فصل

۱ هندسهٔ تحلیلی و جبر

منحنی مسیر حرکت بسیاری از اسیا را به کمک یک معادله درجه دوم می‌توان نمایش داد. با دقت در محیط پیرامون خود، پدیده‌هایی را بیابید که با توابع درجه ۲ مرتبط باشند.

درس اول — هندسهٔ تحلیلی

درس دوم — معادلهٔ درجهٔ دوم و تابع درجهٔ ۲

درس سوم — معادلات گویا و معادلات رادیکالی

hamyar.in

همیار

درس اوّل

هندسهٔ تحلیلی

یادآوری و تکمیل معادلهٔ خط

در بسیاری از پدیده‌های جهان، رابطهٔ خطی بین متغیرها به چشم می‌خورد. بنابراین مطالعهٔ تابع‌های خطی اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند. در سال‌های قبل با مطالبی در این زمینه آشنا شدیم. در این فصل نکات دیگری را در این باره، مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

کار در کلاس

۱ می‌دانیم از هر دو نقطهٔ متمایز، تنها یک خط عبور می‌کند؛ بنابراین :

الف) با داشتن مختصات . دو . نقطه از یک خط باید بتوان معادلهٔ آن را به دست آورد.

ب) با داشتن معادلهٔ یک خط می‌توان با مشخص کردن . دو . نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه محورهای مختصات رسم نمود.

۲ نمودار خطوط با معادلات زیر را در دستگاه محورهای مختصات مقابل رسم کنید :

الف) $L_1: y=2x+1$

x	-1	0
y	-1	1

ب) $L_2: y=2x-3$

x	0	2
y	-3	1

پ) $L_3: y=1$

این خط خاص است محور عرض ها را در نقطه ی $(0,1)$ قطع می کند و موازی محور x ها است .

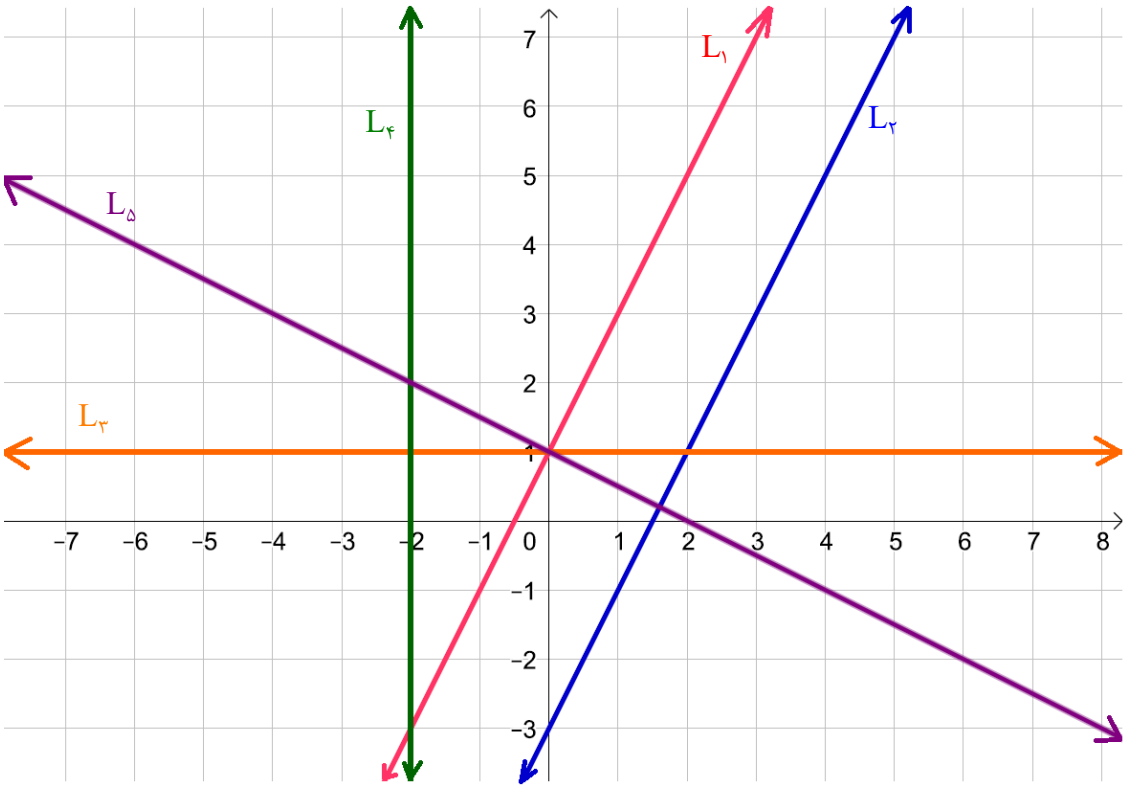
ت) $L_4: x=-2$

این خط خاص است محور طول ها را در نقطه ی $(-2,0)$ قطع می کند و موازی محور y ها است .

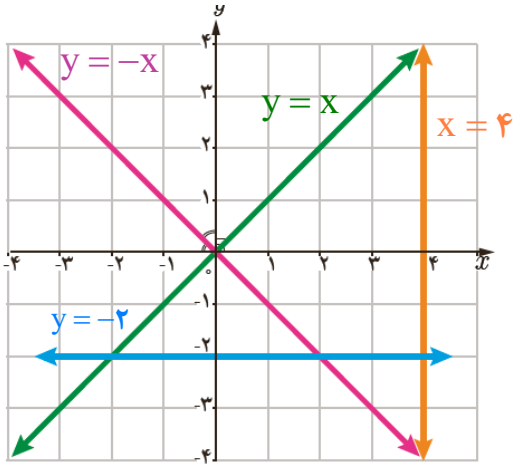
ث) $L_5: x+2y=2$

x	0	2
y	1	0

«رسم نمودار ها در صفحهٔ بعد»



۳ معادلهٔ هریک از خط‌های مقابل را روی شکل بنویسید



۴ الف) توجه داریم که شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی؛ به عبارت دیگر شیب خط گذرا از دو نقطهٔ غیر هم‌طول A و B برابر است با $m_{AB} = \frac{y_B - x_A}{x_B - x_A}$.

ب) شرط موازی بودن دو خط آن است که دارای شیب‌های برابر باشند.

۵ الف) از پایهٔ نهم به خاطر داریم که هرگاه خط L محور yها را در نقطه‌ای با عرض h قطع کند، آن‌گاه h، ... عرض از مبدأ ... خط L نامیده می‌شود.

ب) در سؤال ۲، شیب و عرض از مبدأ هریک از پنج خط ذکر شده را بنویسید. در این سؤال کدام دو خط با هم موازی‌اند؟

الف) $L_۱: y=۲x+۱$

$m=۲\ ,\ h=۱$

ب) $L_۲: y=۲x-۳$

$m=۲\ ,\ h=-۳$

پ) $L_۳: y=۱$

$m=۰\ ,\ h=۱$

ت) $L_۴: x=-۲$

شیب این خط تعریف نشده است و عرض از مبدأ هم ندارد.

