۳ قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)

در این درس می‌خواهیم قوانین و خواص مربوط به اعمال اجتماع و اشتراک را بررسی کنیم، شما در اعداد حقیقی و برای دو عمل جمع (+) و ضرب (×) قوانینی چون جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیریِ ضرب نسبت به جمع را می‌شناسید یعنی می‌دانیم :

خاصیت جابه‌جایی $\mathrm{I})\forall\ a,b\in\mathbb{R}\ ;\ a+b=b+a$

خاصیت شرکت‌پذیری $\mathrm{II})\forall\ a,b,c\in\mathbb{R}\ ;\begin{cases} a+(b+c)=(a+b)+c \\ a\times(b\times c)=(a\times b)\times c\end{cases}$

خاصیت توزیع‌پذیری × نسبت به + $\mathrm{III})\forall\ a,b,c\in\mathbb{R}\ ;\ a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$

توجه دارید که عمل + نسبت به عمل × توزیع‌پذیر نیست، (با ذکر یک مثال نقض این مطلب را نشان دهید).

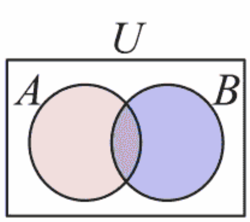
$$\left.\begin{array}{l} ۲+(۳\times ۵)=۲+۱۵=۱۷ \\ (۲+۳)\times(۲+۵)=۵\times ۷=۳۵\end{array}\right\}\Rightarrow ۲+(۳\times ۵)\neq(۲+۳)\times(۲+۵)$$

در مجموعه‌ها دو عمل $\cup$ و $\cap$ خواصی مشابه خواص فوق داشته و این خواص با توجه به خواصی که در گزاره‌ها برای دو ترکیب (۷) و (۸) بیان شد قابل بررسی و اثبات می‌باشند. در فعالیت زیر ابتدا توسط نمودار ون برقراری این خواص را مشاهده می‌کنید.

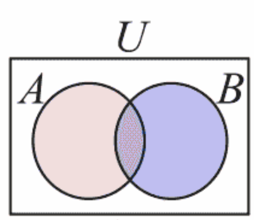
فعالیت

۱ در هر یک از حالت‌های زیر مجموعه‌های خواسته شده را هاشور بزنید. (برای هاشور زدن مانند حالت (~~د~~ ت) از دو رنگ استفاده کنید).

الف)

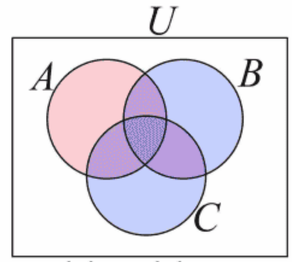


$A\cup B$

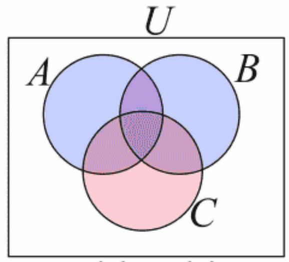


$B\cup A$

ب)

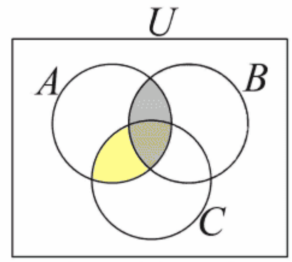


$A \cup (B \cup C)$

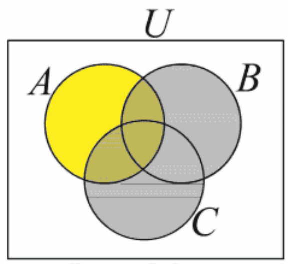


$(A \cup B) \cup C$

پ)

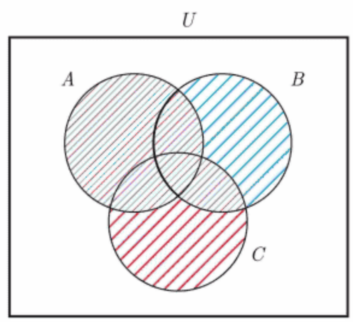


$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

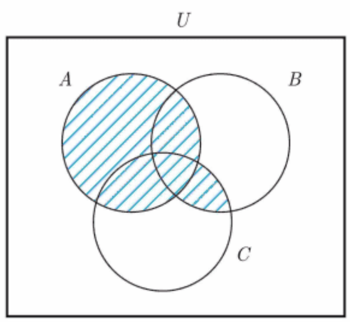


$A \cap (B \cup C)$

ت)



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$



$A \cup (B \cap C)$

۲ با فرض اینکه $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ و $C=\{۱,۲,۵,۶\}$ در این صورت درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A \cap B = B \cap A$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B = \{۳\} \\ B \cap A = \{۳\} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap B = B \cap A$$

ب) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap (B \cap C) = \{۱,۲,۳\} \cap \{۵\} = \varnothing \\ (A \cap B) \cap C = \{۳\} \cap \{۱,۲,۵,۶\} = \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

پ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap (B \cup C) = \{۱,۲,۳\} \cap \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} = \{۱,۲,۳\} \\ (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{۳\} \cup \{۱,۲\} = \{۱,۲,۳\} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

یادآوری : برای اثبات تساوی بین دو مجموعه A و B می‌بایست ثابت کنیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

کار در کلاس

با توجه به تعریف اعمال اجتماع و اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری دو ترکیب فصلی و عطفی می‌خواهیم این خواص یا قوانین را برای $\cup$ و $\cap$ اثبات کنیم، شما این اثبات‌ها را کامل کنید :

۱ ثابت کنید، برای هر دو مجموعهٔ دلخواه A و B از مجموعهٔ مرجع U، داریم : $A\cup B=B\cup A$

$A\cup B=\{x\in U \mid x\in A \vee x\in B\}$	تعریف اجتماع
$=\{x\in U \mid x\in B \vee x\in A\}$	جابه‌جایی $\vee$
$=B\cup A$	تعریف اجتماع

۲ ثابت کنید، برای سه مجموعهٔ دلخواه A، B، C از مجموعهٔ مرجع U، داریم :

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cup(B\cup C)=\{x\in U \mid x\in A \vee x\in(B\cup C)\}$	تعریف اجتماع
$=\{x\in U \mid x\in A \vee (x\in B \vee x\in C)\}$	تعریف اجتماع
$=\{x\in U \mid (x\in A \vee x\in B) \vee x\in C\}$	شرکت‌پذیری $\vee$
$=\{x\in U \mid x\in(A\cup B) \vee x\in C\}$	تعریف اجتماع
$=(A\cup B)\cup C$	تعریف اجتماع

۳ با استفاده از روش عضوگیری دلخواه خاصیت توزیع‌پذیری $\cup$ نسبت به $\cap$ را ثابت کنید.

