۲^n=۴۸ \Rightarrow ۲^n=۱۶=۲^۴ \Rightarrow n=۴$$

در نتیجه مجموعه A، چهار عضوی است.

افراز یک مجموعه

فعالیت

۱ مجموعه $A=\{a , b , c\}$ را در نظر بگیرید. تمام زیرمجموعه‌های A به غیر از $\varnothing$ را بنویسید.

$\{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a,b\} , \{a,c\} , \{b,c\} , \{a,b,c\}$

۲ از بین زیرمجموعه‌های ناتهی A که در بالا نوشتید، دو زیرمجموعه چنان در نظر بگیرید که اولاً اشتراکی نداشته باشند و ثانیاً اجتماع آنها برابر با A شود. $\{c\} , \{a,b\}$

۳ همه جواب‌های ممکن برای قسمت قبل را به‌دست آورید. $\{a\} , \{b,c\}$ همچنین دو مجموعه ی $\{b\} , \{a,c\}$

۴ آیا می‌توان سه زیرمجموعه در قسمت ۱ چنان یافت که اشتراک دوبه‌دوی آنها تهی باشد و اجتماع آنها برابر با A شود؟

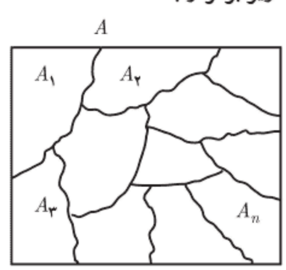
بله $\{a\} , \{b\} , \{c\}$

فرض کنیم $A\neq\varnothing$ یک مجموعه و $A_۱ , A_۲ , \dots , A_n$ زیر مجموعه‌های A باشند. مجموعه A به n زیرمجموعه $A_۱ , A_۲ , \dots , A_n$ افراز شده است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.

I) $\forall\, ۱ \leq i \leq n ; A_i \neq \varnothing$

II) $\forall i, j\ (i\neq j ; A_i \cap A_j = \varnothing)$

III) $A_۱ \cup A_۲ \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A$



کار در کلاس

مجموعهٔ $A=\{۱, ۲, ۳, \dots, ۹\}$ را در نظر بگیرید، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای A محسوب می‌شود؟

۱ $\{۱, ۳, ۵\}$ و $\{۲, ۶\}$ و $\{۴, ۸, ۹\}$ افراز نیست زیرا ۷ درون هیچکدام قرار ندارد یعنی اجتماع آنها A نخواهد شد.

۲ $\{۱, ۳, ۵\}$ و $\{۲, ۴, ۶, ۸\}$ و $\{۵, ۷, ۹\}$ افراز نیست زیرا عدد ۵ به عنوان عضو مشترک می باشد و در افراز نباید عضو مشترک وجود داشته باشد.

۳ $\{۱, ۳, ۵\}$ و $\{۲, ۴, ۶, ۸\}$ و $\{۷, ۹\}$ شرایط افراز برقرار است بنابراین افراز می باشد.

تعریف زیر مجموعه به کمک نمادهای ریاضی

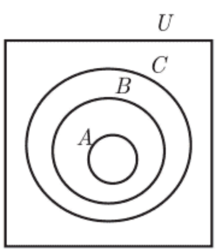
فرض کنید A و B دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو A، عضوی از B باشد در این صورت A را زیرمجموعهٔ B نامیده و می‌نویسند $A\subseteq B$. چنانچه عضوی در A وجود داشته باشد به طوری که آن عضو در مجموعهٔ B نباشد در این صورت A زیرمجموعه B نیست و می‌نویسند $A \nsubseteq B$. با استفاده از نمادهای ریاضی می‌توان تعریف‌های $A\subseteq B$ و $A \nsubseteq B$ را به صورت زیر نوشت :

$$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x\ ;\ (x\in A \Rightarrow x\in B)$$

$$A\nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\ ;\ (x\in A \wedge x\notin B)$$

روش عضوگیری دلخواه

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A\subseteq B$ و اعضای مجموعه‌های A و B در دسترس نباشند، کافی است عضوی دلخواه مانند x از A فرض کرده، سپس با استفاده از فرض‌های داده شده نشان دهیم که x در B وجود دارد. از آنجا که x دلخواه بوده است در واقع هر عضو A در B است بنابراین با توجه به تعریف زیرمجموعه، ثابت کرده‌ایم $A\subseteq B$. در زیر چند ویژگی مهم در مجموعه‌ها با روش عضوگیری دلخواه ثابت شده است.



