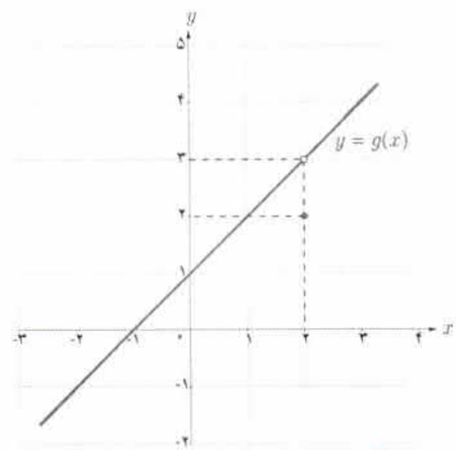
درس ۵

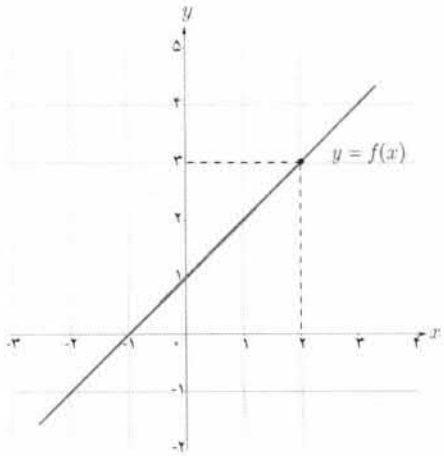
پیوستگی

فعالیت

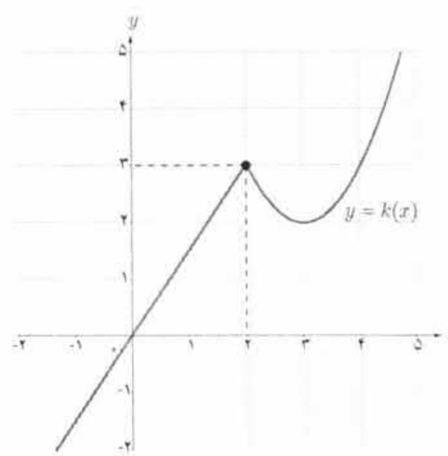
الف) با توجه به نمودارها، مقادیر زیر هر نمودار را (در صورت وجود) به دست آورید.



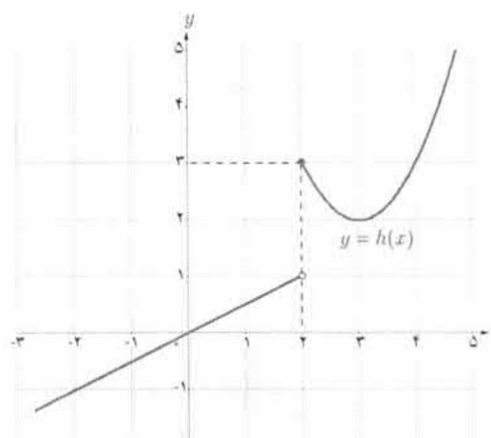
$g(۲)=$ ۲ $\quad \lim\limits_{x\to ۲} g(x) =$ ۳



$f(۲)=$ ۳ $\quad \lim\limits_{x\to ۲} f(x) =$ ۳



$k(۲)=$ ۳ $\quad \lim\limits_{x\to ۲} k(x) =$ ۳



$h(۲)=$ ۳ $\quad \lim\limits_{x\to ۲} h(x) =$ وجود ندارد

ب) برای کدام‌یک از توابع، حد تابع در ۲ با مقدار تابع در ۲ برابر است؟ f , k

پ) در نمودار کدام‌یک از توابع، در نقطه‌ای به طول ۲، گسستگی وجود ندارد؟ f , k

همان‌طور که در شکل‌های فوق مشاهده می‌کنید نمودار تابع f (و همچنین تابع k) در نقطه‌ای به طول ۲، هیچ گسستگی ندارد. در این حالت اصطلاحاً گوییم «تابع f (و همچنین تابع k) در نقطه $x=۲$ *پیوسته* است».

تعریف پیوستگی

گوییم تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

بنابراین، برای پیوسته بودن تابع f در نقطه a، باید شرایط زیر برقرار باشند :

الف) تابع f در a تعریف شده باشد.

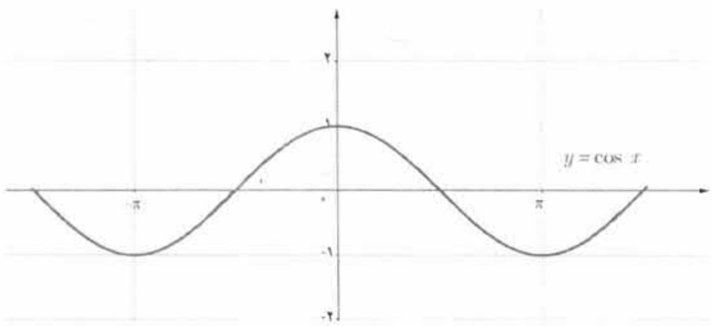
ب) حد تابع f در a موجود باشد.