یعنی ثابت کنید : $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

[فرض کنیم $x\in[A\cup(B\cap C)]$

$[x\in A \vee (x\in B\cap C)]$	تعریف اجتماع
$[(x\in A \vee (x\in B \wedge x\in C))]$	تعریف اشتراک
$[x\in A \vee x\in B) \wedge (x\in A \vee x\in C)]$	توزیع‌پذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$
$[x\in A\cup B \wedge x\in A\cup C]$	تعریف $\cup$
$x\in[(A\cup B)\cap A\cup C]$	تعریف اشتراک

$\Rightarrow A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$

و به همین ترتیب ثابت می‌شود $(A\cup B)\cap\overset{(A\cup C)}{\cancel{(B\cup C)}}\subseteq A\cup(B\cap C)$ بنابراین دو مجموعه با هم برابرند. (توجه داریم که از طرف دیگر، خاصیت توزیع‌پذیری اصطلاحاً همان فاکتورگیری است یعنی رسیدن از سمت راست تساوی به سمت چپ تساوی به معنی فاکتورگیری از $A\cup$ است.)

تذکر : با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه‌های مرجع و تهی تساوی‌های زیر برقرارند :

۱) $A\cup A'=U$ ۲) $A\cap A'=\varnothing$

۳) $A\cup U=U$ ۴) $A\cap U=A$

مثال ۱ : با استفاده از خواص فوق ثابت کنید : (U مجموعهٔ مرجع فرض شده است.)

الف) $(A\cup B)\cap(B'\cup A)=A$ ب) $(C\cap A)\cup(A'\cap C)=C$

پ) $A\cup(B\cup A')=U$ ت) $A-B=A\cap B'$

الف) $(A\cup B)\cap(B'\cup A)$ جابه‌جایی

$=(A\cup B)\cap(A\cup B')$

$=A\cup(B\cap B')$ فاکتورگیری (عکس خاصیت توزیع‌پذیری)

$=A\cup\varnothing$

$=A$

ب) $(C\cap A)\cup(A'\cap C)=(C\cap A)\cup(C\cap A')$ جابه‌جایی

$=C\cap(A\cup A')=C\cap U=C$ فاکتورگیری

پ) $A\cup(B\cup A')=A\cup(A'\cup B)$ جابه‌جایی

$=(A\cup A')\cup B=U\cup B=U$ شرکت‌پذیری

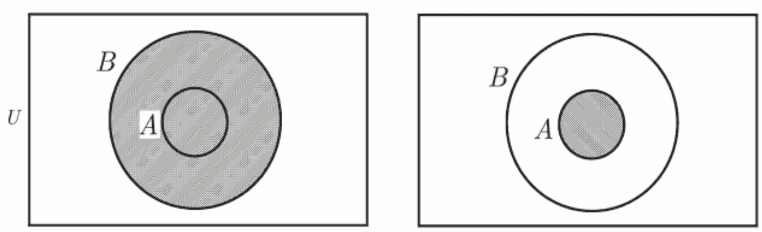
ت) $A-B=\{x\in U|x\in A\wedge x\notin B\}=\{x\in U|x\in A\wedge x\in B'\}$ تعریف متمم

$=A\cap B'$ تعریف اشتراک

قضیه : برای هر دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U داریم :

الف) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$ ب) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$

برهان :قبل از اثبات دقیق، ابتدا در نمودارهای زیر $(A\cup B)$ و $(A\cap B)$ را هاشور بزنید.



$(A\cup B)$ $(A\cap B)$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید هر یک از حالت‌های الف و ب، قضیه‌هایی دو شرطی بوده و برای اثبات هر یک از آنها باید دو قضیهٔ شرطی را ثابت کنیم.

الف) فرض کنیم $A\subseteq B$ و ثابت می‌کنیم $A\cup B=B$ برای این منظور باید ثابت کنیم $(A\cup B)\subseteq B$ و $B\subseteq(A\cup B)$، رابطهٔ $B\subseteq(A\cup B)$ (۱) با توجه به تعریف اجتماع بدیهی است؛ بنابراین به اثبات رابطه $(A\cup B)\subseteq B$ می‌پردازیم :

می‌دانیم: $B\subseteq B$

طبق فرض: $A\subseteq B$

$\Rightarrow (A\cup B)\subseteq(B\cup B)\Rightarrow(A\cup B)\subseteq B$ (۲)

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی $A\cup B=B$ اثبات شده و حکم به دست می‌آید.)

$(A\cup B)=B \Leftarrow (۲)$ و (۱)

حال فرض کنیم $A\cup B=B$، ثابت می‌کنیم $A\subseteq B$:

با توجه به تعریف اجتماع می‌دانیم: $A\subseteq(A\cup B)\xRightarrow[\text{فرض}]{A\cup B=B} A\subseteq B$

ب) ابتدا فرض کنیم $A\subseteq B$، تساوی $A\cap B=A$ را اثبات می‌کنیم:

(۱) با توجه به تعریف اشتراک داریم: $(A\cap B)\subseteq A$

(۲) می‌دانیم: $A\subseteq A$ ، طبق فرض: $A\subseteq B$ $\Rightarrow (A\cap A)\subseteq(A\cap B)\Rightarrow A\subseteq(A\cap B)$

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی $A\cap B=A$، به‌دست می‌آید.)

$(A\cap B)=A \Leftarrow (۲)$ و (۱)

حال فرض می‌کنیم $A\cap B=A$، ثابت می‌کنیم $A\subseteq B$:

با توجه به تعریف اشتراک می‌دانیم: $(A\cap B)\subseteq B\xRightarrow[\text{فرض}]{A\cap B=A} A\subseteq B$

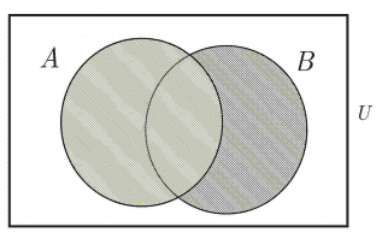
کار در کلاس

(قوانین جذب یا هم‌پوشانی) اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U باشند می‌خواهیم تساوی‌های زیر، که به قوانین جذب معروف‌اند را با استفاده از قضیهٔ قبل و تعاریف اجتماع و اشتراک اثبات کنیم:

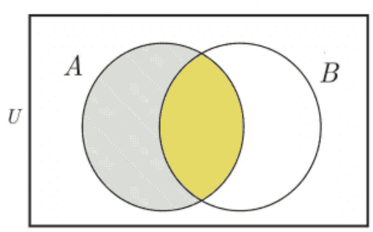
الف) $A\cup(A\cap B)=A$

ب) $A\cap(A\cup B)=A$

ابتدا با استفاده از نمودار وِن و هاشور زدن، درستی قوانین جذب را نشان دهید:



$A\cap(A\cup B)$



$A\cup(A\cap B)$

در قضیهٔ قبل ملاحظه کردید که اگر $C\subseteq D$ در این صورت $(C\cup D)=D$ و $(C\cap D)=C$ است.