ث) $L_۵: x+۲y=۲$

$$۲y=-x+۲\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+۱\Rightarrow m=-\frac{۱}{۲}\ ,\ h=۱$$

خط های $L_۱$ و $L_۲$ با هم موازی هستند.

۶ الف) خط با شیب m و عرض از مبدأ h معادله‌ای به صورت $y=mx+h$ دارد.

ب) می‌خواهیم معادلهٔ خط L، گذرا از دو نقطهٔ $A(۰,۷)$ و $B(۳,۱)$ را بنویسیم. برای این کار، ابتدا شیب خط را محاسبه می‌کنیم :

شیب خط: $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۱-۷}{۳-۰}=-۲$

معادلهٔ خط : $y=-۲x+h$

$B(۳,۱)$ روی خط L واقع است: $۱=-۲(۳)+h\Rightarrow h=۷$

البته اگر به مختصات نقطهٔ $A(۰,۷)$ از خط L دقت کنیم، بدون محاسبه متوجه می‌شویم که عرض از مبدأ این خط $h=۷$ است. پس :

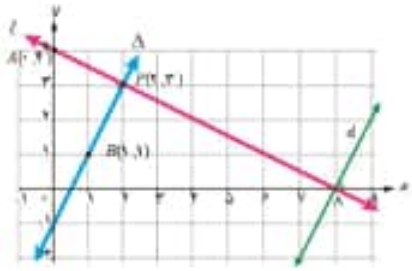
معادلهٔ خط L : $y=-۲x+۷$

پ) معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $P(۲,-۱)$ را بنویسید؛ به‌طوری که با خط $y=۳x-۴$ موازی باشد.

خط گذرنده از نقطه $P(۲,-۱)$ با خط $y=۳x-۴$ موازی است پس $m=۳$ همچنین $P(۲,-۱)$ روی خط است پس داریم :

$$-۱=۳\times۲+h\Rightarrow h=-۷\Rightarrow y=۳x-۷$$

فعالیت کلاسی



۱) دو خط l و Δ را عمود بر هم رسم کرده‌ایم. شیب آنها را مورد توجه قرار می‌دهیم.

شیب خط l گذرا از نقاط A و P : $m=\frac{y_P-y_A}{x_P-x_A}=\frac{۳-۴}{۲-۰}=\frac{-۱}{۲}$

شیب خط Δ گذرا از نقاط B و P : $m'=\frac{y_P-y_B}{x_P-x_B}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲$

۲) حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط را به دست می‌آوریم : $mm'=(\frac{-۱}{۲})(۲)=-۱$

می‌بینیم که شیب‌ها، قرینهٔ معکوسِ یکدیگرند.

۳) اگر خط دلخواه دیگری مثل T عمود بر L را در نظر بگیریم، این خط حتماً با خط Δ موازی است؛ پس شیب خط T برابر عدد ۲ خواهد بود. بنابراین می‌توان گفت شیب هر خطِ عمود بر L برابر قرینهٔ معکوس شیب خط L خواهد بود. این مطلب در حالت کلی درست است[۱]؛ یعنی

> دو خطِ غیر موازی با محورهای مختصات بر هم عمودند، هرگاه حاصل‌ضرب شیب‌های آنها برابر (−۱) باشد؛ یعنی اگر شیب‌های دو خط m و m' باشد، آنگاه شرط عمود بودن آنها آن است که $mm'=-۱$. به عبارت دیگر شیب هرکدام، قرینهٔ معکوس شیب دیگری باشد.

کار در کلاس ص ۴

کار در کلاس

۱) در هر قسمت شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند. (موازی، عمود یا متقاطعِ غیر عمود؟)

الف) $L: y=۵x-۲$ $m=۵$ $T: y=\frac{-۱}{۵}x+۳$ $m'=\frac{-۱}{۵}\Rightarrow mm'=-۱$

ب) $L: y=\frac{۱}{۲}x+۷$ $m=\frac{۱}{۲}$ $T: x-۲y=۱$ $x-۲y=۱\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}\Rightarrow m'=\frac{۱}{۲}\Rightarrow m=m'$

پ) $L: ۲x-۳y+۳=۰$ $m=\frac{-a}{b}\Rightarrow m=\frac{۲}{۳}$ $T: ۳x+۲y=۰$ $m'=\frac{-a}{b}\Rightarrow m'=\frac{-۳}{۲}\Rightarrow mm'=-۱$

ت) $L: x=۱$ این خط عمودی است $T: y=-۳$ خط d افقی است بنا براین دوخط بر هم عمود هستند.

ث) $L: y=۳x+۱$ $m=۳$ $T: x=۳y-۱$ پس در قسمت (ث) دو خط فقط متقاطع هستند.

$x=۳y-۱\Rightarrow y=\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۳}\Rightarrow m'=\frac{۱}{۳}\Rightarrow m\neq m',\ mm'\neq -۱$

۲ خط L به معادلهٔ $۲y-۳x=۱$ و خط T با عرض از مبدأ ۵ به معادلهٔ $y=mx+۵$ را در نظر بگیرید.

الف) m، را طوری بیابید که خط T با خط L موازی باشد.

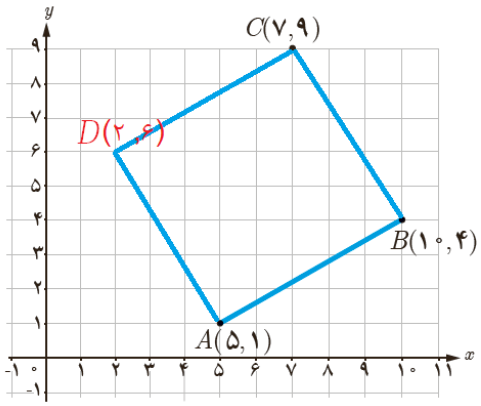
$$۲y-۳x=۱\Rightarrow -۳x+۲y-۱=۰\Rightarrow m'=\frac{-a}{b}\Rightarrow m'=\frac{۳}{۲}$$

$$y=mx+۵\Rightarrow m=m'=\frac{۳}{۲}\Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x+۵$$

ب) به ازای چه مقداری از m، دو خط بر یکدیگر عمودند؟

$$y=mx+۵\Rightarrow mm'=-۱\Rightarrow m=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow y=\frac{-۲}{۳}x+۵$$

۳ مربع $ABCD$ در ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات واقع است، به طوری که $A(۵,۱)$ و $B(۱۰,۴)$ دو رأس مجاور آن هستند.



الف) شیب ضلع AB را بنویسید.

$$m_{AB}=\frac{۴-۱}{۱۰-۵}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow m_{AB}=\frac{۳}{۵}$$

ب) شیب ضلع AD را حساب کنید و معادلهٔ این ضلع را بنویسید.

می دانیم که ضلع AB بر ضلع AD عمود است پس : $m_{AD}=\frac{-۵}{۳}$

پ) اگر بدانیم نقطهٔ $C(۷,۹)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید.

