درس دوم

تابع درجه ۲ و معادلهٔ درجه دوم

روش تغییر متغیر برای حل معادله

در پایهٔ دهم روش‌های مختلفی را برای حل معادلهٔ درجه ۲ آموختیم. یکی از دلایل اهمیّت این معادلات آن است که معادلات دیگری نیز وجود دارند که قابل تبدیل به معادلهٔ درجه دوم‌اند؛ مانند معادلات گویا و گنگ که درس سوم به آنها اختصاص یافته است. در اینجا با روش تغییر متغیر برای حل دستهٔ خاصّی از معادله‌ها[1] آشنا می‌شویم که یک شیوهٔ کارآمد برای حل انواع معادله است.

مثال : معادلهٔ مقابل را حل کنید. $x^4-10x^2+9=0$

حل : با وجود آنکه این معادله از نوع درجهٔ ۴ است، می‌توان آن را به روش معادله درجهٔ دوم حل کرد. بـرای ایـن کـار بـه جای عبارت x^2، متغیر (مجهول) جدیدی مثل u قرار می‌دهیم. به این کار تغییر متغیر می‌گوییم.

$$x^2=u \Rightarrow u^2-10u+9=0$$

این معادله را به روش کلی و همچنین به روش تجزیه حل می‌کنیم :

(روش کلی)

$$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4(1)(9)=64$$

$$u=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=1 \Rightarrow x^2=1 \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \\ u=9 \Rightarrow x^2=9 \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases} \end{cases}$$

(روش تجزیه)

$$(u-1)(u-9)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \\ u=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases} \end{cases}$$

کار در کلاس

معادله‌های مقابل را حل کنید.

الف) $2x^4-7x^2-4=0$

$$2x^4-7x^2-4=0 \Rightarrow x^2=u \Rightarrow 2u^2-7u-4=0$$

$$\Rightarrow \Delta=(-7)^2-4(2)(-4)=81 \Rightarrow u=\frac{-(-7)\pm 9}{4} \Rightarrow u_1=4\ ,\ u_2=\frac{-1}{2}$$

$$x^2=u \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \quad , \quad x^2\neq\frac{-1}{2}$$

ب) $x^4+3x^2+2=0$

$$x^4+3x^2+2=0 \Rightarrow x^2=u \Rightarrow u^2+3u+2=0$$

$$\Rightarrow (u+1)(u+2)=0 \Rightarrow u_1=-1 \quad , \quad u_2=-2$$

$x^2=-1 \quad , \quad x^2=-2$ معادله ریشه ندارد

hamyar.in
همیار

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲

گاهی به جای مقدار دقیق ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ ۲، تنها مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها اهمیت دارد که در این صورت بدون حل معادله می‌توان این مقادیر را به دست آورد. معمولاً مجموع دو ریشه را با S و حاصل‌ضرب آنها را با P نمایش می‌دهیم[1]؛ یعنی اگر α و β ریشه‌های معادله باشند : $\alpha+\beta=S$ و $\alpha\beta=P$.

فعالیت

می‌دانیم که معادلهٔ درجهٔ دوم در حالت کلی به صورت مقابل است : $(1)\ ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$

۱ می‌خواهیم بررسی کنیم که چگونه می‌توان بدون حل این معادله دربارهٔ وجود و تعداد جواب‌های حقیقی آن اظهار نظر کرد.

الف) در این معادله اگر ضرایب a و c هم‌علامت نباشند، دربارهٔ علامت Δ چه می‌توان گفت؟

چون a و c مختلف العلامه هستند بنا براین حاصل ضرب آن ها منفی است در نتیجه در فرمول دلتا مقدار ۴ac منفی است یعنی ‎−۴ac‎ مثبت است و b^2 هم که همواره مثبت است پس مجموع دو عبارت مثبت ، مثبت می شود ، در نتیجه Δ مثبت است.

$$ac<0 \Rightarrow 4ac<0 \Rightarrow -4ac>0 \Rightarrow b^2-4ac>b^2>0 \Rightarrow \Delta>0$$

ب) اگر a و c هم‌علامت نباشند، آنگاه معادلهٔ (۱) دارای ...دو... ریشهٔ حقیقی متمایز است.

۲ معادلهٔ مقابل را در نظر می‌گیریم : $3x^2+5x-1=0$

الف) توضیح دهید که چرا این معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.

$a=3$ و $c=-1$ پس با توجه به بند ۱ قسمت (ب) فعالیت Δ بزرگ تر از صفر است پس معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.

ب) آیا بین ضرایب معادله و مجموع ریشه‌ها (S) رابطه‌ای وجود دارد؟ برای پاسخ به این سؤال، معادله را حل می‌کنیم :

$$\Delta=b^2-4ac=37$$

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5+\sqrt{37}}{6}\\[2mm] \beta=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5-\sqrt{37}}{6}\end{cases}$$

$$S=\alpha+\beta=\frac{-5+\sqrt{37}}{6}+\frac{-5-\sqrt{37}}{6}=\frac{-5}{3}$$

ملاحظه می‌شود که : $S=-\dfrac{b}{a}$.

پ) درستی نتیجه فوق را در معادلهٔ زیر هم بررسی می‌کنیم :

$$۳x^۲ - ۷x = ۰ \Rightarrow x(۳x - ۷) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۰ \\ \beta = \frac{۷}{۳} \end{cases}$$

$$S = \alpha + \beta = ۰ + \frac{۷}{۳} = \frac{۷}{۳} = -\frac{b}{a}$$

ت) درستی نتیجهٔ بالا را در حالت کلی ثابت می‌کنیم. فرض کنیم برای معادلهٔ (۱)، مقدار Δ مثبت باشد.