(اثبات الف) طبق تعریف اشتراک می‌دانیم: $(A\cap B)\subseteq A\xRightarrow{\text{قضیه}} A\cup(A\cap B)=A$

(اثبات ب) طبق تعریف اجتماع می‌دانیم: $A\subseteq(A\cup B)\xRightarrow{\text{قضیه}} A\cap(A\cup B)=A$

روش دیگری نیز برای اثبات قوانین جذب وجود دارد که شما با پرکردن جاهای خالی اثبات را کامل کنید.

الف) $A\cup(A\cap B)=(A\cap U)\cup(A\cap B)$

$=A\cap(U\cup B)$ فاکتورگیری

$=A\cap U=A$

ب) $A\cap(A\cup B)=(A\cup\varnothing)\cap(A\cup B)$

$=A\cup(\varnothing\cap B)$ فاکتورگیری

$=A\cup\varnothing=A$

مثال : عبارت‌های زیر را ساده کنید :

الف) $(A\cap B)\cup((B\cup C)\cap[(B\cup A)\cap B])$

$(A\cap B)\cup((B\cup C)\cap[\underbrace{(B\cup A)\cap B}_{\text{جذب}}])=(A\cap B)\cup[\underbrace{(B\cup C)\cap B}_{\text{جذب}}]$

$=\underbrace{(A\cap B)\cup B}_{\text{جذب}}=B$

ب) $(A\cup B')\cap[(B\cap C)\cup(B'\cup A)]$

$(A\cup B')\cap[(B\cap C)\cup(B'\cup A)]=(\underbrace{A\cup B'}_{C})\cap[(\underbrace{B\cap C}_{D})\cup(\underbrace{A\cup B'}_{C})]$ جابه‌جایی

$=(\underbrace{A\cup B'}_{C})$ جذب

مثال : درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A-B=B'-A'$

ب) $(X\subseteq A)\wedge(X\subseteq A')\Rightarrow X=\varnothing$

پ) $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$

ت) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

ث) $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=A\cup B$

حل :

الف) $A-B=A\cap B'=B'\cap A=B'-A'$

ب) $\begin{cases}X\subseteq A\\ X\subseteq A'\end{cases}\Rightarrow(X\cap X)\subseteq(A\cap A')\Rightarrow X\subseteq\varnothing$ (۱)

از طرفی می‌دانیم $\varnothing\subseteq X$ و بنابراین $X=\varnothing$

پ) $(A-B)\cap(B-A)=(A\cap B')\cap(B\cap A')$

$=[(A\cap B')\cap B]\cap A'$ شرکت‌پذیری

$=[A\cap(B'\cap B)]\cap A'$ شرکت‌پذیری

$=(A\cap\varnothing)\cap A'$ تعریف متمم

$=\varnothing\cap A'=\varnothing$

ت) $(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap C'$

$=(A\cap C')\cup(B\cap C')$ توزیع‌پذیری $\cap$ در $\cup$

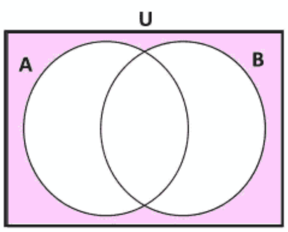
$=(A-C)\cup(B-C)$ تبدیل اشتراک به تفاضل

ث) $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$	
$=[(A-B)\cup(A\cap B)]\cup(B-A)=$	شرکت‌پذیری اجتماع
$=[(A\cap B')\cup(A\cap B)]\cup(B\cap A')$	تبدیل تفاضل به اشتراک
$=[A\cap(B'\cup B)]\cup(B\cap A')$	عکس عمل توزیع‌پذیری
$=(A\cap U)\cup(B\cap A')$	تعریف متمم
$=A\cup(B\cap A')$	تعریف مرجع
$=(A\cup B)\cap(A\cup A')$	توزیع‌پذیری
$=(A\cup B)\cap U$	تعریف متمم
$=A\cup B$	تعریف مرجع

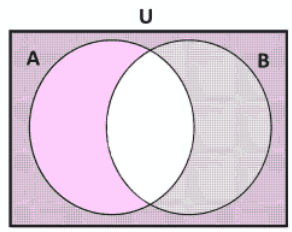
قوانین دمورگان

فعالیت

۱ فرض کنیم A و B دو مجموعه از مجموعهٔ مرجع U باشند،روی شکل سمت چپ، $(A\cup B)'$ و روی نمودار سمت راست، $(A'\cap B')$ را هاشور بزنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ $(A\cup B)'=A'\cap B'$



$(A\cup B)'$



$A'\cap B'$

۲ اگر فرض کنیم $U=$ {۱۰ و ... و ۲ و ۱} و $A=$ {۸و۵و۳و۲} و $B=$ {۸و۶و۴و۳} هر یک از مجموعه‌های $(A\cap B)'$ و $(A'\cup B')$ را تشکیل داده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$\left.\begin{array}{l} A\cap B=\{۳,۸\}\Rightarrow(A\cap B)'=\{۱,۲,۴,۵,۶,۷,۹,۱۰\} \\ A'\cup B'=\{۱,۴,۶,۷,۹,۱۰\}\cup\{۱,۲,۵,۷,۹,۱۰\}=\{۱,۲,۴,۵,۶,۷,۹,۱۰\} \end{array}\right\}\Rightarrow(A\cap B)'=A'\cup B'$$

تساوی‌های زیر را که به قوانین دمورگان معروف‌اند برای هر دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U برقرارند:

الف) $(A\cup B)'=(A'\cap B')$
ب) $(A\cap B)'=(A'\cup B')$

با استفاده از روش عضوگیری دلخواه وتعریف تساوی بین دو مجموعه،تساوی $(A\cup B)'=(A'\cap B')$ را اثبات کنید. (باید ثابت کنید، $(A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')$ و $(A'\cap B')\subseteq(A\cup B)'$

$$\forall x\in(A\cup B)'\Rightarrow x\notin(A\cup B)\Rightarrow x\notin A\wedge x\notin B$$
$$\Rightarrow x\in A'\wedge x\in B'\Rightarrow x\in(A'\cap B')]\Rightarrow(A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')$$

روابط صفحه قبل برگشت‌پذیرند، شما به طریق مشابه نشان دهید که $(A' \cap B') \subseteq (A \cup B)'$ که در این صورت تساوی الف اثبات می‌شود.