نقطهٔ D محل برخورد دوپاره خط AD و CD است اگر معادله ی خط ها گذرنده از این دو خط را به دست آوریم و نقطه ی برخورد آن ها را بیابیم مختصات D به دست می آید.

$$m_{CD}=\frac{۳}{۵}\ ,\ ۹=\frac{۳}{۵}\times ۷+h\xrightarrow{\times ۵}۴۵=۲۱+۵h\Rightarrow h=\frac{۲۴}{۵}\Rightarrow y=\frac{۳}{۵}x+\frac{۲۴}{۵}\xrightarrow{\times ۵}۳x-۵y=-۲۴$$

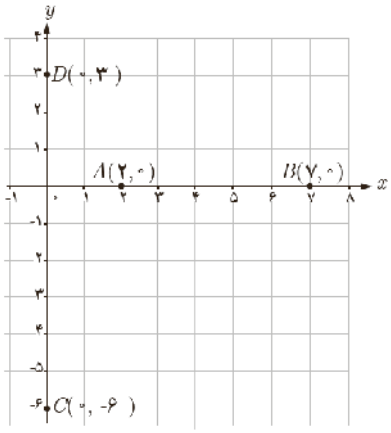
$$m_{AD}=\frac{-۵}{۳}\ ,\ ۱=\frac{-۵}{۳}\times ۵+h\xrightarrow{\times ۳}۳=-۲۵+۳h\Rightarrow h=\frac{۲۸}{۳}\Rightarrow y=-\frac{۵}{۳}x+\frac{۲۸}{۳}\xrightarrow{\times ۳}۵x+۳y=۲۸$$

$$\begin{cases}۵x+۳y=۲۸\\ ۳x-۵y=-۲۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲۵x+۱۵y=۱۴۰\\ ۹x-۱۵y=-۷۲\end{cases}\Rightarrow ۳۴x=۶۸\Rightarrow x=۲\Rightarrow ۵\times ۲+۳y=۲۸\Rightarrow y=۶\Rightarrow D(۲,۶)$$

فاصلهٔ دو نقطه

فعالیت

شکل مقابل را در نظر بگیرید.

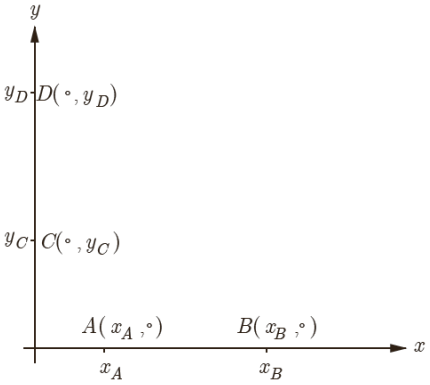


الف) فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B که برابر طول پاره‌خط AB است، برابر ۵ است. چه رابطه‌ای بین این عدد با x_A و x_B وجود دارد؟

$$AB = |x_B - x_A| = |۷ - ۲| = |۵| = ۵$$
$$BA = |x_A - x_B| = |۲ - ۷| = |-۵| = ۵$$

ب) فاصلهٔ دو نقطهٔ C و D را برحسب عرض آنها بیان کنید.

$$DC = |y_D - y_C| = |۳ - (-۶)| = |۹| = ۹$$
$$CD = |y_C - y_D| = |-۶ - ۳| = |-۹| = ۹$$



پ) در شکل مقابل، فاصلهٔ نقاط A و B را برحسب طول آنها و فاصلهٔ دو نقطهٔ C و D را برحسب عرض آنها به‌دست آورید.

$$AB = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|$$
$$CD = |y_D - y_C| = |y_C - y_D|$$

در حالت کلی می‌توان گفت :

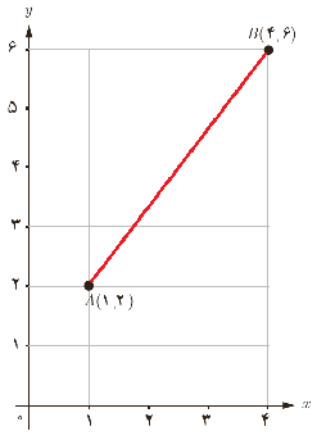
۱ــ اگر A و B دو نقطهٔ هم‌عرض در صفحه باشند، آن‌گاه $AB = |x_A - x_B|$

۲ــ اگر C و D دو نقطهٔ هم‌طول در صفحه باشند، آن‌گاه $CD = |y_C - y_D|$

چون طول پاره خط AB با طول پاره خط BA برابر است و همواره عددی مثبت است پس باید از قدر مطلق استفاده کنیم.(برای پاره خط CD هم همینطور)

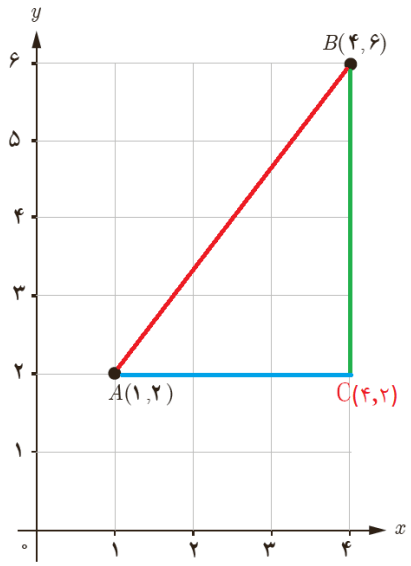
فعالیت کلاسی

۱ در شکل مقابل فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B را با خط‌کش به‌دست آورید.



طول پاره خط مساوی ۵ سانتی متر است.

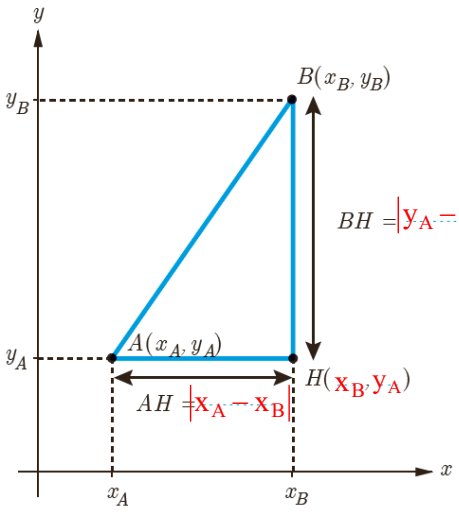
۲ بدون استفاده از خط‌کش و تنها با محاسبه، طول پاره‌خط AB را به‌دست آورید. از چه رابطه‌ای استفاده می‌کنید؟



از نقطهٔ B برمحور x ها و از نقطهٔ A بر محور y ها عمود می کنیم تا نقطهٔ C به دست آید . سپس به کمک قضیه فیثاغورس داریم:

$$AB = \sqrt{۹+۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

۳ در شکل مقابل :



الف) مختصات نقطهٔ H را بنویسید.

$$H(x_B, y_A)$$

ب) طول پاره‌خط‌های AH و BH را مشخص کنید و روی شکل بنویسید.

$$BH = |y_A - y_B|$$

پ) طول AB را به کمک قضیهٔ فیثاغورس به‌دست آورید.

