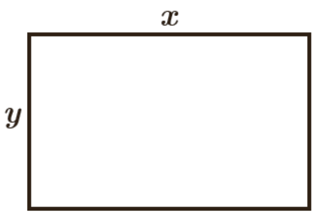
درس سوم

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

معادلات گویا

مستطیل طلایی، مستطیلی است که نسبتِ مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. به عبارت دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب x و y باشند داشته باشیم : $\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$. نسبت طول به عرض این مستطیل را **نسبت طلایی** می‌گویند.



مثال : عرض مستطیل را $y=۱$ در نظر می‌گیریم تا مقدار نسبت طلایی را محاسبه کنیم :

$$\frac{x+۱}{x}=\frac{x}{۱}$$

با ضرب دو طرف این معادله در x می‌توان آن را از حالت کسری خارج کرد (یا به‌طور معادل در اینجا حاصل‌ضرب طرفین را مساوی حاصل‌ضرب وسطین قرار می‌دهیم) :

$$x^۲=x+۱ \Longrightarrow x^۲-x-۱=۰$$

در برخی از اجزای بدن انسان، در بعضی گیاهان و همچنین در پاره‌ای از بناها و آثار هنری رد پای عدد طلایی مشاهده می‌شود. تحقیقی در این زمینه انجام دهید و گزارش آن را در کلاس ارائه کنید.

$$\Delta=b^۲-۴ac=۵ \quad , \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x_۱=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}} \\ x_۲=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲} \quad \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

ارگ تاریخی بم

عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ به **عدد طلایی** معروف است که مقدار تقریبی آن ۱/۶۱۸ می‌باشد؛ این عدد از دوران باستان مورد توجه بوده‌است.

از کلاس اول ابتدایی که با معادلاتی به شکل $۲+\square=۵$ مواجه شدیم، تقریباً همیشه درگیر حل معادله بوده‌ایم! گاهی به معادلاتی مانند $\frac{x+۱}{x}=\frac{x}{۱}$ برمی‌خوریم که در آنها مجهول در مخرج یک عبارت گویا (کسری با صورت و مخرج چند جمله‌ای) قرار دارد. چنین معادلاتی را معادلات گویا می‌نامیم. همان‌طور که دیدیم :

> برای حل یک معادلهٔ گویا می‌توان دو طرف تساوی را پس از تجزیه کردن مخرج‌ها، در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک م م) مخرج‌ها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود. جواب‌های به‌دست آمده نباید مخرج کسرها را صفر کنند و این جواب‌ها باید در معادلهٔ اولیه صدق کنند.

فعالیت

۱ معادلهٔ مقابل را حل کنید.

$$\frac{۲x}{x^۲-۱}+\frac{۲}{x+۱}=\frac{۲-x}{x^۲-x} \qquad (۱)$$

الف) ابتدا در صورتِ امکان مخرج کسرها را به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تجزیه می کنیم :

$$\frac{۲x}{(x-۱)(x+۱)}+\frac{۲}{(x+۱)}=\frac{۲-x}{x(x-۱)} \qquad (۲)$$

ب) در مخرج‌ها سه نوع عامل اولِ متمایز وجود دارد، x، $(x+۱)$ و $(x-۱)$ که بزرگ‌ترین توان هر کدام از آنها برابر ۱ است؛ پس ک‌م‌م مخرج‌ها عبارت است از $x(x-۱)(x+۱)$

پ) طرفین معادلهٔ (۲) را در $x(x-۱)(x+۱)$ ضرب می کنیم تا معادله از شکل کسری خارج شود.

$$x(x-۱)(x+۱)\left[\frac{۲x}{(x-۱)(x+۱)}+\frac{۲}{(x+۱)}\right]=x(x-۱)(x+۱)\left[\frac{۲-x}{x(x-۱)}\right] \Rightarrow ۲x^۲+۲x(x-۱)=(x+۱)(۲-x)$$

ت) پس از ساده کردن، معادلهٔ $۵x^۲-۳x-۲=۰$ حاصل می‌شود.

ث) برای معادلهٔ درجه دوم اخیر، مقدار Δ را به‌دست آورید و معادله را حل کنید. آیا هر دو جواب به‌دست آمده مورد قبول‌اند؟ چرا؟

$۵x^۲-۳x-۲=۰ \Rightarrow \Delta=۹+۴۰=۴۹ \Rightarrow x=\frac{۳\pm۷}{۱۰} \Rightarrow x=\frac{-۲}{۵}$ قابل قبول ، $x=۱$ غیر قابل قبول

اگر $x=۱$ آنگاه مخرج کسر برابر صفر می شود و عبارت تعریف نشده خواهد بود.