$x \in A' \cap B' \Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in (A \cup B)' \Rightarrow A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$

کار در کلاس

با استفاده از قوانین و خواص (جبر مجموعه‌ها) درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید:

الف) $(A-B)'=(A' \cup B)$ اثبات: $(A-B)'=(A \cap B')'=A' \cup B$

ب) $(A-B)-C=(A-C)-B$ اثبات: $(A-B)-C=(A \cap B') \cap C'=(A \cap C') \cap B'=(A-C)-B$

پ) $A-(B \cap C)=(A-B) \cup (A-C)$ اثبات: $A-(B \cap C)=A \cap (B \cap C)'=A \cap (B' \cup C')=(A \cap B') \cup (A \cap C')=(A-B) \cup (A-C)$

مثال: با استفاده از جبر مجموعه‌ها درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A-(B \cup C)=(A-B) \cap (A-C)$ ب) $A \cap (B-C)=(A \cap B)-(A \cap C)$

پ) $A-(B-C)=(A-B)-C$ ت) اگر $(A \cup B)=(A \cap B)$ آنگاه $A=B$

حل:

الف) $(A-B) \cap (A-C)$

$=(A \cap B') \cap (A \cap C')$ تبدیل تفاضل به اشتراک

$=[(A \cap B') \cap A] \cap C'$ شرکت‌پذیری

$=[A \cap (A \cap B')] \cap C'$ جابه‌جایی

$=[(A \cap A) \cap B'] \cap C'$ شرکت پذیری

$=(A \cap B') \cap C'$ $A \cap A=A$

$=A \cap (B' \cap C')$ شرکت‌پذیری

$=A-(B' \cap C')'$ تبدیل اشتراک به تفاضل

$=A-(B \cup C)$ قانون دمورگان

ب) $(A \cap B)-(A \cap C)$

$=(A \cap B) \cap (A \cap C)'$ تبدیل تفاضل به اشتراک

$=(A \cap B) \cap (A' \cup C')$ قانون دمورگان

$=[(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C']$ توزیع‌پذیری اشتراک نسبت به اجتماع

$=[(A \cap A') \cap B] \cup [A \cap (B \cap C')]$ قوانین جابه‌جایی و شرکت‌پذیری

$=(\varnothing \cap B) \cup [A \cap (B-C)]$ تبدیل اشتراک به تفاضل و تعریف متمم

$=\varnothing \cup [A \cap (B-C)]$

$=A \cap (B-C)$

پ) با کمی تأمل متوجه می‌شویم که برای رسیدن از یک طرف تساوی به طرف دیگر دچار مشکل شده و این کار انجام نمی‌شود ولی برای اینکه ادعا کنیم این تساوی همواره برقرار نیست، کافی است مثال نقض بزنیم:

$A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ و $C=\{۵,۶,۷\}$ و $U=\{۱,۲$ و۳و۴و۵و۶و۷و۸و۹ و۱۰$\}$

$A-(B-C)=\{۱,۲,۳,۴,۵\}-\{۳,۴\}=\{۱,۲,۵\}$

$(A-B)-C=\{۱,۲\}-\{۵,۶,۷\}=\{۱,۲\}$

ت) وقتی می‌نویسیم $C=D$ یعنی C و D یک مجموعه‌اند، با دو نام و لذا وقتی تساوی بین مجموعه‌ها به کار می‌بریم می‌توان نوشت طرفین تساوی را با هر مجموعه‌ای اجتماع و یا اشتراک بگیریم یعنی از اینکه $C=D$ نتیجه می‌شود $A\cup C=A\cup D$ و $A\cap C=A\cap D$

$A\cup B=A\cap B \Rightarrow A\cap(A\cup B)=A\cap(A\cap B)$

$\xRightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اشتراک}} A=(A\cap B) \xRightarrow{\text{قضیه}} A\subseteq B$ (۱)

$(A\cup B)=(A\cap B)\Rightarrow A\cup(A\cup B)= A \cup(A\cap B)$

$\xRightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اجتماع}} (A\cup B)=A \xRightarrow{\text{قضیه}} B\subseteq A$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow A=B$

روش دوم: دربارهٔ روش زیر که به اختصار نوشته شده است، با هم‌کلاسی خود گفتگو کرده و توضیح دهید:

$A\subseteq(A\cup B)=(A\cap B)\subseteq B\Rightarrow A\subseteq B$

و به طریق مشابه ثابت می‌شود $B\subseteq A$ و نتیجه می‌شود $A=B$.

کار در کلاس

۱ اگر $U=\{1, 2, \ldots, 20\}$ و $B=\{5, 6, \ldots, 15\}$ و $A=\{1, 2, \ldots, 10\}$ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(A\cap B')\cup(A\cap B)=A\cap(B'\cup B)=A\cap U=A=\{1,2,3,\ldots,10\}$

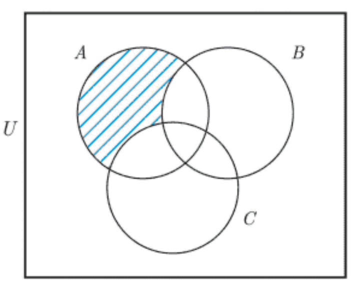
ب) $(A-B)\cup((A\cap B')\cap[(B-A)\cup A'])=(A-B)\cup((A-B)\cap[(B-A)\cup A'])$

$\xrightarrow{\text{قانون جذب}} =A-B=\{1,2,3,4\}$

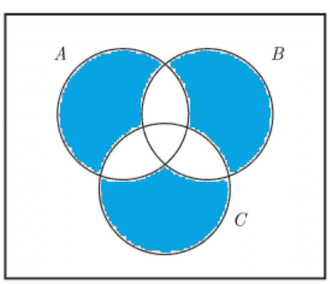
(راهنمایی: ابتدا با استفاده از جبر مجموعه‌ها عبارت‌ها را ساده کنید.)

۲ با توجه به نمودار ون که در روبه‌رو رسم شده است مانند نمونه برای هر حالت و به صورت جداگانه بخشی را که به صورت توصیفی مشخص کرده‌ایم، هاشور بزنید.