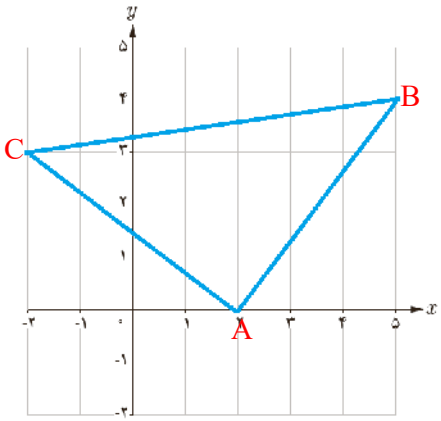
$$B = \sqrt{AH^۲ + BH^۲} = \sqrt{|x_A - x_B|^۲ + |y_A - y_B|^۲} = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲}$$

با توجه به فعالیت قبل می‌توان گفت :

فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A,y_A)$ و $B(x_B,y_B)$ برابر است با $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲}$.

کار در کلاس

۱ نقاط $A(۲,۰)$، $B(۵,۴)$ و $C(-۲,۳)$ را در نظر بگیرید و آنها را روی دستگاه مختصات مشخص کنید.



الف) محیط مثلث ABC را با محاسبهٔ طول اضلاع آن به دست آورید.

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(۲-۵)^۲+(۰-۴)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

$$AC=\sqrt{(x_A-x_C)^۲+(y_A-y_C)^۲}=\sqrt{(۲+۲)^۲+(۰-۳)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

$$BC=\sqrt{(x_B-x_C)^۲+(y_B-y_C)^۲}=\sqrt{(۵+۲)^۲+(۴-۳)^۲}=\sqrt{۴۹+۱}=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$$

محیط: $P=۵+۵+۵\sqrt{۲}=۱۰+۵\sqrt{۲}$

ب) ABC چه نوع مثلثی است؟

مثلث متساوی الساقین است .

پ) به دو روش نشان دهید $\overset{\Delta}{ABC}$ یک مثلث قائم‌الزاویه است. سپس مساحت آن را حساب کنید.

الف) طول اضلاع مثلث در قضیه فیثاغورس صدق می کند: $۵^۲+۵^۲=۲۵\Rightarrow AB^۲+AC^۲=BC^۲$

ب) دو خط گذرنده از پاره خط های AB و AC بر هم عمود هستند زیراحاصل ضرب شیب این خط ها برابر با ۱- است:

$$m_{AB}=\frac{۴-۰}{۵-۲}=\frac{۴}{۳}\ ,\ m_{AC}=\frac{۳-۰}{-۲-۲}=\frac{-۳}{۴}\Rightarrow m_{AB}\times m_{AC}=\frac{۴}{۳}\times\frac{-۳}{۴}=-۱$$

$$S=\frac{۱}{۲}\times AC\times AB\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times۵\times۵=۱۲/۵$$

۲ در یکی از جاده‌های کشور تصادفی رخ داده است که مختصات نقطهٔ تصادف بر روی نقشهٔ مرکز امداد به صورت $P(۵۰,۳۰)$ است. نزدیک‌ترین پایگاه‌های امداد هوایی به محل تصادف در نقاط $A(۱۰,-۲۰)$ و $B(۸۰,۹۰)$ واقع‌اند. شما کدام پایگاه را برای اعزام بالگردِ امداد به محل حادثه پیشنهاد می‌کنید؟ (اعداد برحسب کیلومتر هستند).

$$\left.\begin{aligned}PA&=\sqrt{(x_A-x_P)^۲+(y_A-y_P)^۲}=\sqrt{(۵۰-۱۰)^۲+(۳۰-(-۲۰))^۲}=\sqrt{۱۶۰۰+۲۵۰۰}=\sqrt{۴۱۰۰}=۱۰\sqrt{۴۱}\\PB&=\sqrt{(x_B-x_P)^۲+(y_B-y_P)^۲}=\sqrt{(۵۰-۸۰)^۲+(۳۰-۹۰)^۲}=\sqrt{۹۰۰+۳۶۰۰}=\sqrt{۴۵۰۰}=۱۰\sqrt{۴۵}\end{aligned}\right\}\Rightarrow PB>PA$$

پایگاه A را پیشنهاد می دهم زیرا به محل نزدیک تر حادثه است.

۳ الف) فاصلهٔ نقطهٔ $N(-۶,۸)$ تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

$$ON = \sqrt{(x_N - x_O)^۲ + (y_N - y_O)^۲} = \sqrt{(-۶ - ۰)^۲ + (۸ - ۰)^۲} = \sqrt{۳۶ + ۶۴} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$$

ب) فاصلهٔ نقطهٔ $E(x_E, y_E)$ تا مبدأ مختصات را به دست آورید.

$$OE = \sqrt{(x_E - x_O)^۲ + (y_E - y_O)^۲} = \sqrt{(x_E - ۰)^۲ + (y_E - ۰)^۲} = \sqrt{x_E^۲ + y_E^۲} \Rightarrow OE = \sqrt{x_E^۲ + y_E^۲}$$

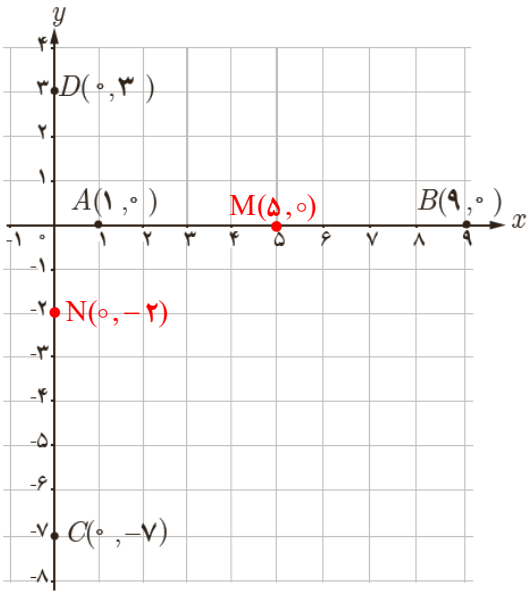
مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط

فعالیت

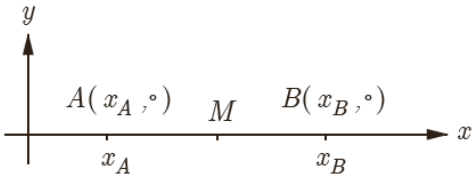
این شکل را در نظر بگیرید.

الف) نقطهٔ وسط پاره‌خط AB را M بنامید. M را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.

ب) نقطهٔ وسط پاره‌خط CD را N بنامید و N را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.



پ) مطابق شکل، A و B دو نقطهٔ دلخواه روی محور xها هستند. اگر M وسط AB باشد، طول نقطهٔ M را به دست آورید.

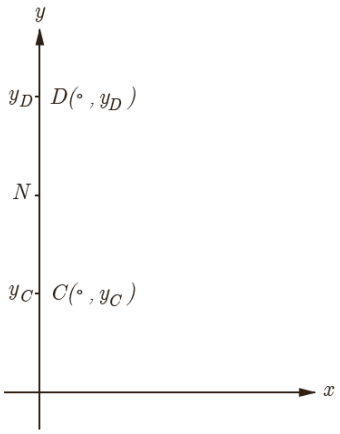


$$AB \text{ وسط } M \Rightarrow AM = MB$$

$$\Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M$$

$$\Rightarrow ۲x_M = x_A + x_B \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$$

ت) در شکل مقابل، C و D دو نقطهٔ دلخواه روی محور yها هستند. اگر N وسط CD باشد، عرض نقطهٔ N را بیابید.