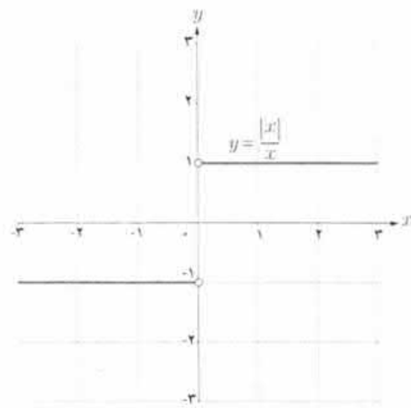
پ) مقدار حد تابع f در a با مقدار $f(a)$ برابر باشد.

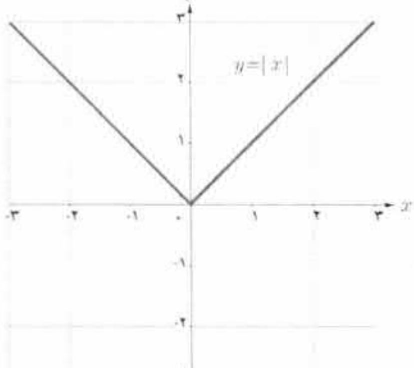
هنگامی که تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته نیست، گوییم f در $x=a$ ناپیوسته است.

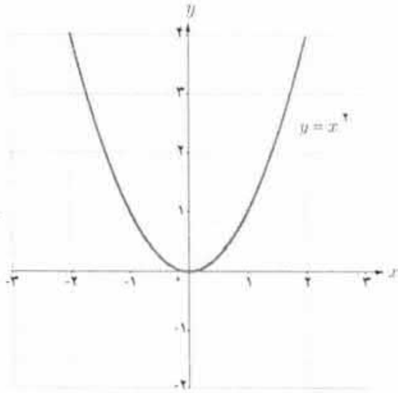
✤ **مثال** : در بخش‌های قبل دیدیم که در هر نقطه a ، $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$ و $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}$. پس توابع $y=\sin x$ و $y=\sqrt[3]{x}$ در هر عدد a ، پیوسته‌اند.

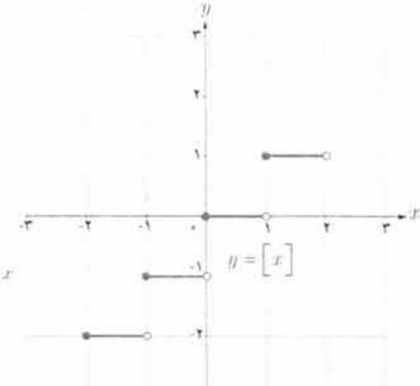
همچنین توابع $y=\cos x$ ، $y=|x|$ و $y=x^2$ و نیز چندجمله‌ای‌ها در هر عدد حقیقی a پیوسته‌اند. اما توابع $y=\frac{|x|}{x}$ و $y=[x]$ این‌چنین نیستند. این مطلب را از روی نمودار این توابع نیز می‌توان تشخیص داد.











❖ مثال : توابع $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & x\neq 3\\ 6 & x=3\end{cases}$ داده شده‌اند. درباره پیوستگی f و g در نقطه ۳ بحث کنید.

❖ حل : از آنجایی که f در ۳ تعریف نشده است، پس تابع f در ۳ پیوسته نیست.

در مورد تابع g داریم :

$$\lim_{x\to 3} g(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}}=6=g(3)$$

پس تابع g در ۳ پیوسته است.

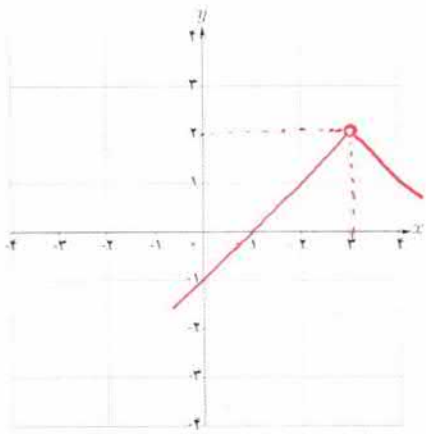
کار در کلاس

۱ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطهٔ ۳ تعریف نشده باشد اما حد تابع در $x=3$ وجود داشته باشد. (توجه کنید که این تابع در $x=3$ پیوسته نیست)

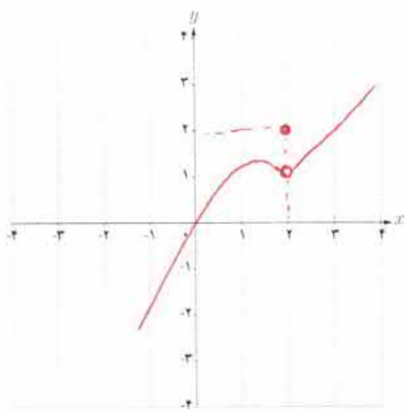
۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد و حد تابع هم در نقطه a موجود باشد اما با مقدار تابع در a برابر نباشد. (توجه کنید که این تابع در a پیوسته نیست).