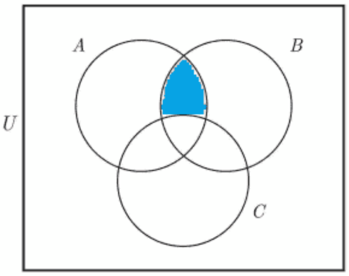
الف) اعضایی که فقط در A باشند.



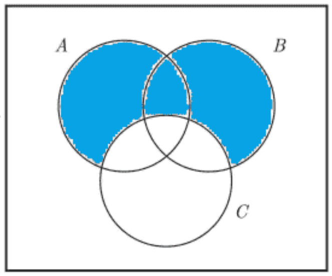
ب) اعضایی که فقط در یک مجموعه هستند.



پ) اعضایی که در A و B باشند ولی در C نباشند.



ت) اعضایی که در A یا B باشند ولی در C نباشند.



ضرب دکارتی بین دو مجموعه

قبلاً با تعریف زوج مرتب آشنا شده‌اید و می‌دانید که «هر دو شیئی مانند x و y تشکیل یک زوج می‌دهند که اگر برای آنها ترتیب قائل باشیم به آن یک زوج مرتب گفته می‌شود و با نماد (x,y) نشان می‌دهیم» و البته می‌دانیم که $(x,y)=(z,t)$ اگر و تنها اگر $x=z$ و $y=t$.

عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعهٔ A و B این امکان را برای ما فراهم می‌سازد تا مجموعهٔ جدیدی بسازیم که اعضای آن هر کدام یک زوج مرتب بوده و هر یک از این زوج‌های مرتب از اعضای A و B ساخته می‌شوند. بنابراین مجموعهٔ حاصل، دارای اعضایی از جنس زوج مرتب بوده و به‌اعضای A یا B شبیه نبوده و فقط اعضای A و B در ساختن آنها نقش دارند.

تعریف عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعه : اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند $A\times B$ مجموعه‌ای است که به صورت زیر تعریف می‌شود : $A\times B=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\}$

در تعریف قبل توجه دارید که در هر (x,y) متعلق به $A\times B$، همواره مؤلفه یا مختصِ اول یعنی x باید از مجموعهٔ A و متناظراً مؤلفهٔ دوم یعنی y باید از مجموعهٔ B باشد.

مثال : اگر $A=\{۲,۴,۶\}$ و $B=\{۴,۵\}$، در این صورت مجموعه‌های $A\times B$ و $B\times A$ را تشکیل دهید و با هم مقایسه کنید.

$A\times B=\{(۲,۴),(۲,۵),(۴,۴),(۴,۵),(۶,۴),(۶,۵)\}$

$B\times A=\{(۴,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۵,۲),(۵,۴),(۵,۶)\}$

واضح است که $A\times B\neq B\times A$ (کافی است فقط در یک عضو با هم فرق داشته باشند، مثلاً $(۲,۴)\neq(۴,۲)$ و $(۲,۴)\in A\times B$ و $(۲,۴)\notin B\times A$).

کار در کلاس

در مثال قبل دیدید که در مجموعهٔ $A\times B$ هر عضو A دو زوج مرتب تولید کرد و در کل ۶ زوج مرتب به‌وجود آمد حال اگر $n(A)=m$ و $n(B)=k$ با استفاده از تعریف عمل ضرب دکارتی و حاصل ضرب، نشان دهید، $n(A\times B)=mk$

برای نوشتن ضرب دکارتی باید به ازای هر عضو A تمام اعضای مجموعه ی B نوشته شوند ، یعنی برای هر عضو B، K حالت داریم .

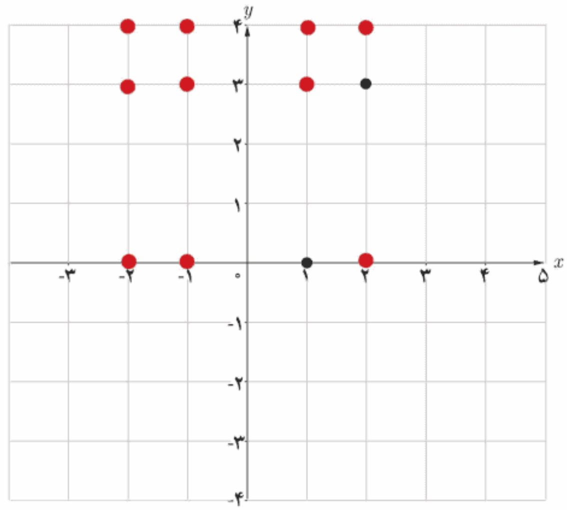
از طرفی A دارای m عضو است ، پس طبق اصل ضرب ، $A\times B$ دارای $m\times k$ عضو است .

فعالیت

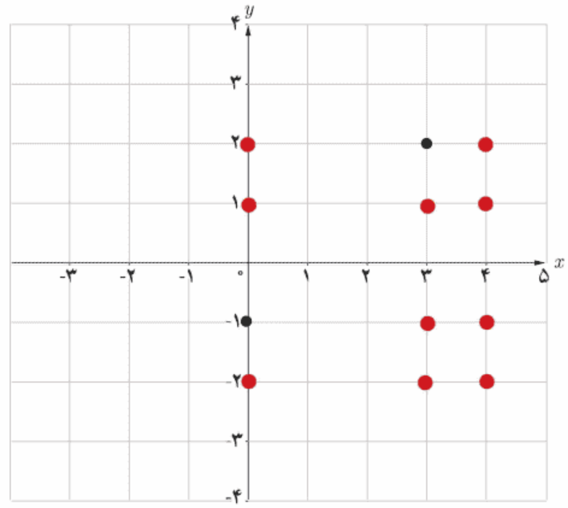
۱ اگر $A=\{1,-1,2,-2\}$ و $B=\{0,3,4\}$، ابتدا مجموعه‌های $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را تشکیل داده و سپس نمودار مختصاتی هر یک از این مجموعه‌ها را رسم کنید. (نمودارها را کامل کنید.)

$$A\times B=\{(1,0),(1,3),(1,4),(-1,0),(-1,3),(-1,4),(2,0),(2,3),(2,4),(-2,0),(-2,3),(-2,4)\}$$

$$B\times A=\{(0,1),(0,-1),(0,2),(0,-2),(3,1),(3,-1),(3,2),(3,-2),(4,1),(4,-1),(4,2),(4,-2)\}$$