ویژگی ۱ــ فرض کنید A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند به طوری که $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ ثابت کنید $A\subseteq C$.

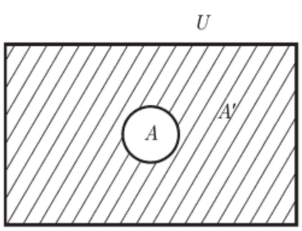
اثبات : برای اثبات $A\subseteq C$، باید ثابت کنیم که : $\forall x\ ;\ (x\in A \Rightarrow x\in C)$

برای این منظور از فرض‌ها یعنی $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ استفاده می‌کنیم.

$$\forall x\ ;\ x\in A \overset{A\subseteq B}{\Rightarrow} x\in B \overset{B\subseteq C}{\Rightarrow} x\in C$$

در نتیجه داریم :

$$\forall x\ ;\ (x\in A \Rightarrow x\in C) \Rightarrow A\subseteq C$$



ویژگی ۲ــ فرض کنید A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A\subseteq B$، ثابت کنید $B'\subseteq A'$. (A' و B' به ترتیب متمم‌های مجموعه‌های A و B هستند).

قبل از اثبات این ویژگی، تعریف متمم یک مجموعه را یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم A مجموعه‌ای با مرجع U باشد، متمم مجموعه A برابر با مجموعهٔ اعضایی از U است که متعلق به مجموعه A نباشند و آن را با A' نمایش می‌دهند.

$$A' = \{x\in U \mid x\notin A\}$$

از این تعریف نتیجه می‌گیریم که اگر $x\in A$ آن‌گاه $x\notin A'$ یا اگر $x\in A'$ آن‌گاه $x\notin A$.

اثبات : برای اینکه ثابت کنیم $B'\subseteq A'$ باید نشان دهیم که : $\forall x\ ;\ (x\in B' \Rightarrow x\in A')$ بنابراین داریم :

$$\forall x\ ;\ (x\in B' \Rightarrow x\notin B \overset{A\subseteq B}{\Rightarrow} x\notin A \Rightarrow x\in A')$$

در نتیجه داریم :

$$\forall x\ ;\ (x\in B' \Rightarrow x\in A') \Rightarrow B'\subseteq A'$$

ویژگی ۳ــ برای هر مجموعه دلخواه مانند A با مجموعه مرجع U ثابت کنید : $\varnothing\subseteq A$.

اثبات : برای اثبات $\varnothing\subseteq A$ باید نشان دهیم که ارزش گزاره شرطی $\forall x\,;\,(x\in\varnothing \Rightarrow x\in A)$ همواره درست است. چون در این گزاره شرطی ارزش مقدم یعنی $x\in\varnothing$ نادرست است، پس به انتفای مقدم ارزش گزاره شرطی درست است و در نتیجه $\varnothing\subseteq A$.

کار در کلاس

۱ برای مجموعه‌های A و B با مرجع U ثابت کنید که $A\subseteq A\cup B$.

اثبات :

$$\forall x;\,(x\in A\Rightarrow x\in A \vee x\in B)\Rightarrow x\in A\cup B$$

بنابراین داریم :
$$\forall x;(x\in A\Rightarrow x\in A\cup B)\Rightarrow A\subseteq A\cup B$$

درستی استدلال بالا را توضیح دهید. اولاً گزاره ی $x\in B$ می تواند درست یا نادرست باشد ولی با توجه به درستیِ گزاره ی $x\in A$ ترکیب فصلی آنها یعنی $x\in A \vee x\in B$ درست می باشد . ثانیاً در اثبات نشان داده شده که هر عضو درون A عضوی از $A\cup B$ است .
در نتیجه $A\subseteq A\cup B$ خواهد بود .

۲ فرض کنیم A و B و C و D چهار مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آن‌گاه $A\cup C\subseteq B\cup D$.