پس معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز مثل α و β دارد :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} \\ \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} \end{array}\right\} \Rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = -\frac{b}{a}$$

ث) با مفروضات قسمت قبل، ثابت کنید : $P = \alpha.\beta = \frac{c}{a}$

$$P = \alpha.\beta = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a}\right) = \frac{b^۲ - (b^۲ - ۴ac)}{۴a} = \frac{۴ac}{۴a} = \frac{c}{a}$$

با توجه به این فعالیت می‌توان گفت :

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $(a \neq ۰)$ $\quad ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، آنگاه :

$\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a}$ و $\alpha.\beta = P = \frac{c}{a}$

کار در کلاس

در معادلهٔ $-۲x^۲ + x + ۵ = ۰$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به‌دست آورید.

$a = -۲ \quad , \ b = ۱ , \quad c = ۵$

$s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow s = -\frac{۱}{-۲} \Rightarrow s = \frac{۱}{۲}$

$p = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow p = \frac{۵}{۲}$

تشکیل معادله درجه ۲ با استفاده از S و P

گاهی برای حل یک مسئله، لازم است برای آن معادله‌ای بنویسیم و سپس آن معادله را حل کنیم. در برخی موارد، این معادله درجه ۲ خواهد بود. مثلاً می‌خواهیم با مجموع و حاصل‌ضرب دو عدد، معادلهٔ درجه دومی بسازیم که آن دو عدد ریشه‌های معادله باشند. برای این کار فرض می‌کنیم آن دو عدد (ریشه‌های معادله)، α و β باشند. معادلهٔ مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$(x-\alpha)(x-\beta)=۰ \quad \Rightarrow \quad x^۲-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=۰ \quad \Rightarrow \quad x^۲-Sx+P=۰$$

بنابراین نشان دادیم که :

> معادلهٔ درجهٔ دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن P باشد، به صورت $x^۲-Sx+P=۰$ است.

کار در کلاس

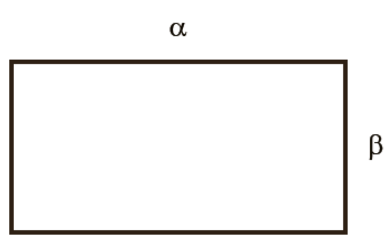
۱ دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها ۱/۵− و حاصل ضربشان ۷− باشد.

$P=-۱/۵ \;,\; P=-۷$

$\Rightarrow x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲+۱/۵x-۷=۰$

$\Delta=۲/۲۵+۲۸=۳۰/۲۵ \Rightarrow x=\dfrac{-۱/۵\pm ۵/۵}{۲} \Rightarrow x_۱=۲ \;,\; x_۲=-۳/۵$

۲ آیا مستطیلی با محیط ۱۱ cm و مساحت ۶ $cm^۲$ وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است، طول و عرض آن را مشخص کنید.



حل : اگر ابعاد مستطیل را α و β بنامیم، داریم :

$\text{محیط} = ۱۱ \Rightarrow ۲(\alpha+\beta)=۱۱ \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۱۱}{۲} \Rightarrow \beta=\frac{۱۱}{۲}-\alpha$

$\text{مساحت} = ۶ \Rightarrow \alpha.\beta=۶ \Rightarrow \alpha(\frac{۱۱}{۲}-\alpha)=۶$

الف) راه حل بالا را کامل کنید و α و β را بیابید.

$\alpha(\frac{۱۱}{۲}-\alpha)=۶ \Rightarrow -\alpha^۲+\frac{۱۱}{۲}\alpha-۶=۰ \Rightarrow \Delta=\frac{۲۵}{۴} \Rightarrow \alpha=\dfrac{-\frac{۱۱}{۲}\pm\frac{۵}{۲}}{-۲}$

$\Rightarrow \alpha=۴ \Rightarrow \beta=\frac{۳}{۲} \quad , \quad \alpha=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \beta=۴$

البته با توجه به شکل : $\alpha=۴ \Rightarrow \beta=\frac{۳}{۲}$

ب) با استفاده از S و P این مسئله را حل کنید.

$S=۵/۵ \;,\; P=۶ \Rightarrow x^۲-۵/۵x+۶=۰$

$\Delta=۳۰/۲۵-۲۴=۶/۲۵ \Rightarrow x=\dfrac{۵/۵\pm ۲/۵}{۲} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=۴\\ \beta=۱/۵\end{cases}$

۳ معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ باشند.

$$S=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}+\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}=۳ \quad , \quad P=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\times\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}=\frac{۹-۵}{۴}=۱$$

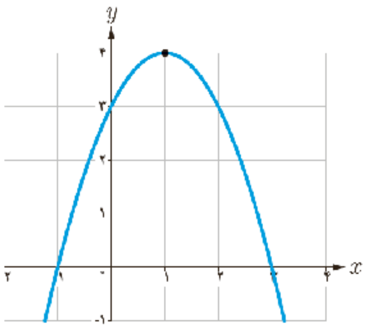
$$\Rightarrow x^۲-۳x+۱=۰$$

ماکزیمم و مینیمم سهمی

سهمی با ضابطهٔ $y=ax^۲+bx+c$ را در نظر می‌گیریم. از سال گذشته می‌دانیم که طول رأس این سهمی $x=-\frac{b}{۲a}$ است.

الف) اگر $a>۰$، آنگاه دهانهٔ سهمی رو به بالاست و به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ کمترین (مینیمم) مقدار سهمی به‌دست می‌آید.