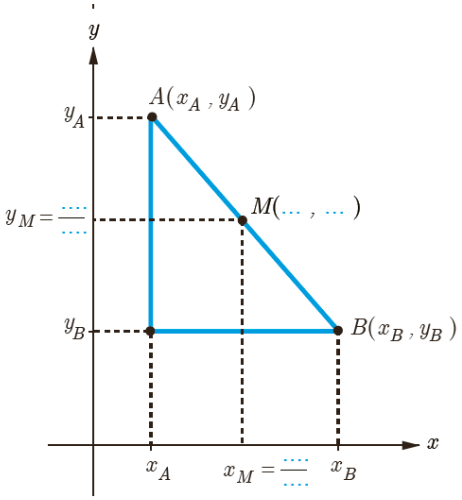


N وسط $CD \Rightarrow$ CN = ND

$\Rightarrow y_N - y_C = y_D - y_N$

$\Rightarrow ۲y_N = y_C + y_D \Rightarrow y_N = \frac{y_C + y_D}{۲}$

ث) اگر A و B دو نقطهٔ دلخواه در صفحهٔ مختصات باشند و M نقطهٔ وسط AB، آنگاه با توجه به شکل مقابل می‌توان نشان داد :

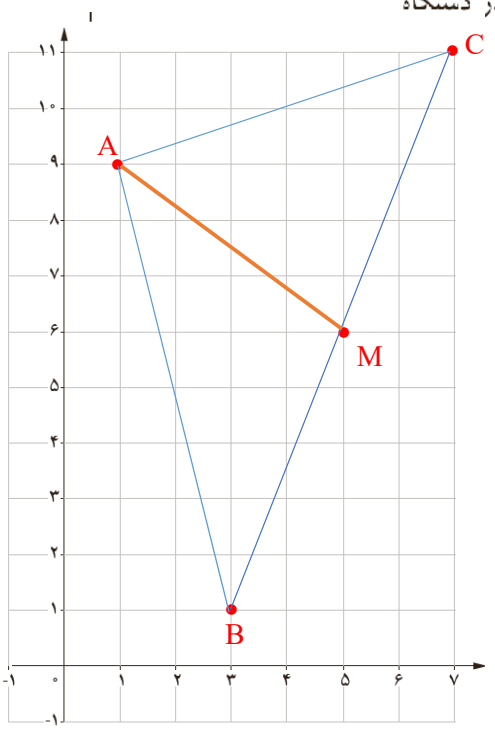


مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB عبارت است از $M(\frac{x_A + x_B}{۲} , \frac{y_A + y_B}{۲})$.

$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}$ ، $y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} \Rightarrow M(\frac{x_A + x_B}{۲} , \frac{y_A + y_B}{۲})$

کار در کلاس

۱ مثلث با رئوس $A(۱,۹)$، $B(۳,۱)$ و $C(۷,۱۱)$ را در نظر بگیرید و آنها را در دستگاه محورهای مختصات مقابل مشخص کنید.



الف) مختصات M، نقطهٔ وسط ضلع BC را مشخص کنید.

$M = (\frac{۳ + ۷}{۲} , \frac{۱ + ۱۱}{۲}) = (۵ , ۶)$

ب) طول میانهٔ AM را محاسبه کنید.

در این قسمت یاد آوری میانه مثلث ضروری به نظر می رسد.

(پاره خطی که وسط یک ضلع را به رأس مقابل آن ضلع وصل می کند.)

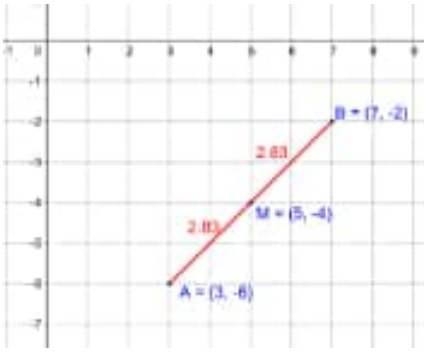
$AM = \sqrt{(۵ - ۱)^۲ + (۶ - ۹)^۲} = \sqrt{۱۶ + ۹} = ۵$

پ) معادلهٔ میانهٔ AM را به دست آورید.

$m_{AM} = \frac{۹ - ۶}{۱ - ۵} = \frac{-۳}{۴} \Rightarrow y - ۶ = \frac{-۳}{۴}(x - ۵)$

$\Rightarrow y = -\frac{۳}{۴}x + \frac{۳۹}{۴}$ ، $۳x + ۴y = ۳۹$

۲ الف) نقطهٔ $N(۵,-۴)$ وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ A و $B(۷,-۲)$ است. مختصات نقطهٔ A را بیابید.

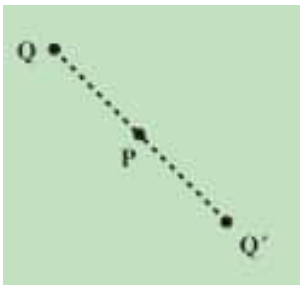


چون N وسط پاره خط AB است پس داریم :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow ۵ = \frac{x_A + ۷}{۲} \Rightarrow x_A = ۳$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} \Rightarrow -۴ = \frac{y_A + (-۲)}{۲} \Rightarrow y_A = -۶$$

ب) قرینهٔ نقطهٔ $A(۱,۲)$ نسبت به نقطهٔ $M(-۱,۴)$ را به دست آورید.



یاد آوری قرینه ی نقطه ای نسبت به یک نقطه ی دیگر در صفحه :

در شکل مقابل نقطه ی Q' قرینه ی نقطه ی Q نسبت به نقطه ی P است به شرطی که PQ=PQ' در نتیجه می بینیم که نقطه ی P وسط دو نقطه ی Q و Q' است .

قرینه ی نقطه ی A را A' می نامیم و با توجه به مطالب فوق داریم :

AM=A'M پس M وسط AA' در نتیجه:

$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{۲} \Rightarrow -۱ = \frac{x_A + ۱}{۲} \Rightarrow x_A = -۳$$

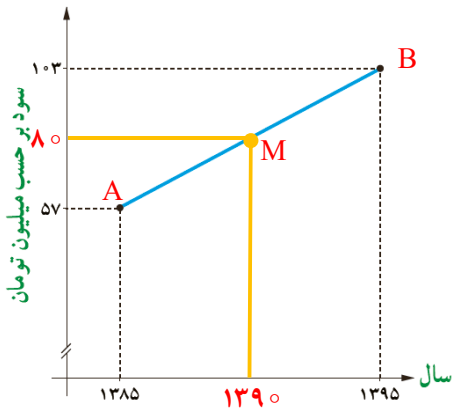
$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{۲} \Rightarrow ۴ = \frac{y_A + ۲}{۲} \Rightarrow y_A = ۶$$

پ) قرینهٔ نقطهٔ $P(\alpha\ ,\ \beta)$ نسبت به مبدأ مختصات را به‌دست آورید.