اثبات : جاهای خالی را پر کنید :

$$\forall x;[x\in(A\cup C)]\Rightarrow\begin{cases}x\in A\Rightarrow x\in B\ (\text{زیرا } A\subseteq B)\\ \vee \qquad\qquad\qquad \vee\\ x\in C\Rightarrow x\in D\ (\text{زیرا } C\subseteq D)\end{cases}\Rightarrow x\in B\ \vee\ x\in D\Rightarrow x\in B\cup D$$

بنابراین داریم :
$$\forall x;\,[x\in(A\cup C)\Rightarrow x\in(B\cup D)]\Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup D$$

۳ فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند ثابت کنید اگر $A\subseteq C$ و $B\subseteq C$ آن‌گاه $(A\cup B)\subseteq C$.

راهنمایی : از ویژگی قسمت ۲ استفاده کنید.

$$\left.\begin{matrix}A\subseteq C\\ B\subseteq C\end{matrix}\right\}\Rightarrow A\cup B\subseteq C\cup C\Rightarrow A\cup B\subseteq C$$

دو مجموعه مساوی

فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند به طوری که هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B عضوی از A باشد؛ یعنی $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$، در این صورت A با B مساوی است و می‌نویسیم $A=B$. به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت : $A=B\Leftrightarrow[(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)]$

کار در کلاس

فرض کنید $A=\{۱, ۲\}$، کدام یک از مجموعه‌های زیر با A مساوی است؟ (با ذکر دلیل).

الف) $\{x\in\mathbb{Q}\mid x^۲-۳x+۲=۰\}$ مساوی A است زیرا: $x^۲-۳x+۲=۰\Rightarrow x=۱\ \vee\ x=۲\Rightarrow\{۱,۲\}$

ب) $\{x\in\mathbb{R}\mid ۱\le x\le ۲\}$ مساوی A نیست زیرا این مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی از ۱ تا ۲ می باشد و بی شمار عضو دارد .

پ) $\{x\in\mathbb{Q}\mid ۲x^۲+۳x+۱=۰\}$ مساوی A نیست زیرا: $۲x^۲+۳x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\vee x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\left\{-۱,-\frac{۱}{۲}\right\}$

ت) $\{x\in\mathbb{N}\mid ۱\le x\le ۲\}$ مساوی A است زیرا این مجموعه شامل اعداد طبیعی از ۱ تا ۲ می باشد که خود اعداد ۱و۲ خواهد بود .

مثال : فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید $A\cap B=B\cap A$. (خاصیت جابه‌جایی اشتراک).

اثبات : برای اثبات حکم باید درستی دو رابطهٔ زیر را نشان دهیم :

$$A\cap B\subseteq B\cap A \quad (۱) \;;\quad B\cap A\subseteq A\cap B \qquad (۲)$$

اثبات (۱) :

(طبق خاصیت جابه‌جایی $\wedge$)
$$\forall x;\ [x\in(A\cap B)\Rightarrow x\in A\wedge x\in B\Rightarrow x\in B\wedge x\in A$$
$$\Rightarrow x\in B\cap A]$$

به روش مشابه می‌توان درستی رابطه (۲) را نشان داد.

مثال : فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند؛ ثابت کنید که اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه $A-B=\varnothing$.

اثبات :

(زیرا $A\subseteq B$)
$$A-B=\{x\in U\mid x\in A\wedge x\notin B\}=\{x\in U\mid x\in B\wedge x\notin B\}=\varnothing$$
$$\Rightarrow A-B=\varnothing$$

تمرین

۱ مجموعه‌های زیر را که شامل شکل‌های هندسی در صفحه هستند، در نظر بگیرید :

$C=\{x\mid$ یک لوزی است $x\}$ $\qquad$ $A=\{x\mid$ یک چهارضلعی است $x\}$

$D=\{x\mid$ یک مربع است $x\}$ $\qquad$ $B=\{x\mid$ یک مستطیل است $x\}$

کدام یک از روابط زیر درست است؟(با ذکر دلیل)

الف) $D\subseteq C$ درست ، زیرا مربع نوع خاصی از لوزی است که زوایای داخلی آن قائمه باشد .