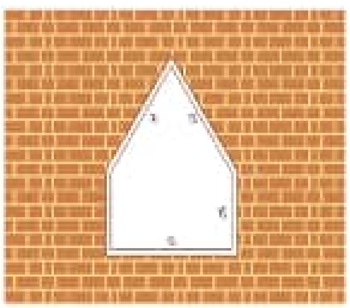
ب) اگر $a<۰$، آنگاه دهانهٔ سهمی رو به پایین است و به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ بیشترین (ماکزیمم) مقدار سهمی حاصل می‌شود.



مثال : ماکزیمم یا مینیمم تابع با ضابطه $f(x)=-x^۲+۲x+۳$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

حل : چون $a=-۱$ منفی است، پس دهانهٔ سهمی روبه پایین است و این سهمی ماکزیمم دارد. این تابع به ازای $x=-\frac{b}{۲a}=۱$ بیشترین مقدار خود را خواهد داشت که برابر است با $f(۱)=۴$.

تذکر : همچنان که در شکل دیده می‌شود، در این مثال نقطهٔ $(۱,۴)$ رأس سهمی و نقطهٔ ماکزیمم آن است. در این حالت منظور از مقدار ماکزیمم سهمی، عرض این نقطه، یعنی ۴ است.



مثال : یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره $۴m$ باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

حل : با توجه به شکل داریم : محیط پنجره $=۴ \Rightarrow ۳x+۲y=۴ \Rightarrow y=۲-\frac{۳}{۲}x$

از آنجا که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع x برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$ است (چرا؟)، می‌توان نوشت :

مساحت پنجره : $S=x.y+\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$

به‌جای y معادل آن را برحسب x قرار می‌دهیم.

$$S=x(۲-\frac{۳}{۲}x)+\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲=۲x-\frac{۳}{۲}x^۲+\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$$

$$S=\frac{\sqrt{۳}-۶}{۴}x^۲+۲x$$

این تابع دارای ماکزیمم است (چرا؟) و بیشترین مقدار آن به‌ازای $x=-\dfrac{b}{۲a}$ حاصل می‌شود.

$a=\dfrac{\sqrt{۳}-۶}{۴}<۰$ پس این تابع ماکزیمم دارد.

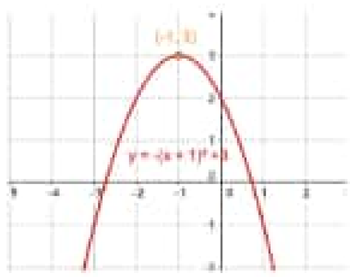
$$x=-\frac{b}{۲a}=\frac{۲}{\frac{۶-\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۴}{۶-\sqrt{۳}}\simeq ۰/۹۴(m)$$

$$y=۲-\frac{۳}{۲}x\simeq ۲-\frac{۳}{۲}(۰/۹۴)=۰/۵۹(m)$$

کار در کلاس

۱ تعیین کنید کدام یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم دارند و کدام یک مینیمم. سپس ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید.

الف) $g(x)=-(x+۱)^۲+۳$



راه اول : این سهمی در $x=-۱$ ماکزیمم دارد.

$$y=-(x+۱)^۲+۳\Rightarrow -x^۲-۲x-۱+۳=۰\Rightarrow -x^۲-۲x+۲=۰$$

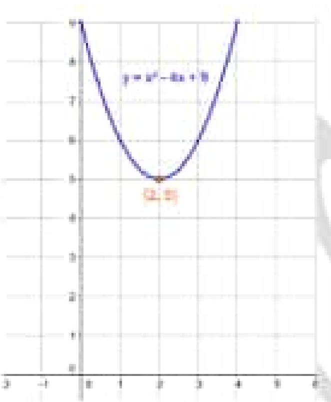
$$\Rightarrow a=-۱<۰\ ,\ x=\frac{-b}{۲a}\Rightarrow x=\frac{-(-۲)}{۲\times(-۱)}=-۱\Rightarrow y=g(-۱)=۳$$

راه دوم : این سهمی در $x=-۱$ ماکزیمم دارد.

$$y=-(x+۱)^۲+۳\ ,\ y=a(x-h)^۲+k\Rightarrow a=-۱<۰\ ,\ (h,k)=(-۱,۳)$$

مقدار ماکزیمم ۳ است.

ب) $h(x)=x^۲-۴x+۹$



این سهمی در $x=۲$ مینیمم دارد.

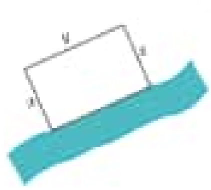
$$y=x^۲-۴x+۹=۰\Rightarrow a=۱>۰\ ,\ x=\frac{-b}{۲a}\Rightarrow x=\frac{-(-۴)}{۲\times۱}=۲\Rightarrow y=h(۲)=۵$$

مقدار مینیمم ۵ است.

۲ یک ماهیگیر می‌خواهد در کنار رودخانه محوطه‌ای مستطیل شکل را فنس‌کشی کند. او تنها هزینهٔ ۱۰۰ متر فنس‌کشی را در اختیار دارد. ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

(راهنمایی : $y+۲x=۱۰۰\ \Rightarrow\ y=۱۰۰-۲x$

مساحت مستطیل را به صورت تابعی بر حسب x بنویسید و ماکزیمم آن را بیابید.)