نمودار مختصاتی $A\times B$

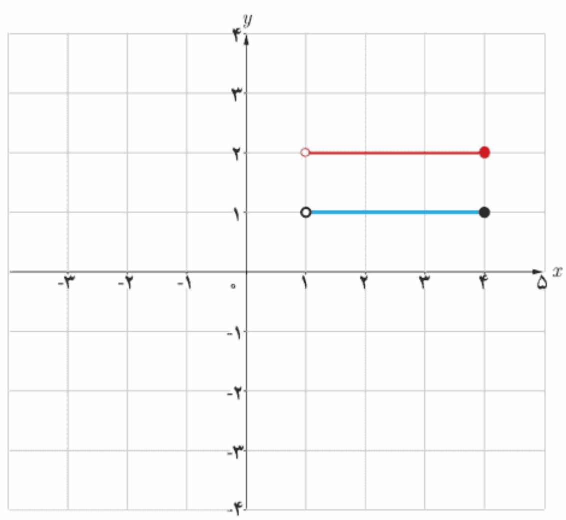


نمودار مختصاتی $B\times A$

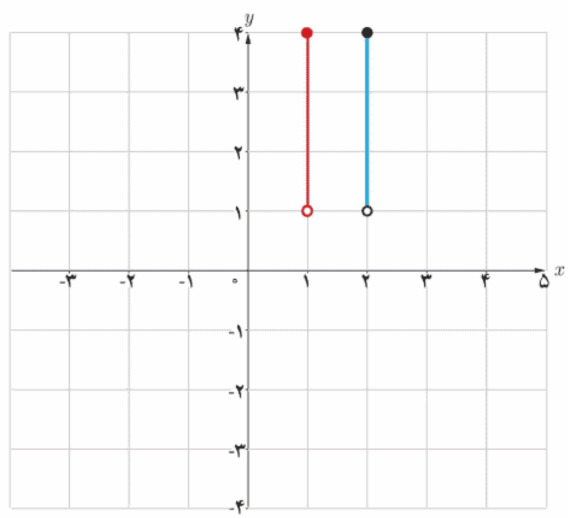
۲ اگر فرض کنیم $A=(1,4]$ و $B=\{1,2\}$ در این صورت نمودارهای مربوط به $A\times B$ و $B\times A$ که بخشی از آنها رسم شده است را تکمیل کنید.

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in(1,4]\wedge y\in B\}$$

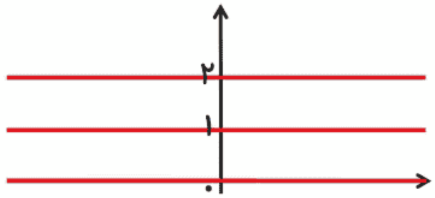
$$B\times A=\{(x,y)\,|\,(x=1\vee x=2)\wedge 1<y\leq 4\}$$



نمودار $A\times B$



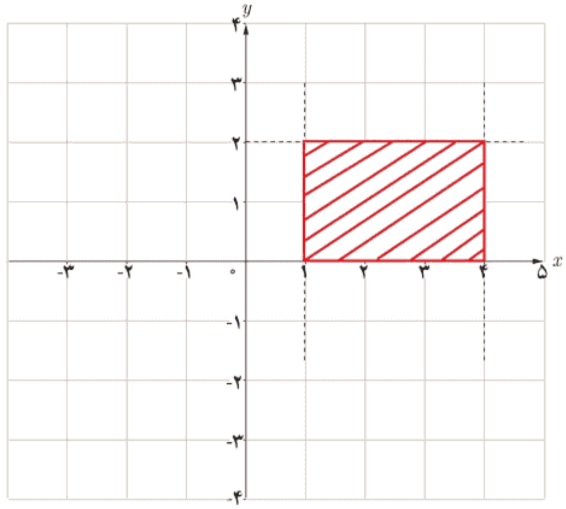
نمودار $B\times A$



۳ اگر فرض کنیم $A=\mathbb{R}$ و $B=\{۰,۱,۲\}$ نمودار $A\times B$ را رسم کنید.

۴ در صورتی که $A=[۱,۴]$ و $B=[۰,۲]$ در این صورت نمودار $(A\times B)$ را که بخشی از صفحهٔ مختصات دکارتی است، هاشور بزنید.

$$A\times B=\{(x,y)\mid ۱\le x\le ۴\wedge ۰\le y\le ۲\}$$



۵ در صورتی که فرض کنیم $A=\mathbb{R}$ و $B=\mathbb{R}$ در این صورت حاصل‌ضرب $A\times B=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^۲$ را چگونه تعبیر می‌کنید؟

این مجموعه شامل تمام نقاط صفحه ی مختصات است .

کار در کلاس

اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند در این صورت :

الف) $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$

ب) $A\times B=B\times A\Rightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing\vee A=B$

اثبات الف) از برهان خلف استفاده می‌کنیم :

فرض $A\times\varnothing\neq\varnothing$ کنیم (فرض خلف) در این صورت حداقل یک عضو مانند (x,y) در $A\times\varnothing$ باید وجود داشته باشد که در این صورت :

$$(x,y)\in A\times\varnothing \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x\in A\wedge \underbrace{y\in\varnothing}_{\text{تناقض}}$$

و چون $y\in\varnothing$ یک تناقض است (مجموعهٔ $\varnothing$ فاقد عضو است) پس فرض خلف باطل شده و حکم برقرار می‌باشد، به طریق مشابه ثابت کنید که $\varnothing\times A=\varnothing$.

برهان خلف : فرض می کنیم $\varnothing\times A\neq\varnothing$ در این صورت حداقل یک عضو مانند (x,y) در $\varnothing\times A$ باید وجود داشته باشد که در این صورت :

$$(x,y)\in\varnothing\times A\Rightarrow \underbrace{x\in\varnothing}_{\text{تناقض}}\wedge y\in A$$

پس فرض خلف باطل شده و حکم برقرار است .

اثبات ب) اگر $A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ که حکم اثبات می‌شود.

حال فرض کنیم $A\neq\varnothing$ و $B\neq\varnothing$ که در این صورت به روش عضوگیری و با توجه به تعریف ضرب دکارتی و فرضِ $A\times B=B\times A$، ثابت می‌کنیم $A=B$.

$$A\neq\varnothing, B\neq\varnothing \Rightarrow \exists x; x\in A \wedge \exists y\in B \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} \exists(x,y);(x,y)\in A\times B$$

$$\xrightarrow{A\times B=B\times A}(x,y)\in B\times A \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x\in B\wedge y\in A \Rightarrow A\subseteq B \wedge B\subseteq A \Rightarrow A=B$$

(xای که از A فرض کردیم ثابت شد در B است و yای که از B فرض کردیم ثابت شد در A است.)