$$\left.\begin{array}{l} x_O = \frac{x_P + x_{P'}}{۲} \Rightarrow ۰ = \frac{\alpha + x_{P'}}{۲} \Rightarrow x_{P'} = -\alpha \\ y_O = \frac{y_P + y_{P'}}{۲} \Rightarrow ۰ = \frac{\beta + y_{P'}}{۲} \Rightarrow y_{P'} = -\beta \end{array}\right\} \Rightarrow P'(-\alpha\ ,-\beta)$$

۳ سود سالانهٔ یک کارگاه کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار مقابل سیر صعودی داشته است. به کمک رابطهٔ نقطهٔ وسط پاره‌خط، به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) میانگین سود سالانهٔ این شرکت در دههٔ مورد نظر چقدر بوده است؟



برای محاسبه ی میانگین سود سالانه باید مقدار عرض نقطه ی وسط پاره خط آبی رنگ را به دست آوریم:

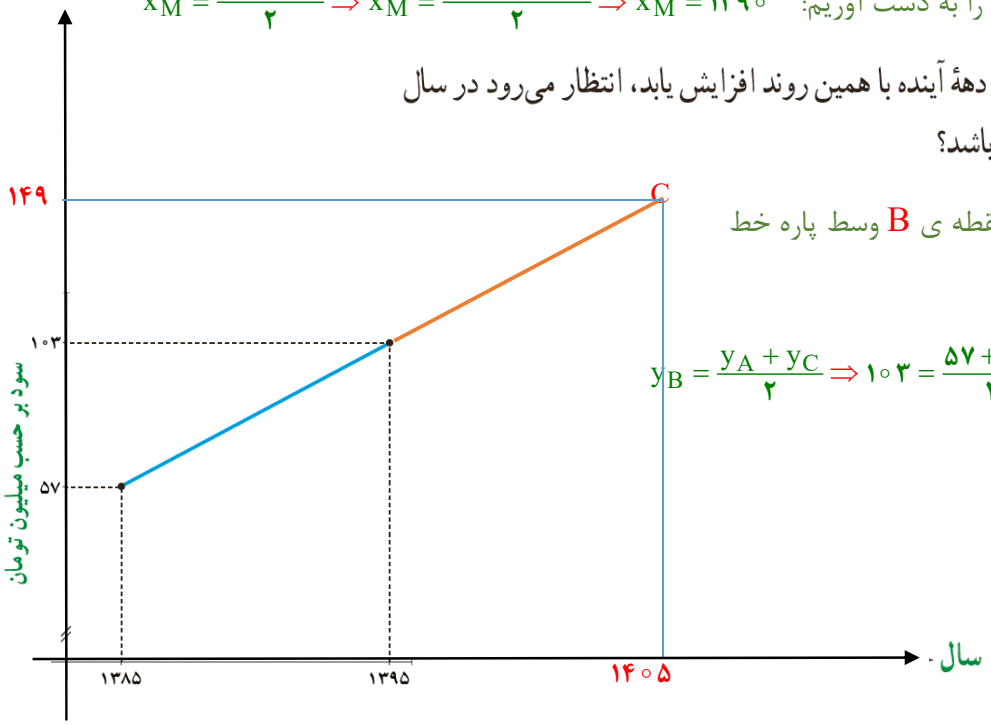
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} \Rightarrow y_M = \frac{۵۷ + ۱۰۳}{۲} \Rightarrow y_M = ۸۰$$

ب) در کدام سال، مقدار سود سالانه، با این میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

برای اینکه بفهمیم در کدام سال مقدار سود سالانه با این میانگین برابر بوده باید

طول نقطه ی وسط پاره خط آبی را به دست آوریم: $x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow x_M = \frac{۱۳۸۵ + ۱۳۹۵}{۲} \Rightarrow x_M = ۱۳۹۰$

پ) اگر سود سالانه در طول یک دهۀ آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می‌رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانه شرکت چقدر باشد؟



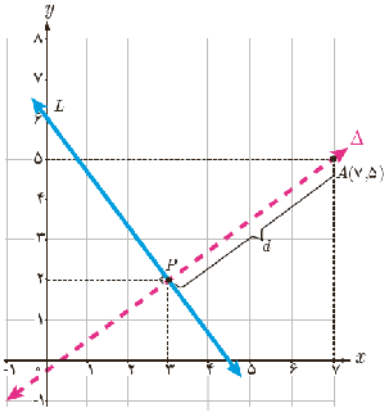
با توجه به شکل واضح است که نقطه ی B وسط پاره خط AC است .

$y_B = \frac{y_A + y_C}{۲} \Rightarrow ۱۰۳ = \frac{۵۷ + y_C}{۲} \Rightarrow y_C = ۲۰۶ - ۵۷ = ۱۴۹$

فاصلهٔ نقطه از خط

اگر A نقطه‌ای خارج خط L باشد، فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط L برابر است با طول پاره‌خطی که از A عمود بر L رسم می‌شود. در اینجا می‌خواهیم با داشتن مختصات نقطهٔ A و معادلهٔ خط L این فاصله را محاسبه کنیم.

مثال : فاصلهٔ نقطهٔ $A(۷,۵)$ را از خط L به معادلهٔ $۴x + ۳y = ۱۸$ به دست آورید.



حل : چون شیب خط L برابر $\frac{-۴}{۳}$ است، پس هر خطِ عمود بر آن دارای شیب $\frac{۳}{۴}$ خواهد بود. معادلهٔ خط Δ گذرنده از A و عمود بر L را می‌نویسیم.

$$\Delta : y = \frac{۳}{۴}x + h$$

$$\Delta \text{ روی } A(۷,۵): \ ۵ = \frac{۳}{۴}(۷) + h \Rightarrow h = \frac{-۱}{۴}$$

$$\Delta \text{ معادله: } y = \frac{۳}{۴}x - \frac{۱}{۴} \Rightarrow \Delta : ۳x - ۴y = ۱$$

اگر معادلهٔ دو خط L و Δ را به صورت یک دستگاه معادلات خطی در نظر بگیریم، از حل آن مختصات نقطهٔ P، محل برخورد دو خط به دست می‌آید.

$$\begin{cases} L : ۴x + ۳y = ۱۸ \\ \Delta : ۳x - ۴y = ۱ \end{cases} \Rightarrow x = ۳ \ , \ y = ۲ \Rightarrow P(۳,۲)$$

طول پاره‌خط AP جواب مسئله است.

$$AP=\sqrt{(x_A-x_P)^۲+(y_A-y_P)^۲}=\sqrt{(۷-۳)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

با به‌کارگیری مراحل حل این مثال در حالت کلی می‌توان ثابت کرد[۱] :

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ برابر است با :

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

حال مثال قبل را به کمک این رابطه حل می‌کنیم؛ یعنی فاصلهٔ $A(۷,۵)$ را از خط به معادلهٔ $۴x+۳y-۱۸=۰$ به دست می‌آوریم :

$$d=\frac{|۴(۷)+۳(۵)-۱۸|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{|۲۵|}{۵}=۵$$

کار در کلاس

۱ فاصلهٔ نقطهٔ $P(۷,-۴)$ را از هر یک از خطوط با معادله‌های زیر به‌دست آورید :