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر عدد حقیقی پیوسته باشد.

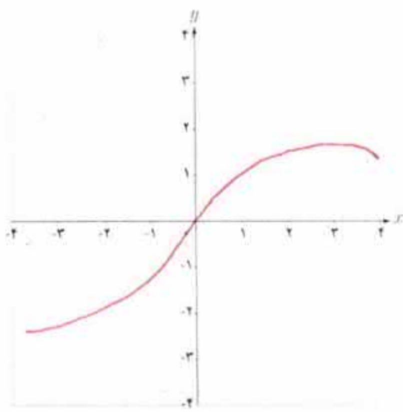
۴ نمودار تابعی را رسم کنید که همه جا پیوسته باشد به‌جز در دو نقطه.



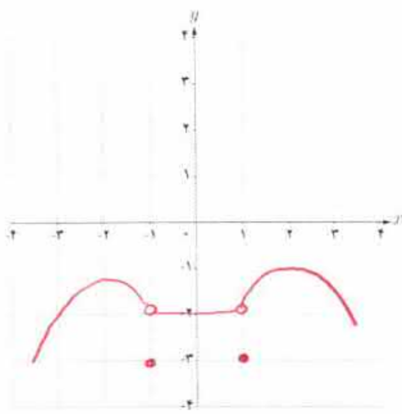
(۱)



(۲)

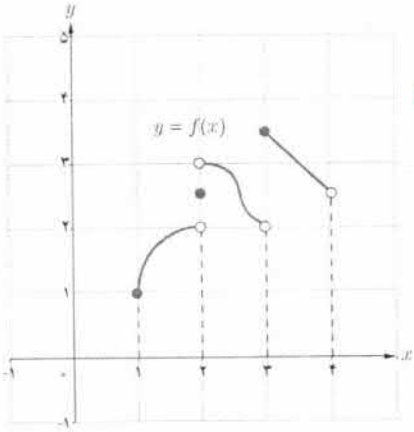


(۳)



(۴)

فعالیت



نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو رسم شده است.

الف) تابع f در کدام‌یک از نقاط مجموعه $\{۱,۲,۲/۵,۳,۴\}$ ناپیوسته است. ۲,۳

ب) آیا تساوی $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x) = f(۳)$ برقرار است؟ خیر

پ) آیا تساوی $\lim\limits_{x\to ۳} f(x) = f(۳)$ برقرار است؟ خیر

ت) در کدام نقطه a از مجموعه $\{۱,۲,۲/۵,۳,۴\}$ تساوی $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ برقرار است؟

۱و۳

تعریف

گوییم تابع f در a از راست پیوسته است (یا پیوستگی راست دارد) هرگاه : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

گوییم تابع f در a از چپ پیوسته است (یا پیوستگی چپ دارد) هرگاه : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

بنابراین، هرگاه تابع f در یک همسایگی (دوطرفه) a تعریف شده باشد :

f در a پیوسته است اگر و تنها اگر f در a هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد.

مثال : تابع
$$f(x) = \begin{cases} ۳x^۲ + x & x < ۰ \\ ۲ & x = ۰ \\ ۲\cos x - \sin x & x > ۰ \end{cases}$$
داده شده است. پیوستگی تابع f در صفر را بررسی کنید.

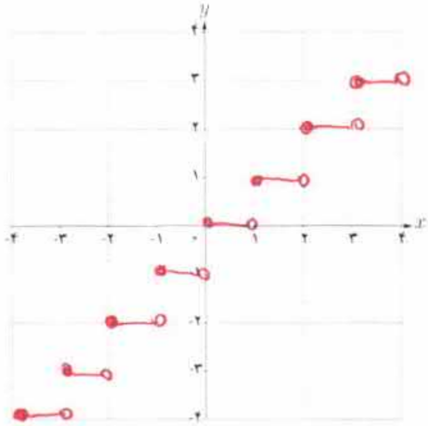
حل : داریم $f(۰)=۲$. همچنین

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} (۳x^۲ + x) = ۰ \neq f(۰)$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} (۲\cos x - \sin x) = ۲\cos(۰) - \sin(۰) = ۲ = f(۰)$$

بنابراین f در صفر پیوسته نیست اما در صفر پیوستگی راست دارد.