ب) $B\subseteq D$ نادرست ، زیرا نمی توان ادعا کرد تمام مستطیل ها مربعند .

پ) $A\subseteq B$ نادرست ، زیرا نمی توان ادعا کرد که همه ی چهار ضلعی ها مستطیلند . ممکن است ذوزنقه یا ... باشند .

ت) $D\subseteq A$ درست ، زیرا مربعی نوعی چهار ضلعی است .

۲ فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,\ldots,۸,۹\}$ و $B=\{۲,۴,۶,۸\}$ و $C=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ و $D=\{۳,۴,۵\}$ و $E=\{۳,۵\}$.

در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید، X می‌تواند کدام یک از این مجموعه‌ها باشد؟

الف) X و B عضو مشترکی ندارند. $X=C$ یا $X=E$

ب) $X\subseteq A$ ولی $X\not\subseteq C$ $\quad$ $X=A$ یا $X=B$ یا $X=D$

پ) $X\subseteq D$ ولی $X\not\subseteq B$ $\quad$ $X=D$ یا $X=E$

ت) $X\subseteq C$ ولی $X\not\subseteq A$ $\quad$ چنین مجموعه ای وجود ندارد .

۳ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\{\varnothing\}=\varnothing$ نادرست ، زیرا $\{\varnothing\}$ مجموعه ای یک عضوی است ولی $\varnothing$ عضو ندارد .

ب) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$ درست ، زیرا $\varnothing$ زیر مجموعه ی همه ی مجموعه هاست .

پ) $\varnothing\notin\{\varnothing\}$ نادرست ، زیرا $\varnothing$ دقیقاً به عنوان یک عضو درون مجموعه وجود دارد .

ت) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$ درست ، زیرا مجموعه ی $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ دقیقاً به عنوان یک عضو درون مجموعه است .

۴ کدام یک از مجموعه‌های زیر باهم مساوی‌اند؟

$$B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^۳=x\}=\{-۱,۰,۱\}$$

$$A=\{m\in\mathbb{Z}\mid |m|<۲\}=\{-۱,۰,۱\}$$

$$D=\{m\in\mathbb{Z}\mid m^۲\leq ۱\}=\{-۱,۰,۱\}$$

$$C=\{y\in\mathbb{Z}\mid y^۲\leq ۲y\}=\{۰,۱,۲\}$$

$$E=\{m\in\mathbb{Z}\mid m^۳+۲m=۳m^۲\}=\{۰,۱,۲\}$$

بنابراین نتیجه می شود که : $A=B=D$ و $C=E$

۵ مثال‌هایی از مجموعه‌های دلخواه A و B و C بیاورید که برای آنها حکم‌های زیر درست باشند.

الف) $A\in B$ و $B\in C$ و $A\notin C$ $\Rightarrow A=\{۱\}$ و $B=\{\{۱\},۱\}$ و $C=\{\{\{۱\},۱\},۲\}$

ب) $A\in B$ و $B\in C$ و $A\in C$ $\Rightarrow A=\{۱\}$ و $B=\{\{۱\},۱\}$ و $C=\{\{\{۱\},۱\},\{۱\}\}$

پ) $A\in B$ و $A\subseteq B$ $\Rightarrow A=\{۱\}$ و $B=\{\{۱\},۱\}$

۶ اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود، مجموعه A چند زیرمجموعه دارد؟

گیریم مجموعه ی A دارای n عضو باشد در نتیجه $۲^{n-۲}=۲^n-۳۸۴$ ، بنابراین به حل این معادله می پردازیم :

$۲^n-۳۸۴=۲^n\times\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۲^n-۲^n\times\frac{۱}{۴}=۳۸۴\Rightarrow\frac{۳}{۴}۲^n=۳۸۴\xrightarrow[\div ۳]{\times ۴}۲^n=۵۱۲=۲^۹\Rightarrow n=۹\rightarrow$ مجموعه دارای ۹ عضو است.