الف) $L: ۲x+y=۵$

$$۲x+y-۵=۰\Rightarrow a=۲,\ b=۱,\ c=-۵,\ d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

$$d=\frac{|۲(۷)+۱(-۴)-۵|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}\Rightarrow d=\sqrt{۵}$$

ب) $T: x=۵$

$$x-۵=۰\Rightarrow a=۱,\ b=۰,\ c=-۵,\ d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

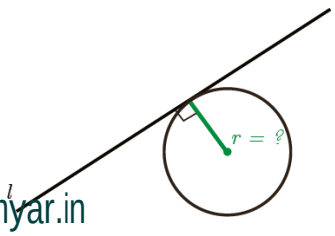
$$d=\frac{|۱(۷)+۰\times(-۴)-۵|}{\sqrt{۱+۰}}=\frac{۴}{\sqrt{۱}}=۴\Rightarrow d=۴$$

پ) $\Delta: y=۰$

$$\Rightarrow a=۰,\ b=۱,\ c=۰,\ d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

$$d=\frac{|۰\times(۷)+۱(-۴)+۰|}{\sqrt{۰+۱}}=\frac{۴}{\sqrt{۱}}=۴\Rightarrow d=۴$$

۲ خط $L: ۳x-۴y=۰$ بر دایره‌ای به مرکز $W(۲,-۱)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.
(راهنمایی : خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود است).



پس باید با توجه به راهنمایی که کرده فاصله ی نقطه ی مرکز را از خط l به دست آوریم.

$$r=\frac{|۳\times۲+(-۴)\times(-۱)+۰|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۰}{۵}\Rightarrow r=۲$$

hamyar.in
همیار

حل تمرینات صفحه ی ۹

تمرین

۱ وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

$L: ۲x - y = ۱ \quad m_L = ۲$

$T: y = ۲x - ۳ \quad m_T = ۲$

$\Delta: x + ۲y = ۰ \quad m_\Delta = -\frac{۱}{۲}$

با توجه به شیب های خط ها : خط L موازی خط T است و خط Δ بر دو خط L و T عمود است.

۲ دو نقطهٔ $A(۱۴, ۳)$ و $B(۱۰, -۱۳)$ را در نظر بگیرید. فاصلهٔ مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB به‌دست آورید.

اگر نقطه ی M وسط پاره خط AB باشد . پس : $M(\frac{۱۴+۱۰}{۲}, \frac{۳-۱۳}{۲}) \Rightarrow M(۱۲, -۵)$

فاصله ی مبدأ از نقطه ی M : $OM = \sqrt{۱۲^۲ + (-۵)^۲} = \sqrt{۱۴۴ + ۲۵} = ۱۳$

۳ نشان دهید مثلث با رئوس $A(۱, ۲)$، $B(۵, ۲)$ و $C(۱, ۴)$ یک مثلث متساوی‌الساقینِ قائم‌الزاویه است.

$$\left.\begin{aligned} AB &= \sqrt{(۲-۱)^۲ + (۵-۲)^۲} = \sqrt{۱+۹} = \sqrt{۱۰} \\ AC &= \sqrt{(۴-۱)^۲ + (۱-۲)^۲} = \sqrt{۹+۱} = \sqrt{۱۰} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB = AC$$

راه اول :

$$m_{AB} = \frac{۵-۲}{۲-۱} = ۳ \ , \ m_{AC} = \frac{۱-۲}{۴-۱} = -\frac{۱}{۳}$$

$$m_{AB} \times m_{AC} = ۳ \times -\frac{۱}{۳} = -۱$$

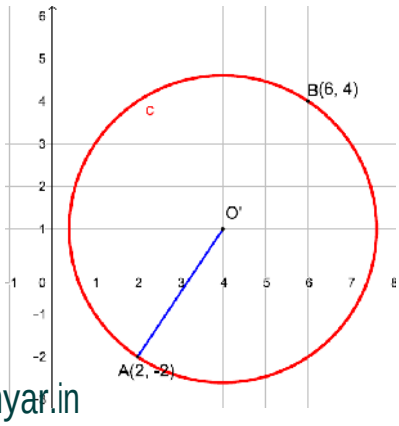
راه دوم :

$$BC = \sqrt{(۴-۲)^۲ + (۱-۵)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰}$$

$$(\sqrt{۱۰})^۲ + (\sqrt{۱۰})^۲ = (\sqrt{۲۰})^۲ \Rightarrow AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$$

۴ دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(-۲, ۲)$ و $B(۶, ۴)$ هستند.

الف) اندازهٔ شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

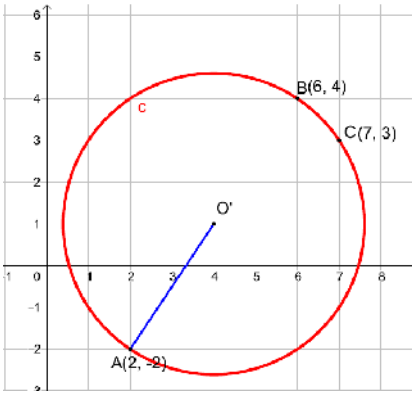


مختصات مرکز دایره نقطه وسط قطر یعنی وسط پاره خط AB است :

$$O'(\frac{۲+۶}{۲}, \frac{۴-۲}{۲}) \Rightarrow O'(۴, ۱) \quad ,$$

$$O'A = \sqrt{(x_A - x_{O'})^۲ + (y_A - y_{O'})^۲} \Rightarrow O'A = \sqrt{۴+۹} = \sqrt{۱۳}$$

hamyar.in
همیار



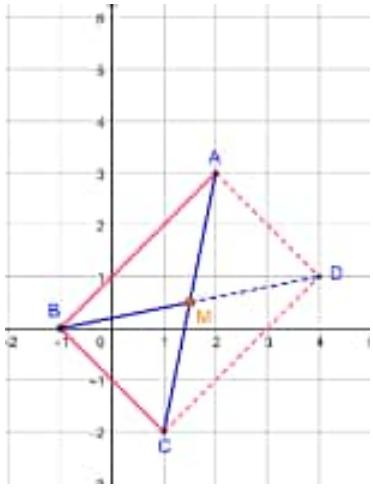
ب) آیا نقطهٔ $C(۷\ ,\ ۳)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

C روی دایره باشد باید OC نیز برابر با طول شعاع دایره باشد :

$$O'C = \sqrt{(۴-۷)^۲ + (۱-۳)^۲} = \sqrt{۱۳}$$

۵ نقاط $A(۲\ ,\ ۳)$، $B(-۱\ ,\ ۰)$ و $C(۱\ ,\ -۲)$ سه رأس از مستطیل $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم آن را بیابید. (با دانستن این مطلب که در هر مستطیل، قطرها منصف یکدیگرند، آیا می‌توانید راه‌حل کوتاه‌تری برای مسئله ارائه کنید؟)

محل برخورد قطر ها را M می نامیم و مختصات آن را با داشتن مختصات دو سر پاره خط AC به دست می آوریم. حالا می دانیم که نقطه ی M وسط قطر دیگر هم هست باز به کمک فرمول می توانیم مختصات رأس چهارم D را بیابیم.