۲ خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین‌المللی امام‌خمینی(ره) متصل می‌کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه‌ها طی می‌کند. اگر در مسیر جنوب به شمال، از سرعت متوسط قطار $۱۰ km/h$ کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت خواهد شد. مطلوب است محاسبهٔ طول زمان رفت و زمان برگشت این قطار.

الف) توضیح دهید، چرا زمان رفت از رابطهٔ $\frac{۶۰}{v}$ به‌دست می‌آید؟

می دانیم مسافت طی شده برابر است با سرعت متوسط ضرب در زمان یعنی $x=v.t$ در نتیجه اگر زمان رفت را با $t_۱$ نمایش دهیم داریم : $x=v.t_۱ \Rightarrow t_۱=\frac{x}{v} \Rightarrow t_۱=\frac{۶۰}{v}$

ب) عبارتی بر حسب v بنویسید که زمان برگشت را نشان دهد.

زمان بازگشت را با $t_۲$ نمایش می دهیم و می دانیم که از سرعت قطار $۱۰ \ km/h$ کاسته شده است پس داریم :

$$۶۰=(v-۱۰)\times t_۲ \Rightarrow t_۲=\frac{۶۰}{v-۱۰}$$

پ) معادلهٔ $\frac{۶۰}{v-۱۰}=\frac{۶۰}{v}+\frac{۱}{۲}$ را توضیح دهید.

با توجه به این که زمان بازگشت نیم ساعت ($\frac{۱}{۲}$ ساعت) طولانی تر بوده است پس داریم :

$$t_۲=t_۱+\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۶۰}{v-۱۰}=\frac{۶۰}{v}+\frac{۱}{۲}$$

ت) طرفین این معادله را در ک‌م‌م مخرج‌ها ضرب کنید تا به یک معادلهٔ درجه دوم تبدیل شود.

ک م م مخرج ها : $2v(v-10)$ است . در نتیجه :

$$2v(v-10)\left(\frac{60}{v-10}\right)=2v(v-10)\times\frac{60}{v}+2v(v-10)\times\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 120v=120v-1200+v^2-10v$$

$$\Rightarrow v^2-10v-1200=0\Rightarrow\Delta=4900\Rightarrow v=\frac{10\pm70}{2}$$

$$v=40\ km/h\ ,\quad v=-30$$

ث) از حل معادلهٔ حاصل، سرعت قطار در مسیر رفت را بیابید و به کمک آن زمان رفت و برگشت قطار را به دست آورید.

سرعت قطار در مسیر شمال به جنوب رفت $40\ km/h$ است . (البته سرعت برگشت با توجه به علامت منفی $30\ km/h$ است .)

زمان رفت : $t_1=\frac{60}{40}=1/5\ h$ و زمان برگشت : $t_2=\frac{60}{40-10}=\frac{60}{30}=2\ h$

کار در کلاس

۱ معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب‌های به‌دست آمده مورد قبول هستند؟

الف) $\frac{3}{x^2}-12=0$

$$x^2\times\frac{3}{x^2}-x^2\times12=x^2\times0$$

$$\Rightarrow 3-12x^2=0\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

ب) $\frac{2}{k}-\frac{3k}{k+2}=\frac{k}{k^2+2k}$

$$\frac{2}{k}-\frac{3k}{k+2}=\frac{k}{k(k+2)}$$

$$\Rightarrow k(k+2)\times\frac{2}{k}-k(k+2)\times\frac{3k}{(k+2)}=k(k+2)\times\frac{k}{k(k+2)}$$

$$2k+4-3k^2=k\Rightarrow -3k^2+k+4=0\Rightarrow\Delta=49\Rightarrow k=\frac{4}{3}\ ,\quad k=-1$$

پ) $\frac{3}{x}-\frac{2}{x-3}=\frac{12}{9-x^2}$

$$\frac{3}{x}-\frac{2}{x-3}=\frac{12}{(3-x)(3+x)}\Rightarrow\frac{3}{x}-\frac{2}{-(3-x)}=\frac{12}{(3-x)(3+x)}\Rightarrow\frac{3}{x}+\frac{2}{(3-x)}=\frac{12}{(3-x)(3+x)}$$

$$x(3-x)(3+x)\times\frac{3}{x}+x(3-x)(3+x)\times\frac{2}{(3-x)}=x(3-x)(3+x)\times\frac{12}{(3-x)(3+x)}$$

$$27-3x^2+6x+2x^2=12x\Rightarrow -x^2-6x+27=0\Rightarrow x^2+6x-27=0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+9)=0\Rightarrow x=-9\ ,\quad x=3$$ غیر قابل قبول

همانطور می دانیم اگر مخرج کسری صفر شود آن کسر تعریف نمی شود بنابراین عدد ۳ نمی تواند جواب این معادله باشد زیرا مخرج کسر دوم را صفر می کند.