تمرین

۱ با استفاده از تعریف اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای ترکیب عطفی در گزاره‌ها، هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $A\cap B=B\cap A$

اثبات: $A\cap B=\{x\in U | x\in A\wedge x\in B\}=\{x\in U | x\in B\wedge x\in A\}=B\cap A$

ب) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

اثبات: $A\cap(B\cap C)=\{x\in U | x\in A\wedge x\in B\cap C\}$

$=\{x\in U | x\in A\wedge(x\in B\wedge x\in C)\}=\{x\in U | (x\in A\wedge x\in B)\wedge x\in C\}$

$=\{x\in U | x\in(A\cap B)\wedge x\in C\}=(A\cap B)\cap C$

پ) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

اثبات: $x\in A\cap(B\cup C)\Rightarrow x\in A\wedge x\in B\cup C$

$\Rightarrow x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)\Rightarrow(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)$

$\Rightarrow x\in A\cap B\wedge x\in A\cap C \Rightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\Rightarrow \boxed{A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)}$

به طور مشابه ثابت می شود $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$ بنابراین دو مجموعه با هم برابرند.

۲ درستی هریک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید. پاسخ این قسمت در صفحه ی بعد نوشته شده است.

الف) $(A\cap B)\cup(B'\cap A)=A$

ب) $(A'\cap B')\cap A=\varnothing$

پ) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$

ت) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup(A\cup C)$

۳ هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید:

الف) $(A'\cap B)\cup[(B\cap A)-B']\cap(B\cup A)$

ب) $(A\cup B)-B$

پ) $[(A\cup B)-A]\cup(A\cap B)$

۴ درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $(A\subseteq X)\wedge(A'\subseteq X)\Rightarrow X=U$

ب) $(A-B)\cup(A\cap B)=A$

پ) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$

ت) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

ث) $(A\cup B)\cap(A'\cap B')=\varnothing$

ج) $[(A\cup B)=(A\cup C)\wedge(A\cap B)=(A\cap C)\Rightarrow B=C$

۵ اگر $A=\{y+۲,۵,z\}$ و $B=\{x+۱,۴,-۲\}$ در این صورت با فرض $A\times B=B\times A$ بیشترین مقدار برای $(x+y+z)$ را بیابید.

۶ با توجه به مجموعه‌های داده شده، نمودار هر یک از حاصل‌ضرب‌های $A\times B$ و $B\times A$ را رسم کنید.

الف) $A=\{۲,۳\}, B=\{۲,۳,۴\}$

ب) $A=\{۳,۴\}, B=(۱,۵]$

پ) $A=[۲,۶], B=[۳,۸]$

ت) $A=\mathbb{N}, B=[۱,۴]$

ث) $A=\mathbb{R}, B=\{۲,۳\}$

۲- الف) $(A\cap B)\cup(B'\cap A)=(A\cap B)\cup(A\cap B')=A\cap(B\cup B')=A\cap U=A$

ب) $(A'\cap B')\cap A=(B'\cap A')\cap A=B'\cap(A'\cap A)=B'\cap\varnothing=\varnothing$

پ) $A\cap(B\cap C)=(A\cap A)\cap(B\cap C)=A\cap[A\cap(B\cap C)]=A\cap[(A\cap B)\cap C]$

$$=A\cap[C\cap(A\cap B)]=(A\cap C)\cap(A\cap B)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$$

ت) $A\cup(B\cup C)=(A\cup A)\cup(B\cup C)=A\cup[A\cup(B\cup C)]=A\cup[(A\cup B)\cup C]$

$$=A\cup[C\cup(A\cup B)]=(A\cup C)\cup(A\cup B)=(A\cup B)\cup(A\cup C)$$

۳- الف) ابتدا عبارت درون کروشه را ساده می کنیم : $(B\cap A)-B'=(B\cap A)\cap B=B\cap A$

بنابراین : $(A'\cap B)\cup\left(\underbrace{[(B\cap A)-B']}_{B\cap A}\cap(B\cup A)\right)=$

$$=(B\cap A')\cup(B\cup A)=(B-A)\cup(B\cup A)\xrightarrow{(B-A)\subseteq(B\cup A)}=B\cup A$$

ب) $(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap B'=\underbrace{(A\cap B')}_{A-B}\cup\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}=A-B$

پ) $[(A\cup B)-A]\cup(A\cap B)=[(A\cup B)\cap A']\cup(A\cap B)=\left[\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cup(B\cap A')\right]\cup(A\cap B)$

$$=(B\cap A')\cup(A\cap B)=B\cap\underbrace{(A'\cup A)}_{U}=B$$

۴- الف) $(A\subseteq X)\wedge(A'\subseteq X)\Rightarrow(A\cup A')\subseteq X\Rightarrow U\subseteq X$

از طرفی می دانیم همواره $X\subseteq U$ ، بنابراین $X=U$ است .

ب) $(A-B)\cup(A\cap B)=(A\cap B')\cup(A\cap B)=A\cap\underbrace{(B'\cup B)}_{U}=A$

پ) $(A-C)\cap(B-C)=(A\cap C')\cap(B\cap C')=(A\cap B)\cap(C'\cap C')=(A\cap B)\cap C'=(A\cap B)-C$

ت) $(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cup B)\cap(A\cap B)'=(A\cup B)\cap(A'\cup B')$

$=(A\cup B)\cap(A'\cup B')=[(A\cup B)\cap A']\cup[(A\cup B)\cap B']$

$=[\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cup\underbrace{(B\cap A')}_{B-A}]\cup[\underbrace{(A\cap B')}_{A-B}\cup\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}]=(B-A)\cup(A-B)=(A-B)\cup(B-A)$

ث) $(A\cup B)\cap(A'\cap B')=(A\cup B)\cap(A\cup B)'=\varnothing$

ج) $B=B\cap(A\cup B)\xrightarrow{A\cup B=A\cup C}=B\cap(A\cup C)=(B\cap A)\cup(B\cap C)$

$\xrightarrow{A\cap B=A\cap C}=(A\cap C)\cup(B\cap C)=C\cap(A\cup B)\xrightarrow{A\cup B=A\cup C}=C\cap(A\cup C)=C$

۵- از $A\times B=B\times A$ نتیجه می شود $A=B$ ، بنابراین : $\{y+۲,۵,z\}=\{x+۱,۴,-۲\}$.