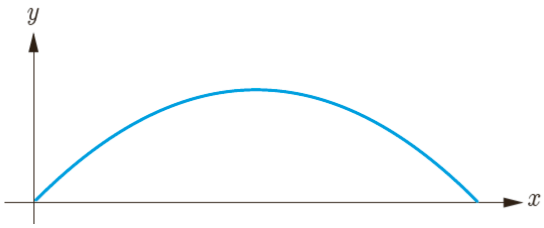
$$S_{\square}=xy\Rightarrow S_{\square}=x(۱۰۰-۲x)=-۲x^۲+۱۰۰x$$

$$a=-۲<۰\ ,\ x=\frac{-b}{۲a}\Rightarrow x=\frac{-۱۰۰}{۲\times(-۲)}=۲۵\Rightarrow y=۱۰۰-۵۰=۵۰$$

$$S=۲۵\times۵۰=۱۲۵۰\ m^۲$$

صفرهای تابع درجه ۲

همان‌گونه که می‌دانیم، نمودار هر تابع درجه دوم، یک سهمی است. به عنوان مثال فرض کنیم فوتبالیستی توپی را با زاویهٔ 45° نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیهٔ ۲۰ m/s شوت کند. معادلهٔ مسیر حرکت این توپ، یک تابع درجه دو با ضابطهٔ $y=\frac{-1}{40}x^2+x$ است که نمودار آن مانند شکل مقابل است. در این رابطه x مسافت افقی طی شده و y ارتفاع توپ از سطح زمین است.



الف) حداکثر ارتفاع توپ را به‌دست آورید.

ارتفاع توپ $x=\frac{-b}{2a} \Rightarrow x=-\frac{1}{-\frac{1}{40}}=40\ \text{m}$

ب) به نظر شما حداکثر مسافت افقی طی شده توسط توپ چقدر است؟

برای آنکه طول نقاط برخورد نمودار این تابع با محور xها را به‌دست آوریم، باید قرار دهیم $y=0$.

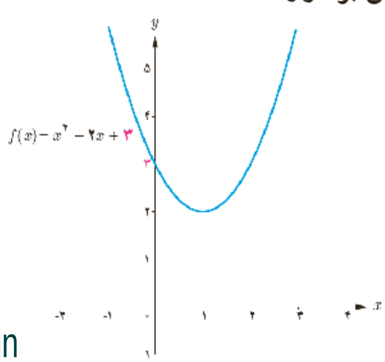
$$y=0 \Rightarrow x\left(\frac{-1}{40}x+1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=40 \end{cases}$$

این نقاط را روی نمودار نشان دهید و توضیح دهید که این اعداد از نظر فیزیکی چه معنایی می‌دهند؟

طول نقطه ی $(0,0)$ زمان شروع پرتاب و طول نقطه ی $(40,0)$زمان برخورد گلوله بازمین است.

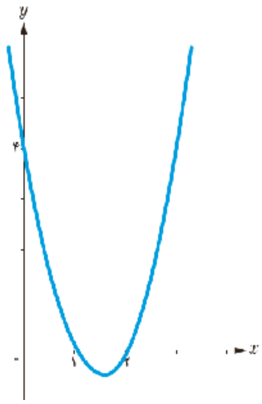
> نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند f با محور xها را صفرهای تابع می‌نامیم که در واقع ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ هستند. به عبارت دیگر، در این نقاط مقدار تابع برابر صفر است.

همچنین عرض نقطهٔ برخورد نمودار هر تابع مثل f با محور yها، همان $f(0)$ است. به‌عبارت دیگر در تابع درجه ۲ با ضابطهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$ ، عدد ثابت c نشان‌دهندهٔ محل برخورد نمودار آن با محور yهاست. به عنوان مثال، به شکل مقابل توجه کنید.



مثال : معادلهٔ سهمی مقابل را بنویسید.

حل : با توجه به شکل دیده می‌شود که نمودار تابع، محور افقی را در نقاطی با طول‌های ۱ و ۲ قطع کرده است. پس ضابطهٔ آن به‌صورت زیر است :



$$y = a\,(x-۱)(x-۲)$$

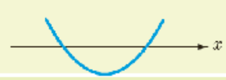
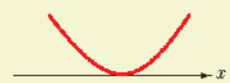
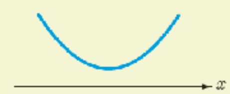
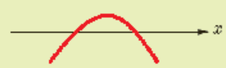
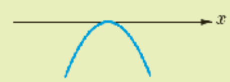
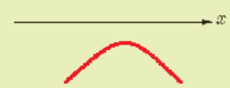
با توجه به نمودار، مقدار a را به‌دست می‌آوریم.

نقطهٔ $(۰,۴)$ روی سهمی است $\Rightarrow ۴ = a(۰-۱)(۰-۲) \Rightarrow a = ۲$

$$\Rightarrow y = ۲(x-۱)(x-۲) \Rightarrow y = ۲x^۲ - ۶x + ۴$$

کار در کلاس

۱ همچنان که از سال قبل می‌دانیم، تعداد صفرهای تابع درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$ را به کمک علامت Δ می‌توان تشخیص داد. همچنین رو به بالا بودن یا رو به پائین بودن دهانهٔ سهمی از روی علامت a مشخص می‌شود. جدول زیر را کامل کنید[1].

a \ Δ	$\Delta > ۰$	$\Delta = ۰$	$\Delta < ۰$
$a > ۰$			
$a < ۰$			

۲ دربارهٔ تابع درجه دوم f، برای تشخیص علامت ریشه‌های احتمالی معادله $f(x) = ۰$ می‌توانیم از علامت S و P کمک بگیریم. در هر یک از موارد زیر، مانند قسمت الف عمل کنید.