۲ دبیر ریاضی آرمان هر هفته یک آزمون ۱۰ امتیازی برگزار می کند. پس از ۵ هفته، آرمان جمعاً ۳۶ امتیاز کسب کرده بود؛ یعنی میانگین امتیاز هر آزمون او در پنج هفتهٔ اول به‌صورت زیر بود :

$$\frac{۳۶}{۵}=۷/۲$$

او از هفتهٔ ششم به بعد در تمام آزمون‌ها امتیاز ۹ را کسب کرد؛ به‌طوری که میانگین امتیاز کل آزمون‌هایش برابر ۸ شد. می‌خواهیم بدانیم از هفتهٔ ششم به بعد، آرمان در چند آزمون متوالی نمرهٔ ۹ گرفته است. برای حل مسئله می‌توان به روش زیر عمل کرد :

الف) اگر تعداد آزمون‌ها از هفتهٔ ششم به بعد برابر n باشد، مجموع امتیازات او در این مدت $۹n$ خواهد شد. عبارتی کسری بر حسب n بنویسید که نشان‌دهندهٔ میانگین امتیاز تمام آزمون‌های ریاضی هفتگی آرمان باشد.

تعداد کل آزمون هایی که تا به حال داده است : $۵+n$ و تعداد کل امتیاز های به دست آمده : $۹n+۳۶$

$$\frac{۹n+۳۶}{۵+n}$$

ب) کسر مربوط به قسمت الف را برابر ۸ قرار دهید و n را بیابید. سپس جواب به‌دست آمده را امتحان کنید.

$$\frac{۹n+۳۶}{n+۵}=۸ \Rightarrow (n+۵)\times\frac{۹n+۳۶}{n+۵}=(n+۵)\times ۸ \Rightarrow ۹n+۳۶=۸n+۴۰ \Rightarrow n=۴$$

$$\frac{۹\times ۴+۳۶}{۴+۵}=\frac{۷۲}{۹}=۸$$

مثال : اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار یکی از آنها دو برابر دیگری باشد، هر یک از آنها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند؟

حل : ماشین سریع‌تر را A و دیگری را B می‌نامیم. فرض کنیم t مدت زمانی باشد که ماشین A به تنهایی قادر است کل کار را انجام دهد. جدول زیر را کامل کنید.

ماشین	زمان انجام کل کار	مقداری از کار که در ۱ ساعت قابل انجام است.
A	t	$\frac{۱}{t}$
B	$۲t$	$\frac{۱}{۲t}$
A و B با هم	۴	$\frac{۱}{۴}$

با توجه به جدول، معادله زیر را می‌توان نوشت :

$$\frac{۱}{t}+\frac{۱}{۲t}=\frac{۱}{۴} \xRightarrow{۲} \frac{۲}{t}+\frac{۱}{t}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۳}{t}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow t=۶$$ زمان ماشین A

$$\Rightarrow ۲t=۱۲$$ زمان ماشین B

معادلات رادیکالی

فرض کنید بخواهیم نقطه‌ای را روی محور xها بیابیم که فاصلهٔ آن از نقطهٔ $P(۲و۳)$ برابر ۵ باشد. مسئله چند جواب دارد؟

برای این کار فرض می‌کنیم مختصاتِ نقطهٔ مورد نظر به‌صورت $A(x و ۰)$ باشد. مقدار x را به‌دست می‌آوریم.

$$AP=\sqrt{(x_A-x_P)^۲+(y_A-y_P)^۲}=\sqrt{(x-۲)^۲+(۰-۳)^۲}$$

$$AP=۵ \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-۲)^۲+۹}=۵ \qquad (۳)$$

معادلاتی مانند (۳) که در آن عبارتِ رادیکالیِ شامل مجهول وجود دارد، یک معادلهٔ رادیکالی نامیده می‌شود[۱].

برای حل یک معادلهٔ رادیکالی می‌توان جملات را طوری در طرفین تساوی جابه‌جا کرد که یک عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد. سپس با به توان رساندن طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج کرد. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب‌های حاصل در معادلهٔ اولیه صدق می‌کنند.