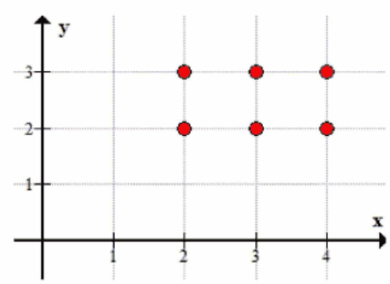
واضح است که ۵ فقط می تواند با $x+۱$ برابر باشد لذا $x=۴$ است . اما در موارد دیگر دو حالت داریم :

$$[(y+۲=۴)\wedge(z=-۲)]\vee[(y+۲=-۲)\wedge(z=۴)]$$
$$\Rightarrow[(y=۲)\wedge(z=-۲)]\vee[(y=-۴)\wedge(z=۴)]\Rightarrow y+z=۰$$

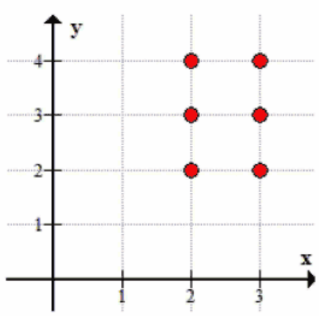
درنتیجه $x+y+z=۴$ خواهد بود .

۶- الف) $A=\{۲,۳\}$ و $B=\{۲,۳,۴\}$

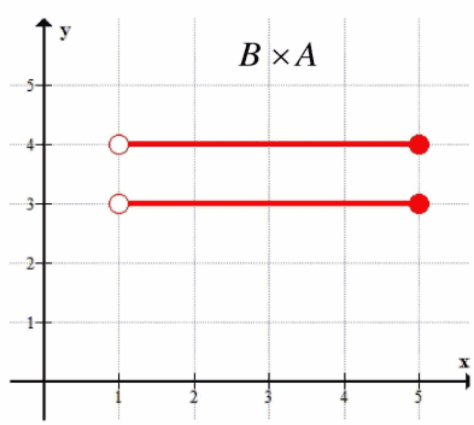
$B\times A=\{(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۳),(۴,۲),(۴,۳)\}$

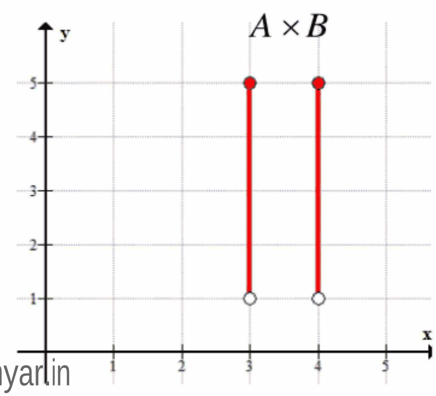


$A\times B=\{(۲,۲,),(۲,۳),(۲,۴),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴)\}$

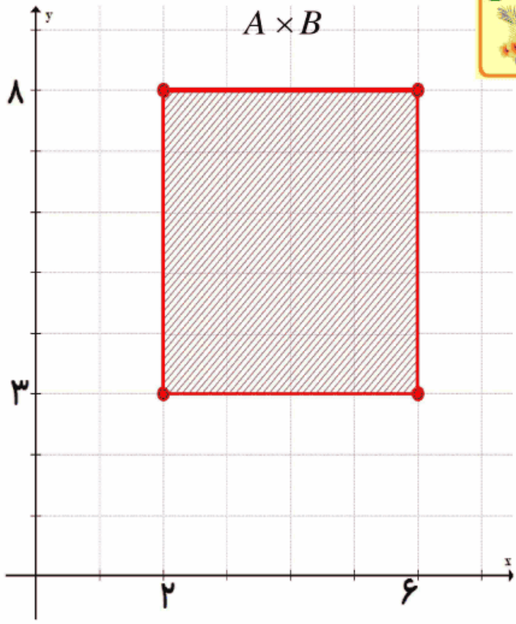


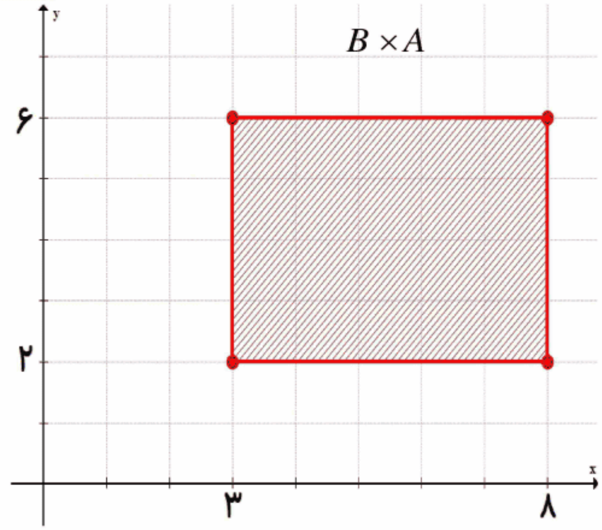
ب) $A=\{۳,۴\}$ و $B=(۱,۵]$



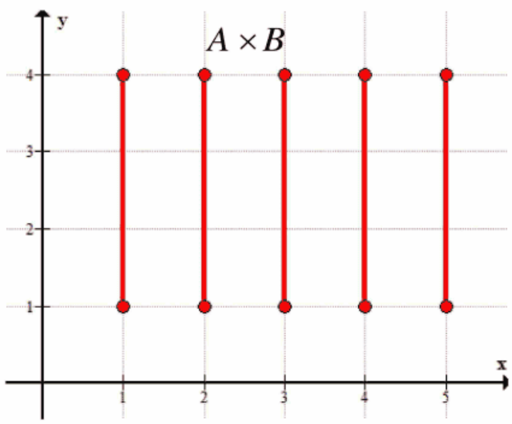


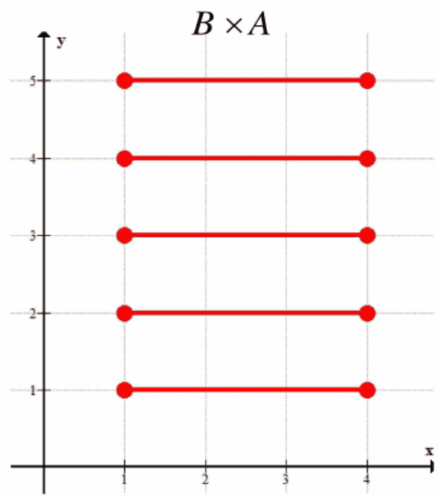
پ) $A=[۲,۶]$ و $B=[۳,۸]$





ت) $A=\mathbb{N}$ و $B=[۱,۴]$





ث) $A=\mathbb{R}$ و $B=\{۲,۳\}$