الف) $y = x^۲+۶x+۵$

معادلهٔ $y=۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد $\Leftarrow \Delta = ۱۶ > ۰$

ریشه‌ها هم‌علامت‌اند $\Leftarrow P = \frac{c}{a} = ۵ > ۰$

هر دو ریشه منفی‌اند $\Leftarrow S = -\frac{b}{a} = -۶ < ۰$

ب) $y = x^۲+۴x-۵$

معادلهٔ $y=۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد $\Leftarrow \Delta = ۳۶ > ۰$

ریشه ها هم علامت نیستند $\Leftarrow P = \frac{c}{a} = -۵ < ۰$

قدر مطلق ریشه منفی بزرگ تر از ریشه مثبت است $\Leftarrow S = -\frac{b}{a} = -۴ < ۰$

پ) $y = ۳x^۲-۷x+۱$

معادلهٔ $y=۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد $\Leftarrow \Delta = ۳۷ > ۰$

ریشه ها هم علامت اند $\Leftarrow P = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۳} > ۰$

هر دو ریشه مثبت اند $\Leftarrow S = -\frac{b}{a} = \frac{۷}{۳} > ۰$

ت) $y = -x^۲+۲x-۱$

معادلهٔ $y=۰$ ریشهٔ مضاعف دارد $\Leftarrow \Delta = ۴-۴(-۱)(-۱) = ۰$

ریشه ها هم علامت اند $\Leftarrow P = \frac{c}{a} = ۱ > ۰$

هردو ریشه مثبت اند $\Leftarrow S = -\frac{b}{a} = ۲ > ۰$

۳ هرگاه نمودار تابع $f(x)=ax^{2}+bx+c \ (a\neq 0)$ را داشته باشیم، می‌توانیم به کمک آن علامت ضرایب a، b و c را مشخص کنیم.

به عنوان مثال نمودار تابع f از مجموعه توابع داده شدهٔ زیر را در نظر می‌گیریم :

ــ دهانهٔ سهمی رو به بالاست؛ پس a مثبت است.

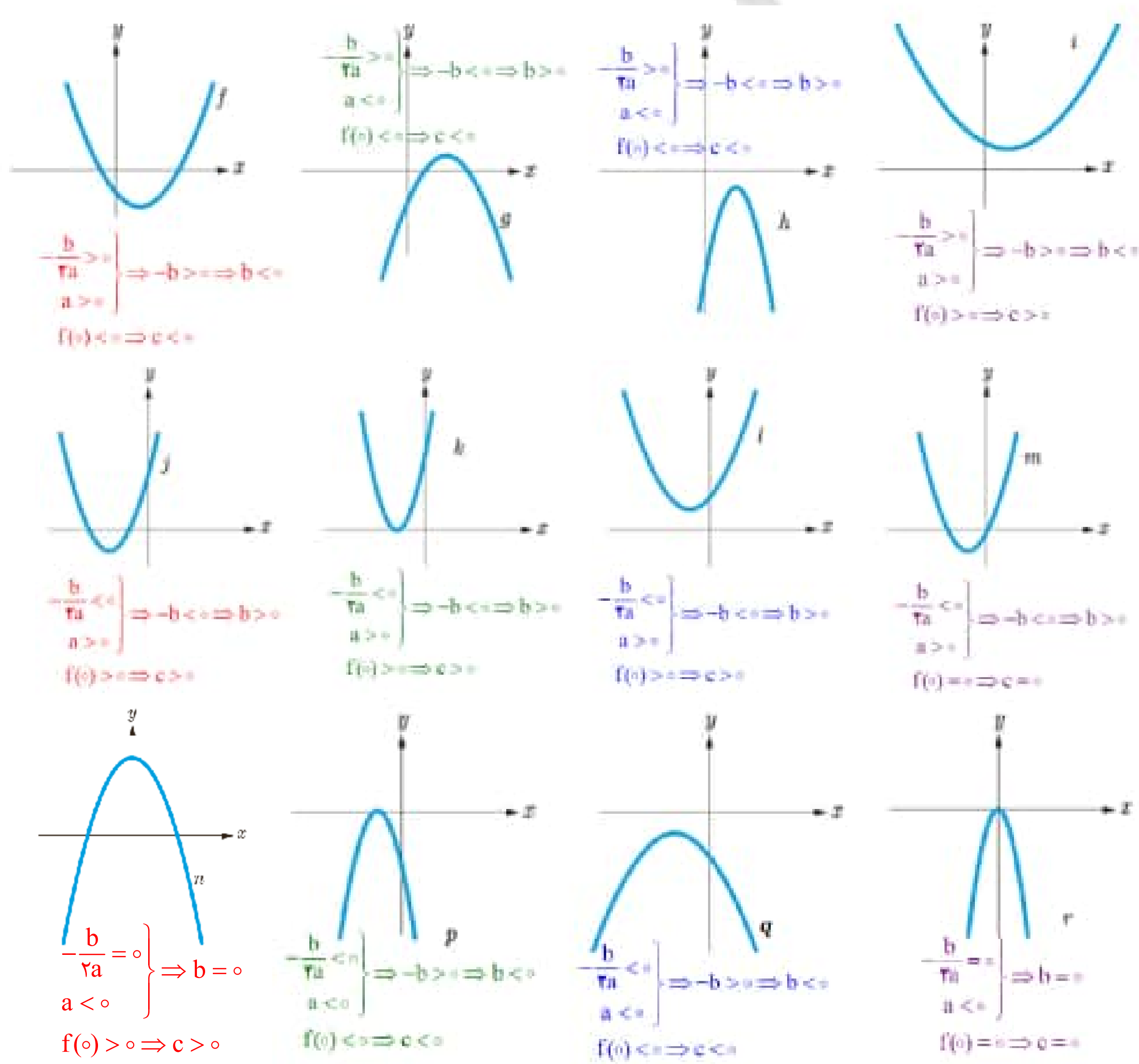
ــ نمودار تابع f محور yها را در قسمت منفی‌ها قطع کرده است؛ پس c منفی است.