کار در کلاس



الف) با رسم نمودار تابع $f(x)=[x]$ مشخص کنید که در کدام‌یک از نقاط مجموعه $\{2 , \frac{1}{2} , 0\}$ ،

۱ تابع f پیوسته است. $\frac{1}{2}$

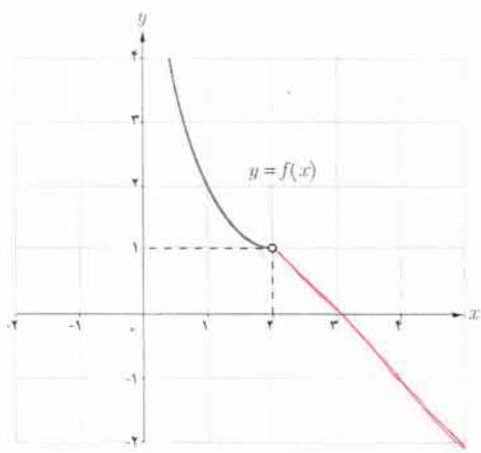
۲ تابع f پیوستگی راست دارد. ۰ و ۲

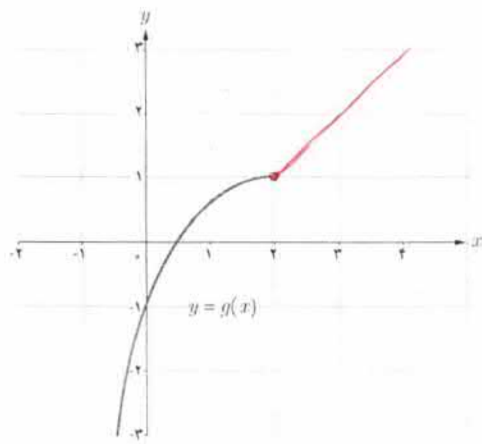
۳ تابع f پیوستگی چپ دارد. هیچکدام

ب) در شکل‌های زیر نمودار دو تابع f و g در طرف چپ نقطه ۲ رسم شده‌اند. در نقطه $x=2$ و در طرف راست نقطه ۲، نمودارها را طوری تکمیل نمایید که :

۱ تابع f در نقطه ۲ پیوستگی راست داشته باشد، اما در ۲ پیوسته نباشد.

۲ تابع g در نقطه ۲ پیوسته باشد.





تعریف (پیوستگی بر بازه)

تابع f را بر بازهٔ باز (a, b) پیوسته گوییم هرگاه در هر نقطه (a , b) پیوسته باشد.

تابع f را بر بازهٔ بسته $[a , b]$ پیوسته گوییم هرگاه تابع f در هر نقطه (a , b) پیوسته باشد و در a از راست پیوسته و در b از چپ پیوسته باشد.

کار در کلاس

پیوستگی روی بازه‌های $[a\,,\,b)$ و $(a\,,\,b]$ را به‌طور مشابه تعریف کنید.

تابع f را در بازه‌ی $[a,b)$ پیوسته گویند هرگاه در هر نقطه‌ی (a,b) پیوسته باشد و در a پیوستگی راست داشته باشد.

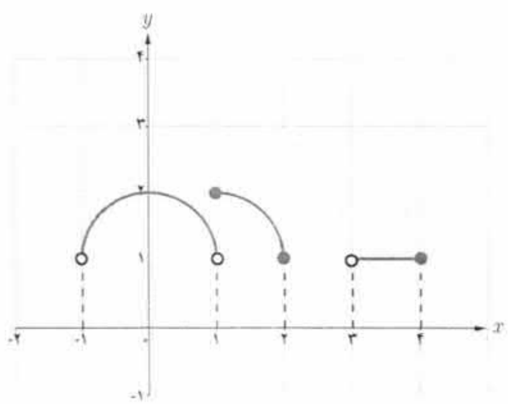
تابع f را در بازه‌ی $(a,b]$ پیوسته گویند هرگاه در هر نقطه‌ی (a,b) پیوسته باشد و در b پیوستگی چپ داشته باشد.

مثال :

۱) تابع $f(x)=\sqrt{x}$ بر بازهٔ $[۰,۲]$ پیوسته است.

۲) تابع $f(x)=[x]$ بر بازهٔ $(۰\,,\,۱)$ پیوسته است، اما بر بازهٔ بسته $[۰\,,\,۱]$ پیوسته نیست.