برای حل معادلهٔ (۳) در بالا، اگر طرفین تساوی را به توان دو برسانیم، خواهیم داشت :

$$(x-۲)^۲+۹=۲۵$$

$$(x-۲)^۲=۱۶ \Rightarrow \begin{cases}(x-۲)=۴ \Rightarrow x=۶ \Rightarrow A(۶,۰)\\(x-۲)=-۴ \Rightarrow x=-۲ \Rightarrow B(-۲,۰)\end{cases}$$

تذکر : عبارت رادیکالیِ معادلهٔ (۳) همواره با معناست؛ چون در آن، حاصلِ زیر رادیکال همواره مثبت است. در این حالت می‌گوییم دامنهٔ متغیر برابر $\mathbb{R}$ است و می‌توانیم بنویسیم $D=(-\infty,+\infty)$.

مثال : در معادلهٔ $۲\sqrt{x}=\sqrt{۳x-۳}$ ، دامنهٔ متغیر به‌صورت $D=[۱,+\infty)$ است (چرا؟).

با به توان رساندن دو طرف معادله داریم :

$$۴x=۳x-۳ \Rightarrow x=-۳$$ (غیر قابل قبول)

چون جواب به دست آمده خارج از دامنهٔ متغیر است، قابل قبول نیست. شایان ذکر است که جواب‌های درون دامنه نیز به شرطی مورد قبول‌اند که در معادلهٔ اصلی صدق کنند.

کار در کلاس

۱ معادلات زیر را مانند نمونه حل کنید. آیا تمام جواب‌های حاصل، قابل قبول‌اند؟

(الف) $۲\sqrt{۲t-۱}-t=۱$

$$(۲\sqrt{۲t-۱})^۲=(t+۱)^۲ \Rightarrow ۴(۲t-۱)=t^۲+۲t+۱$$

$$\Rightarrow ۸t-۴=t^۲+۲t+۱ \Rightarrow t^۲-۶t+۵=۰$$

$$\Rightarrow (t-۱)(t-۵)=۰ \Rightarrow t=۱,\ t=۵$$

$$t=۵ \Rightarrow ۲\sqrt{۱۰-۱}-۵=۱ \Rightarrow ۶-۵=۱ \Rightarrow ۱=۱$$

$$t=۱ \Rightarrow ۲\sqrt{۲-۱}-۱=۱ \Rightarrow ۲-۱=۱ \Rightarrow ۱=۱$$

هر دو جواب قابل قبول هستند.

(ب) $۲x=۱-\sqrt{۲-x}$

$$(\sqrt{۲-x})^۲=(۱-۲x)^۲ \Rightarrow ۲-x=۱-۴x+۴x^۲$$

$$\Rightarrow ۴x^۲-۳x-۱=۰ \Rightarrow \Delta=۲۵ \Rightarrow x=۱,\ x=\frac{-۱}{۴}$$

$$x=\frac{-۱}{۴} \Rightarrow \frac{-۱}{۲}=۱-\sqrt{۲+\frac{۱}{۴}} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}=۱-\frac{۳}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

$$x=۱ \Rightarrow ۲=۱-\sqrt{۲-۱} \Rightarrow ۲=۰$$

واضح است که $x=۱$ قابل قبول نیست.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

(پ) $\sqrt{x+7}=\sqrt{x}+1$

$(\sqrt{x+7})^2=(\sqrt{x}+1)^2\Rightarrow x+7=x+2\sqrt{x}+1$

$\Rightarrow 6=2\sqrt{x}\Rightarrow(\sqrt{x})^2=3^2\Rightarrow x=9$

$x=9\Rightarrow\sqrt{9+7}=\sqrt{9}+1\Rightarrow 4=4$

(ت) $\frac{1}{\sqrt{u-3}}-\frac{2}{\sqrt{u}}=0$

$\frac{1}{\sqrt{u-3}}=\frac{2}{\sqrt{u}}\Rightarrow(\frac{1}{\sqrt{u-3}})^2=(\frac{2}{\sqrt{u}})^2$

$\Rightarrow\frac{1}{u-3}=\frac{4}{u}\Rightarrow u(u-3)\times\frac{1}{(u-3)}=u(u-3)\times\frac{4}{u}$

$\Rightarrow u=4u-12\Rightarrow 12=3u\Rightarrow u=4$

$u=4\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{4-3}}-\frac{2}{\sqrt{4}}=0\Rightarrow 1-1=0\Rightarrow 0=0$