ــ رأس سهمی در ربع چهارم قرار گرفته که در آن مقادیر x مثبت‌اند؛ پس : $\frac{-b}{2a}>0 \Rightarrow b<0$

توجه داریم که باتوجه به نمودار، مجموع دو ریشه عددی مثبت است (چرا؟) و از این مطلب هم می‌توان منفی بودن علامت b را نتیجه گرفت.

جواب چرا : زیرا فاصلهٔ ریشهٔ مثبت از مبدأ بیش تر از فاصلهٔ ریشهٔ منفی از مبدأ است به عبارتی قدر مطلق ریشه مثبت بزرگ تر از قدر مطلق ریشهٔ منفی است.

خلاصه این اطلاعات در جدول بعد آمده است. جدول را کامل کنید.



جدول در صفحه بعد

ویژگی / تابع	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a	+	−	−	+	+	+	+	+	−	−	−	−
b	−	+	+	−	+	+	+	+	۰	−	−	۰
c	−	−	−	+	+	+	+	۰	+	−	−	۰
تعداد ریشه‌ها	دو	دو	ندارد	ندارد	دو	یک	ندارد	دو	دو	یک	فاقد ریشه	یک
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی منفی یکی مثبت	دو تا مثبت	ریشه ندارد	ریشه ندارد	دو تا منفی	یک منفی	ریشه ندارد	یکی منفی یکی صفر	یکی صفر یکی منفی	یک منفی	ریشه ندارد	یک صفر

تمرین

۱ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^۴ - ۸x^۲ + ۸ = ۰$

$x^۲ = u \Rightarrow u^۲ - ۸u + ۸ = ۰$

$\Delta = ۳۲ \Rightarrow u = \dfrac{۸ \mp ۴\sqrt{۲}}{۲}$

$u = ۴ + ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x = \pm\sqrt{۴ + ۲\sqrt{۲}}$

$u = ۴ - ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x = \pm\sqrt{۴ - ۲\sqrt{۲}}$

ب) $۴x^۶ + ۱ = ۵x^۳$

$x^۳ = u \Rightarrow ۴u^۲ - ۵u + ۱ = ۰$

$\Delta = ۹ \Rightarrow u = \dfrac{۵ \pm ۳}{۸}$

$u = ۱ \Rightarrow x^۳ = ۱ \Rightarrow x = ۱$

$u = \dfrac{۱}{۴} \Rightarrow x^۳ = \dfrac{۱}{۴} \Rightarrow x = \dfrac{۱}{\sqrt[۳]{۴}} = \dfrac{\sqrt[۳]{۲}}{۴}$

۲ معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن $۱-\sqrt{۲}$ و $۱+\sqrt{۲}$ باشد.

$\alpha = ۱-\sqrt{۲}\ ,\ \beta = ۱+\sqrt{۲}$

$s = \alpha + \beta \Rightarrow s = ۱-\sqrt{۲}+۱+\sqrt{۲} = ۲\ ,\quad p = \alpha\beta = (۱-\sqrt{۲})(۱+\sqrt{۲}) = -۱$

$x^۲ - ۲x - ۱ = ۰$

۳ مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع با ضابطه های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = -۲x^۲ + ۸x - ۵$

$a = -۲ < ۰$ دهانهٔ سهمی رو به پایین و نقطهٔ ماکزیمم دارد

$x = -\dfrac{b}{۲a} \Rightarrow x = ۲$

$f(۲) = -۲\times۴ + ۸\times۲ - ۵ = ۳ \Rightarrow f(۲) = ۳$

ب) $g(x) = ۳x^۲ + ۶x + ۵$

$a = ۳ > ۰$ دهانهٔ سهمی رو به بالا و نقطهٔ مینیمم دارد

$x = -\dfrac{b}{۲a} \Rightarrow x = -۱$

$g(-۱) = ۳\times۱ + ۶(-۱) + ۵ = ۲ \Rightarrow f(-۱) = ۲$

hamyar.in
همیار

۴ راکتی که به‌طور عمودی رو به بالا شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می گیرد که معادلهٔ آن به صورت مقابل است. $h(t)=۱۰۰t-۵t^۲ \quad (t\geq ۰)$

الف) چقدر طول می کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

$h(t)=-۵t^۲+۱۰۰t \Rightarrow a=-۵<۰$ دهانهٔ سهمی رو به پایین و نقطهٔ ماکزیمم دارد

$t=-\frac{b}{۲a} \Rightarrow t=-\frac{۱۰۰}{۲(-۵)} \Rightarrow t=۱۰ \quad s$ پس از ۱۰ ثانیه به بالاترین ارتفاع می رسد.

ب) ارتفاع نقطهٔ اوج را بیابید.

$h(۱۰)=-۵\times۱۰۰+۱۰۰\times۱۰=۵۰۰ \quad m$ ارتفاع نقطهٔ اوج

پ) چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین بازمی گردد؟

$h(t)=۰ \Rightarrow -۵t^۲+۱۰۰t=۰ \Rightarrow t(-۵t+۱۰۰)=۰ \Rightarrow t=۰\,s \ , \ t=۲۰ \ s$ پس از ۲۰ راکت به زمین بازمی گردد.