کار در کلاس



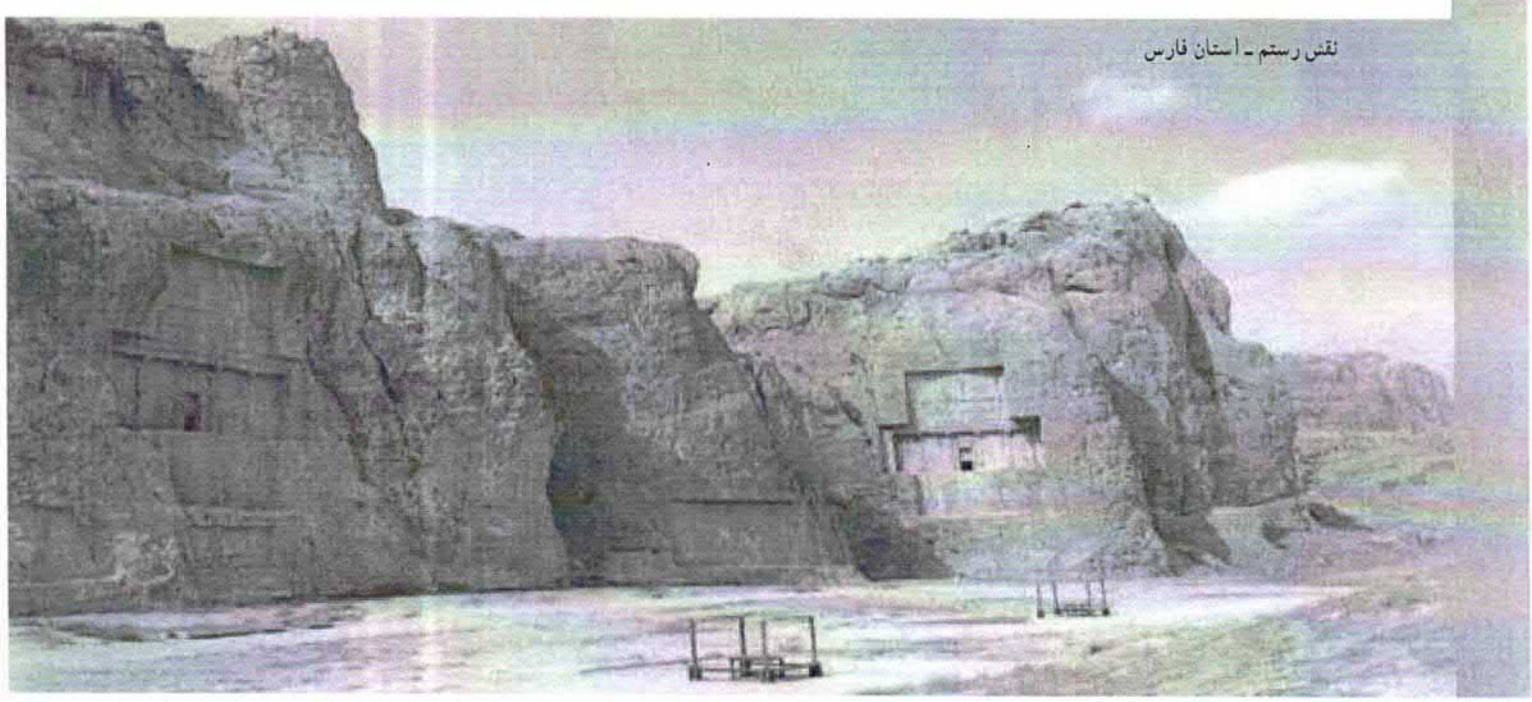
در شکل روبه‌رو نمودار تابع f رسم شده است. کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست هستند؟

الف) تابع f بر بازه $[۱\,,\,۲]$ پیوسته است. درست

ب) تابع f در هر نقطه از $[۱\,,\,۲]$ پیوسته است. نادرست.

پ) تابع f بر بازه $[۳\,,\,۴]$ پیوسته است. نادرست

ت) تابع f بر بازه $[۰\,,\,۲]$ پیوسته است. نادرست



نقش رستم ـ استان فارس

تمرین

۱ با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

الف) $y=|x-1|+2$

ب) $y=x-[x]$

پ) $y=[x]+[-x]$

ت) $y=\begin{cases} x(x-1) & x\le 1 \\ -x+2 & x>1 \end{cases}$

۲ در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=1$ پیوسته باشد.

الف) $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x<1 \\ a & x=1 \\ -x+2 & x>1 \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x\ne 1 \\ a & x=1 \end{cases}$

پ) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & 0<x<1 \\ [x]+a & x\ge 1 \end{cases}$

ت) $k(x)=([x]-a)[x]$

۳ نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a، توابع زیر در $x=0$ پیوسته نیستند.

الف) $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ a & x=0 \\ 2x+1 & x>0 \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{|x|} & x\ne 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

۴ الف) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.

ب) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در دو نقطه ۲ و ۳ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.

پ) ضابطه یک تابع f را بنویسید طوری که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.