$$MA = MC \Rightarrow M\left(\frac{۲+۱}{۲}\ ,\ \frac{۳+(-۲)}{۲}\right) \Rightarrow M\left(\frac{۳}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$$

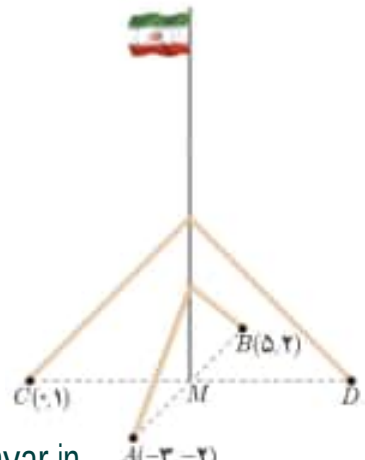
$$MB = MD \Rightarrow x_D = ۲x_M - x_B \Rightarrow x_D = ۲\times\frac{۳}{۲} - (-۱) = ۴$$

$$\Rightarrow y_D = ۲y_M - y_B \Rightarrow y_D = ۲\times\frac{۱}{۲} - ۰ = ۱ \Rightarrow D(۴,۱)$$

راه کوتاه تر :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \begin{cases} x_D - x_A = x_C - x_B \\ y_D - y_A = y_C - y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D - ۲ = ۲ \Rightarrow x_D = ۴ \\ y_D - ۳ = -۲ \Rightarrow y_D = ۱ \end{cases} \Rightarrow D(۴\ ,\ ۱)$$

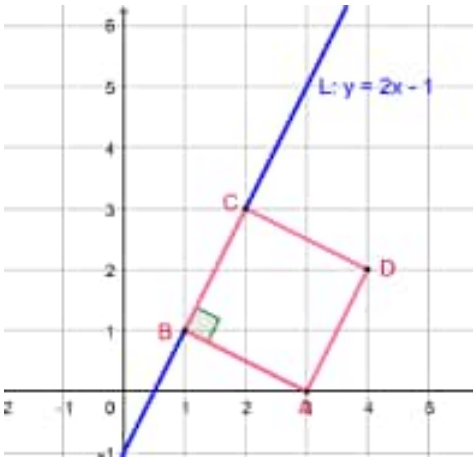
۶ یک میلهٔ پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است به طوری که فاصلهٔ هر نقطه تا میله برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ مقابل آن تا میله. مختصات نقطهٔ D را به‌دست آورید.



$$MA = MB \Rightarrow M\left(\frac{-۳+۵}{۲}\ ,\ \frac{۲-۲}{۲}\right) \Rightarrow M(۱,۰)$$

$$\left.\begin{array}{l} MC = MD \Rightarrow x_D = ۲x_M - x_C \Rightarrow x_D = ۲-۰ = ۲ \\ MC = MD \Rightarrow y_D = ۲y_M - y_C \Rightarrow y_D = ۰-۱ = -۱ \end{array}\right\} \Rightarrow D(۲,-۱)$$

۷ یکی از اضلاع مربعی بر خط $L : y=۲x-۱$ واقع است. اگر $A\ (۳\ ,\ ۰)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.



نقطه ی A روی خط قرار ندارد بنا براین از A بر خط L عمود می کنیم .

فاصله ی این نقطه از خط طول ضلع مربع است.

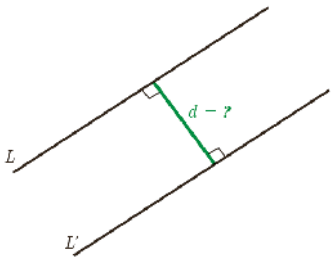
$$A(۳,۰)=(x_۰,y_۰)\ ,\ ۲x-y-۱=۰$$

$$AB=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\Rightarrow AB=\frac{|۲\times۳+(-۱)\times۰+(-۱)|}{\sqrt{۴+۱}}\Rightarrow d=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

$$S=AB^۲\Rightarrow S=۵$$

۸ الف) نشان دهید دو خط با معادلات $۵x-۱۲y+۸=۰$ و $-۱۰x+۲۴y+۱۰=۰$ با یکدیگر موازی‌اند.

ب) فاصلهٔ این دو خط را محاسبه کنید. (راهنمایی : یک نقطهٔ دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصله آن را از خط دیگر به دست آورید).

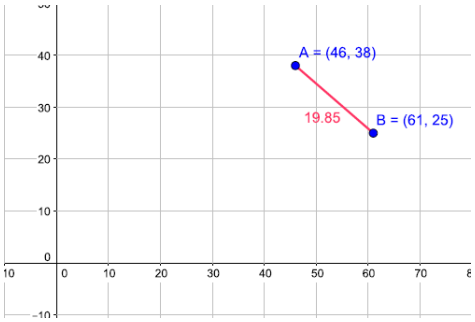


$$\left.\begin{array}{l}۵x-۱۲y+۸=۰\Rightarrow -۱۲y=-۵x-۸\xrightarrow{\div ۱۲}y=\frac{۵}{۱۲}x+\frac{۸}{۱۲}\Rightarrow m=\frac{۵}{۱۲}\\ -۱۰x+۲۴y+۱۰=۰\Rightarrow ۲۴y=۱۰x-۱۰\xrightarrow{\div ۲۴}y=\frac{۱۰}{۲۴}x-\frac{۱۰}{۲۴}\Rightarrow m'=\frac{۵}{۱۲}\end{array}\right\}\Rightarrow m=m'$$

$$x=۱\Rightarrow -۱۰\times۱+۲۴y+۱۰=۰\Rightarrow y=۰\Rightarrow A(۱,۰)$$

$$d=\frac{|۵(۱)-۱۲(۰)+۸|}{\sqrt{۱+۰}}=۱$$

۹ طول جغرافیایی تبریز تقریباً ۴۶ درجهٔ شرقی و عرض جغرافیایی آن حدود ۳۸ درجهٔ شمالی است. برای راحتی، می‌توانیم موقعیت این شهر را به‌طور خلاصه، به صورت $(۳۸\ ,\ ۴۶)$ نشان دهیم. این اطلاعات دربارهٔ چابهار به صورت $(۲۵\ ,\ ۶۱)$ است. با فرض اینکه مسافت فیزیکی هر درجه طول جغرافیایی همانند مسافت فیزیکی هر درجه عرض جغرافیایی برابر ۱۱۰ کیلومتر باشد، مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ تقریبی این دو شهر.



$$AB=\sqrt{(۶۱-۴۶)^۲+(۲۵-۳۸)^۲}=\sqrt{۲۲۵+۱۶۹}=\sqrt{۳۹۴}\simeq ۱۹/۸۵$$

$$۱۱۰\times۱۹/۸۵=۲۱۸۳/۵$$

$$AB=\sqrt{(۶۱\times۱۱۰-۴۶\times۱۱۰)^۲+(۲۵\times۱۱۰-۳۸\times۱۱۰)^۲}$$

$$=\sqrt{(۱۱۰)^۲\times۲۲۵+(۱۱۰)^۲\times۱۶۹}=۱۱۰\times\sqrt{۳۹۴}\simeq ۱۱۰\times۱۹/۸۵=۲۱۸۳/۵$$