نکته: $t=۰$ لحظهٔ شروع پرتاب است.

۵ استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است.
اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که :

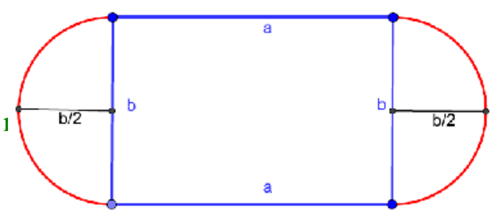
الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

$P=P_{\bigcirc}+۲a \Rightarrow P=۲\pi\times\frac{b}{۲}+۲a \Rightarrow \pi b+۲a=۱۵۰۰ \Rightarrow a=۷۵۰-\frac{\pi}{۲}b$

$S_{\square}=ab \Rightarrow S_{\square}=(۷۵۰-\frac{\pi}{۲}b)b \Rightarrow S_{\square}=-\frac{\pi}{۲}b^۲+۷۵۰b$ دهانهٔ سهمی رو به پایین است و نقطهٔ ماکزیمم دارد $-\frac{\pi}{۲}<۰$

$\Rightarrow b=-\frac{۷۵۰}{۲(\frac{\pi}{۲})}=\frac{۷۵۰}{\pi}\xrightarrow{\pi=۳} b=۲۵۰ \ m \ , \quad a=۷۵۰-\frac{\pi}{۲}\times\frac{۷۵۰}{\pi}=۳۷۵ \quad m$

$S_{\square}=۲۵۰\times۳۷۵=۹۳۷۵۰ \quad m^۲, \ S=S_{\square}+S_{\bigcirc}=۹۳۷۵۰+۳(۱۲۵)^۲=۱۴۰۶۲۵$ ۱



ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

$a=۷۵۰-\frac{\pi}{۲}b$

$S=S_{\square}+S_{\bigcirc} \Rightarrow S=-\frac{\pi}{۲}b^۲+۷۵۰b+(\frac{b}{۲})^۲\pi \Rightarrow S=-\frac{\pi}{۴}b^۲+۷۵۰b$ دهانهٔ سهمی روبه پایین است و نقطهٔ ماکزیمم دارد $-\frac{\pi}{۴}<۰$

$b=\frac{-۷۵۰}{۲(-\frac{\pi}{۴})}=\frac{۱۵۰۰}{\pi} \Rightarrow a=۷۵۰-\frac{\pi}{۲}\times\frac{۱۵۰۰}{\pi}=۰$

$S=۳\times(۲۵۰)^۲=۱۸۷۵۰۰ \quad m^۲$

۶ معادلهٔ سهمی‌های زیر را بنویسید.

راه اول :

$f(0)=c \Rightarrow c=0$

$f(2)=0 \Rightarrow 4a+2b=0$

$f(0)=0$

با توجه به این که دو نقطهٔ ۰ و ۲ دارای عرض های برابر هستند

پس می توانیم طول رأس سهمی را به صورت زیر به دست آوریم:

$$\frac{1+0}{2}=1$$

$f(1)=-4 \Rightarrow a+b=-4$

$$\begin{cases} a+b=-4 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a-2b=8 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow 2a=8$$

$\Rightarrow a=4 \Rightarrow b=-8$

$f(x)=4x^2-8x$

راه دوم :

$$f(-\frac{b}{2a})=-4 \Rightarrow a(-\frac{b}{2a})^2+b(-\frac{b}{2a})=-4$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}=-4 \Rightarrow b^2=16a$$

$$\begin{cases} b^2=16a \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2=16a \\ 16a+8b=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^2+8b=0 \Rightarrow b(b+8)=0 \Rightarrow \begin{cases} b=0 \Rightarrow a=0 \\ b=-8 \Rightarrow a=4 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x)=4x^2-8x$

راه سوم:

$y=f(x)=a(x-h)^2+k$

$k=-4$

$f(0)=0 \Rightarrow a(0-h)^2-4=0 \Rightarrow ah^2=4$

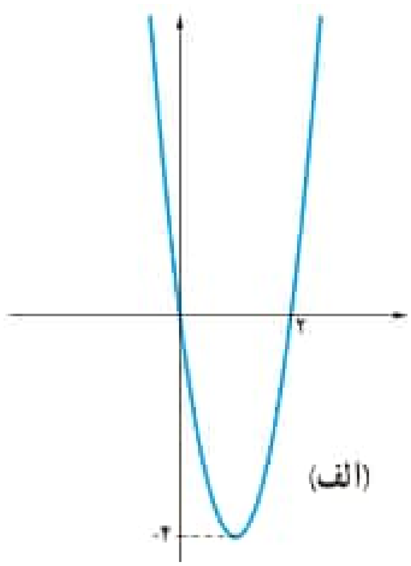
$f(2)=0 \Rightarrow a(2-h)^2-4=0$

$$4a-4ah+ah^2-4=0 \xrightarrow{ah^2=4} 4a-4ah+4-4=0$$

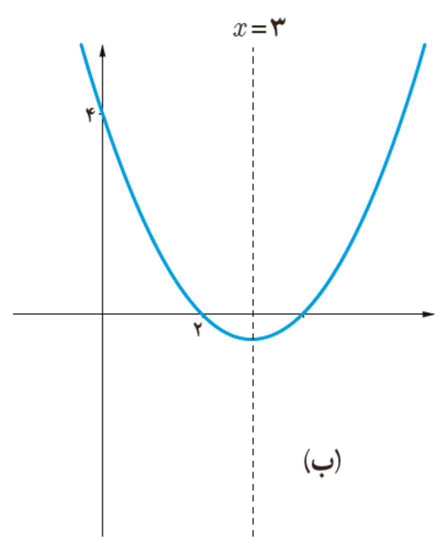
$$4a-4ah=0 \Rightarrow 4a(1-h)=0 \xrightarrow{a\neq 0} 1-h=0 \Rightarrow h=1$$

$$ah^2=4 \xrightarrow{h=1} a=4 \Rightarrow y=f(x)=4(x-1)^2-4$$

$\Rightarrow f(x)=4x^2-8x$



(الف)