۵ تابع $f(x)=[x]$ در بازه $(2, k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k چقدر است؟

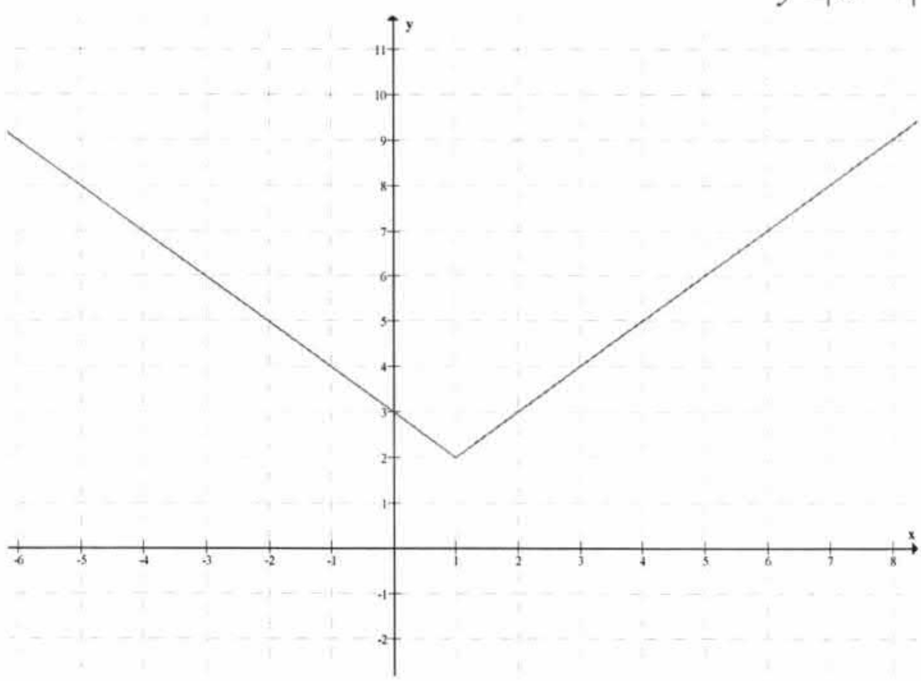
۶ بازهٔ بسته‌ای را ارائه کنید که تابع $f(x)=2-\sqrt{3-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

۷ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & x>0 \\ b-1 & x=0 \\ x-2a & x<0 \end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد.

حل کاردرکلاس صفحه ی ۱۵۱ (حسابان ۱)

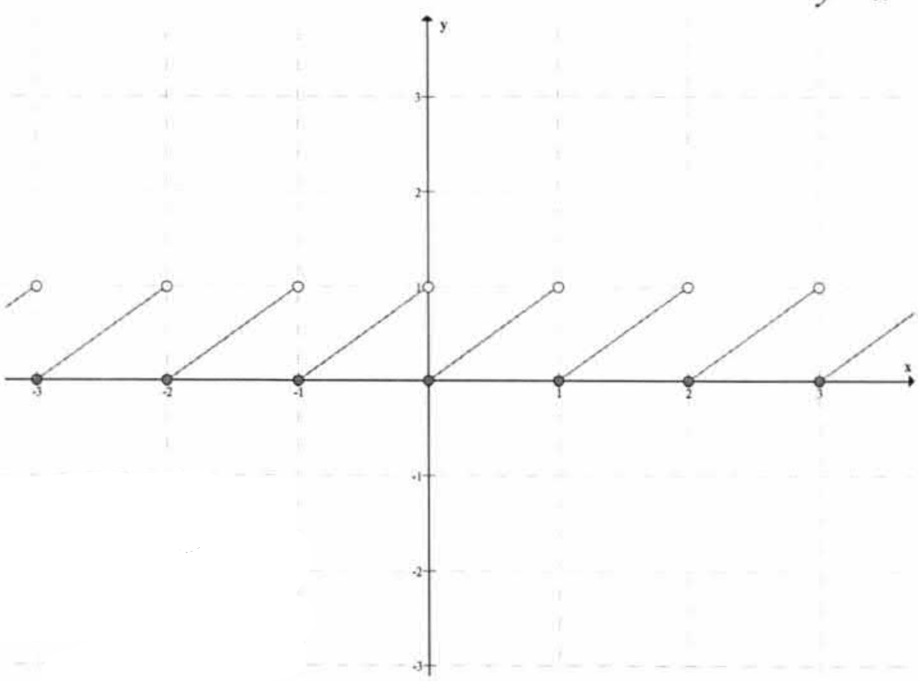
۱ :

الف) $y = |x - ۱| + ۲$



تابع در تمام نقاط پیوسته است.