۷ اگر $A=\{۲,x+۲y,۴\}$ و $B=\{۴,۵,x-y\}$ و $A=B$ در این صورت مقادیر x و y را بیابید.

$$\begin{cases}x-y=۲\\x+۲y=۵\end{cases}\Rightarrow x=۳,y=۱$$

۸ ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B با مرجع U داریم : $A-B\subseteq A$.

$$\forall x:[x\in A-B]\Rightarrow x\in A\wedge x\notin B\Rightarrow x\in A$$

بنابراین : $A-B\subseteq A$

۹ فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه :

الف) $A\cup C\subseteq B\cup C$ اثبات : $\left.\begin{matrix}A\subseteq B\\C\subseteq C\end{matrix}\right\}\Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup C$

ب) $A\cap C\subseteq B\cap C$ اثبات : $\forall x,\ x\in A\cap C\Rightarrow x\in A\wedge x\in C\xrightarrow{A\subseteq B}x\in B\wedge x\in C\Rightarrow x\in B\cap C$

بنابراین : $A\cap C\subseteq B\cap C$

۱۰ مجموعه‌های A و B و C و D با مرجع U را در نظر بگیرید، ثابت کنید اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آن‌گاه :

الف) $A\cap C\subseteq B\cap D$ اثبات : $\forall x,\ x\in A\cap C\Rightarrow x\in A\wedge x\in C\xrightarrow[C\subseteq D]{A\subseteq B}x\in B\wedge x\in D\Rightarrow x\in B\cap D$

بنابراین : $A\cap C\subseteq B\cap D$

ب) $A\cap C\subseteq B\cup D$ اثبات : $\forall x,\ x\in A\cap C\Rightarrow x\in A\wedge x\in C\xrightarrow[C\subseteq D]{A\subseteq B}x\in B\wedge x\in D\overset{?}{\Rightarrow}x\in B\vee x\in D$

$\Rightarrow x\in B\cup D\rightarrow$ بنابراین حکم برقرار است.

? توجه داشته باشید که : اگر $p\wedge q$ درست باشد ، آنگاه p درست و q نیز درست خواهد بود در نتیجه $p\vee q$ درست است . بنابراین از $p\wedge q$ می توان $p\vee q$ را نتیجه گرفت.

۱۱ الف) فرض کنید $A\subseteq\varnothing$ ثابت کنید $A=\varnothing$. ب) فرض کنید $U\subseteq A$ ثابت کنید $A=U$.

اثبات الف) می دانیم تُهی زیر مجموعه ی هر مجموعه است بنابراین : $\varnothing\subseteq A\wedge A\subseteq\varnothing\Rightarrow A=\varnothing$

اثبات ب) می دانیم هر مجموعه زیر مجموعه ی مرجع است بنابراین : $A\subseteq U\wedge U\subseteq A\Rightarrow A=U$

۱۲ هرگاه A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A\cap B=\varnothing$ در این صورت ثابت کنید :

الف) $B-A=B$ اثبات :

$$\left.\begin{matrix}\forall x,x\in B-A\Rightarrow x\in B\wedge x\notin A\Rightarrow x\in B\rightarrow B-A\subseteq B\\ \forall x,x\in B\xrightarrow{A\cap B=\varnothing}x\in B\wedge x\notin A\Rightarrow x\in B-A\rightarrow B\subseteq B-A\end{matrix}\right\}\Rightarrow B-A=B$$

ب) $A-B=A$ برای اثبات مشابه قسمت الف عمل می کنیم . البته می توان گفت که : این ادعا همان ادعای قسمت الف می باشد و فقط بازی با حروف صورت گرفته است .

۱۳ فرض کنید $X=\{a,b,c,d,e,f,g\}$، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای X محسوب می‌شود.

الف) $\{d,g\}$ و $\{b\}$ و $\{a,c,e\}$ افراز نمی باشد زیرا اجتماع آنها مساوی مجموعه ی X نیست .

ب) $\{b,e,f\}$ و $\{c,d\}$ و $\{a,e,g\}$ افراز نمی باشند زیرا دارای عضو مشترک هستند .

پ) $\{d,f\}$ و $\{c\}$ و $\{a,b,e,g\}$ افراز است .

ت) $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ افراز است .

ث) $\{e\}$ و $\{f,g\}$ و $\{d\}$ و $\{b,c\}$ و $\{a\}$ افراز است .