(ب)

$$x=3 \Rightarrow -\frac{b}{2a}=3 \Rightarrow b=-6a$$

$f(0)=4 \Rightarrow c=4$

$f(2)=0 \Rightarrow 4a+2b+4=0$

$$\begin{cases} b=-6a \\ 4a+2b+4=0 \end{cases} \Rightarrow 4a-12a+4=0$$

$$\Rightarrow -8a+4=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \Rightarrow b=-3$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+4$$

$$x=۲ \Rightarrow -\frac{b}{۲a} \Longrightarrow b=-۴a$$

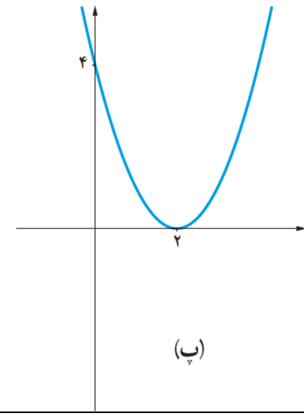
$$f(۰)=۴ \Rightarrow c=۴$$

$$f(۲)=۰ \Rightarrow ۴a+۲b+۴=۰$$

$$\begin{cases} b=-۴a \\ ۴a+۲b+۴=۰ \end{cases} \Rightarrow ۴a-۸a+۴=۰$$

$$\Rightarrow -۴a+۴=۰ \Rightarrow a=۱ \Rightarrow b=-۴$$

$$f(x)=x^۲-۴x+۴$$



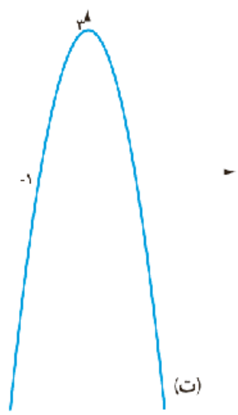
(پ)

$$f(۰)=۳ \Rightarrow c=۳$$

$$x=۰ \Rightarrow -\frac{b}{۲a}=۰ \Rightarrow b=۰$$

$$f(-۱)=۰ \Rightarrow a+۳=۰ \Rightarrow a=-۳$$

$$f(x)=-۳x^۲+۳$$



(ت)

راه اول :

$$y=f(x)=a(x-h)^۲+k\ ,\ s(۲,۱) \Rightarrow h=۲\ ,\ k=۱$$

$$f(۱)=۰ \Rightarrow a(۱-۲)^۲+۱=۰ \Rightarrow a=-۱$$

$$f(x)=-(x-۲)^۲+۱=-x^۲+۴x-۳$$

راه دوم :

$$x=۲ \Rightarrow -\frac{b}{۲a} \Longrightarrow b=-۴a$$

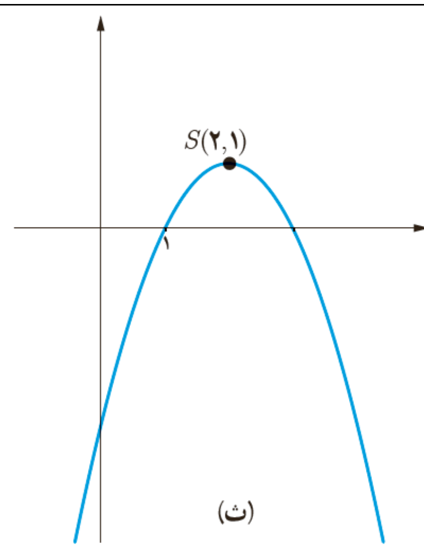
$$f(۱)=۰ \Rightarrow a+b+c=۰ \xrightarrow{b=-۴a} -۳a+c=۰$$

$$f(۲)=۱ \Rightarrow ۴a+۲b+c=۱ \xrightarrow{b=-۴a} -۴a+c=۱$$

$$\begin{cases} -۳a+c=۰ \\ -۴a+c=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۳a+c=۰ \\ ۴a-c=-۱ \end{cases} \Rightarrow a=-۱$$

$$\Rightarrow b=۴\ ,\ c=-۳$$

$$f(x)=-x^۲+۴x-۳$$



(ث)

راه اول :

$S(۱,-۱)$

$f(\circ)=-۲ \Rightarrow c=-۲$

$f(۱)=-۱ \Rightarrow a+b-۲=-۱ \Rightarrow a+b=۱$

$x=۱ \Rightarrow -\dfrac{b}{۲a}=۱ \Rightarrow b=-۲a$

$\begin{cases} b=-۲a \\ a+b=۱ \end{cases} \Rightarrow a-۲a=۱ \Rightarrow a=-۱ \,,\, b=۲$

$f(x)=-x^{۲}+۲x-۲$

راه دوم :

$y=f(x)=a(x-h)^{۲}+k \,,\, s(۱,-۱) \Rightarrow h=۱ \,,\, k=-۱$

$f(\circ)=-۲ \Rightarrow a(\circ-۱)^{۲}-۱=-۲ \Rightarrow a=-۱$

$f(x)=-(x-۱)^{۲}-۱=-x^{۲}+۲x-۲$