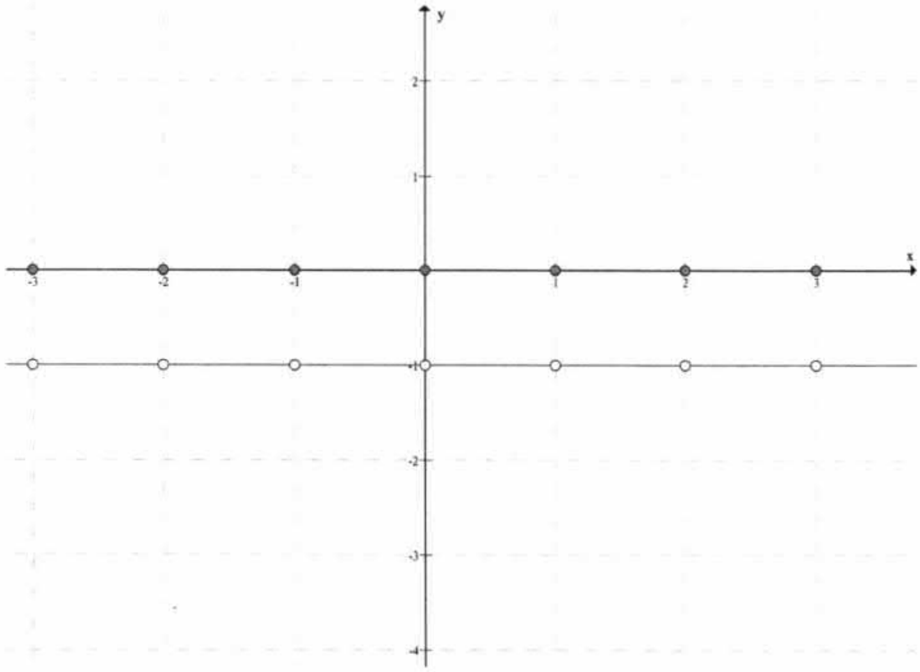
ب) $y = x - [x]$



تابع در نقاط به طول صحیح پیوسته نیست ولی پیوستگی راست دارد .

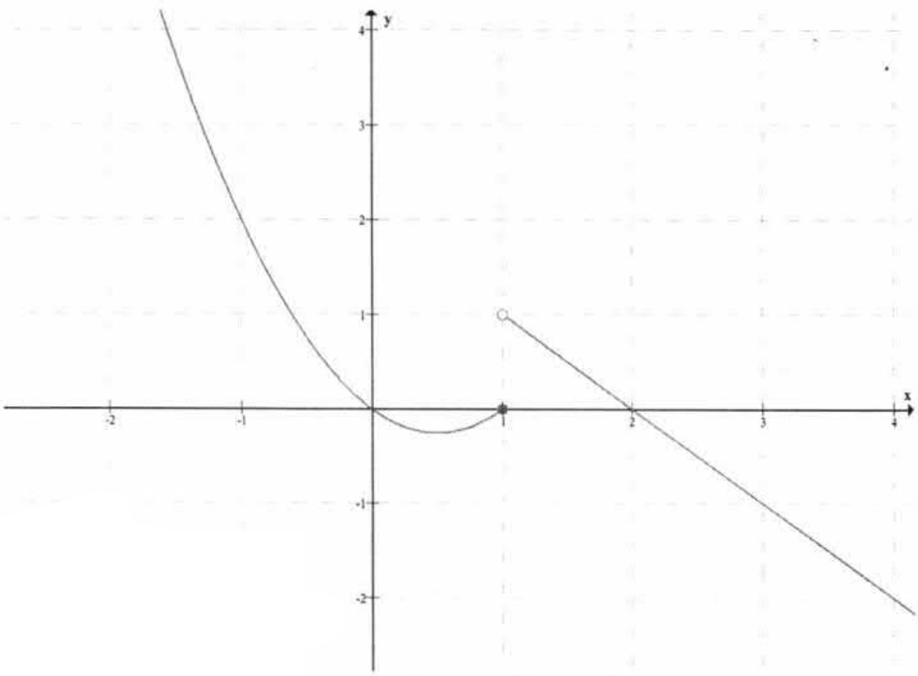
۱۵۱,۱

پ) $y=[x]+[-x]$



تابع در نقاط با طول صحیح پیوسته نیست.

ت) $y=\begin{cases} x(x-۱) & x\le ۱ \\ -x+۲ & x>۱ \end{cases}$



تابع در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته نیست ولی پیوستگی چپ دارد.

***

۱۵۱,۲

۲:

الف)

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۲(۱) - ۱ = ۱$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = -(۱) + ۲ = ۱$$

$$f(۱) = a$$

$$\to a = ۱$$

ب)

$$\lim_{x\to ۱} g(x) = \lim_{x\to ۱} \frac{x^۲ + x - ۲}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x+۲)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} (x+۲) = ۳$$

$$g(۱) = a$$

$$\to a = ۳$$

پ)

$$\lim_{x\to ۱^+} h(x) = \lim_{x\to ۱^+} [x] + a = ۱ + a$$

$$\lim_{x\to ۱^-} h(x) = \lim_{x\to ۱^-} \frac{\sqrt{x} - ۱}{x - ۱} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{\sqrt{x} - ۱}{x - ۱} \times \frac{\sqrt{x} + ۱}{\sqrt{x} + ۱} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{۱}{\sqrt{x} + ۱} = \frac{۱}{۲}$$

$$h(۱) = ۱ + a$$

$$\to ۱ + a = \frac{۱}{۲} \to a = -\frac{۱}{۲}$$

ت)

$$\lim_{x\to ۱^+} k(x) = \lim_{x\to ۱^+} ([x] - a)[x] = (۱ - a)(۱) = ۱ - a$$

$$\lim_{x\to ۱^-} k(x) = \lim_{x\to ۱^-} ([x] - a)[x] = (۰ - a)[۰] = ۰$$

$$k(۱) = (۱ - a)(۱) = ۱ - a$$

$$\to ۱ - a = ۰ \to a = ۱$$

۱۵۱,۳

۳:

الف)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2(0)+1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

$$f(0) = a$$

برای پیوسته بودن باید (حد راست و چپ) یعنی، صفر و یک برابر شوند و چون این ممکن نیست پس هر مقدار که برای a در نظر گرفته شود، باز این تابع پیوسته نیست.

ب)

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{ax}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{ax}{x} = a$$

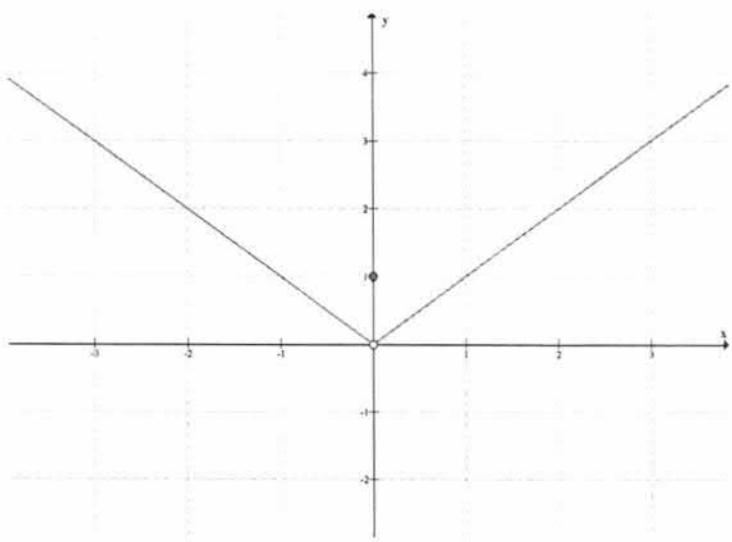
$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{ax}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{ax}{-x} = -a$$

$$g(0) = 1$$

برای پیوسته بودن باید (حد راست و چپ و مقدار تابع در نقطه ی صفر برابر شوند. چون این ممکن نیست پس هر مقدار که برای a در نظر گرفته شود، باز این تابع پیوسته نیست.

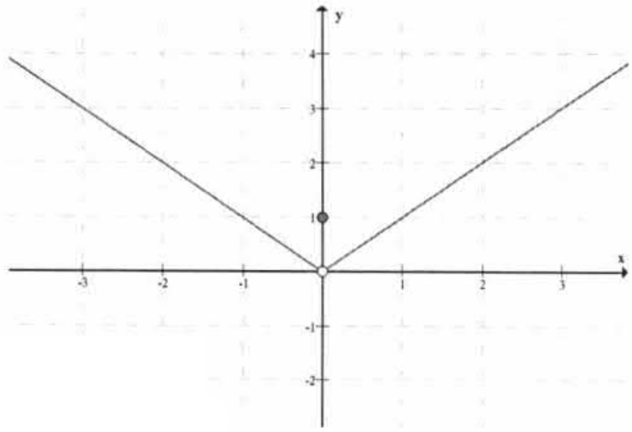
***

۴: الف) $f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$



۱۵۱٫۴

ب) $$f(x)=\begin{cases} ۲+x^{۲} & x\leq ۲ \\ ۳ & ۲<x<۳ \\ x-۲ & x\geq ۳ \end{cases}$$



پ) $$f(x)=\frac{۱}{|x|-۲}$$

۵: باید $k<۳$ باشد.

۶:

$$۳-x\geq ۰ \rightarrow x\leq ۳$$

تابع در بازه‌ی $(-\infty,۳]$ پیوسته است.

۷:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱-\cos x}{x^{۲}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱-\cos x}{x^{۲}}\times\frac{۱+\cos x}{۱+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱-\cos^{۲} x}{x^{۲}}\times\frac{۱}{۱+\cos x}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin^{۲} x}{x^{۲}}\times\frac{۱}{۱+\cos x}=\frac{۱}{۱+\cos(۰)}=\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}(x-۲a)=-۲a$$

$$f(۰)=b-۱$$

$$\rightarrow\begin{cases} -۲a=\frac{۱}{۲}\rightarrow a=-\frac{۱}{۴} \\ b-۱=\frac{۱}{۲}\rightarrow b=\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

۱۵۱/۵