(ث) $2+\sqrt{2x^2-5x+2}=x$

$\sqrt{2x^2-5x+2}=x-2\Rightarrow(\sqrt{2x^2-5x+2})^2=(x-2)^2\Rightarrow 2x^2-5x+2=x^2-4x+4\Rightarrow x^2-x-2=0$

$\Rightarrow(x-2)(x+1)=0\Rightarrow x=2\ ,\ x=-1$

$x=2\Rightarrow 2+\sqrt{8-10+2}=2\Rightarrow 2+0=2\Rightarrow 2=2$, $x=-1\Rightarrow 2+\sqrt{2-5+2}=-1\Rightarrow 2+\sqrt{-1}=-1$

واضح است که $x=-1$ قابل قبول نیست

۲ بدون حل معادله، توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشهٔ حقیقی‌اند؟

(الف) $\sqrt{t}+2=0$

در مجموعه ی اعداد حقیقی $\sqrt{t}$ با فرض با معنی بودن همیشه بزرگ تر یا مساوی صفر است . و وقتی این رادیکال با ۲ جمع شود هرگز صفر نمی شود.

(ب) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+3}+1=0$

در مجموعه ی عدد های حقیقی (با فرض با معنی بودن) هر کدام از رادیکال ها عددی بزرگ تر یا مساوی صفر هستند و وقتی با عدد ۱ جمع شوند هرگز صفر نمی شوند.

(پ) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}=0$

روش اول : در مجموعه ی اعداد حقیقی (بافرض با معنی بودن) هر یک از رادیکال ها بزرگ تر یا مساوی صفر هستند و زمانی جمع آن ها صفر است که هردو همزمان صفر باشند ولی این اتفاق نمی افتد.

روش دوم : $\sqrt{1-x}=-\sqrt{x-2}$ ، طرف چپ تساوی عبارت بزرگ تر یا مساوی صفر است و لی طرف دیگر کوچکتریامساوی صفر است و این تساوی فقط زمانی برقرار است که دو طرف صفرباشند.واضح است نمی توانیم عددی مشترک پیدا کنیم که همزمان دو رادیکال را صفر کند. پس این معادله در مجموعه ی اعداد حقیقی جواب ندارد.

به عبارت دیگر جواب مشترک دو معادله ی زیر در صورت وجود جواب معادله است.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{1-x}=0\Rightarrow x=1\\ \sqrt{x-2}=0\Rightarrow x=2\end{array}\right\}\Rightarrow \text{جواب مشترک ندارد}$$

پس این معادله در مجموعه ی اعداد حقیقی جواب ندارد.

تمرین‌های درس سوم

۱ هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x-۲}=۵$

$x(x-۲)\times\frac{۱}{x}+x(x-۲)\times\frac{۱}{(x-۲)}=x(x-۲)\times ۵$

$x-۲+x=۵x^{۲}-۱۰x \Rightarrow ۵x^{۲}-۱۲x+۲=۰$

$\Delta=۱۰۴ \Rightarrow x=\frac{۱۲\pm ۲\sqrt{۲۶}}{۱۰}$

هر دو جواب قابل قبول هستند زیرا هیچ یک مخرج را صفر نمی کنند.

(ب) $\frac{۱۰}{r}-\frac{۱۵}{۲}=\frac{۲۰}{۳r}-۵$

$۶r\times\frac{۱۰}{r}-۶r\times\frac{۱۵}{۲}=۶r\times\frac{۲۰}{۳r}-۶r\times ۵$

$۶۰-۴۵r=۴۰-۳۰r \Rightarrow ۲۰=۱۵r \Rightarrow r=\frac{۴}{۳}$

$\frac{۱۰}{\frac{۴}{۳}}-\frac{۱۵}{۲}=\frac{۲۰}{۳\times\frac{۴}{۳}}-۵ \Rightarrow \frac{۳۰}{۴}-\frac{۳۰}{۴}=۵-۵ \Rightarrow ۰=۰$

(پ) $\frac{۲x}{x-۳}+\frac{x+۱}{x+۴}=\frac{x-۱}{x-۳}$

$(x-۳)(x+۴)\times\frac{۲x}{(x-۳)}+(x-۳)(x+۴)\times\frac{(x+۱)}{(x+۴)}=(x-۳)(x+۴)\times\frac{(x-۱)}{(x-۳)}$

$۲x^{۲}+۸x+x^{۲}-۲x-۳=x^{۲}+۳x-۴ \Rightarrow ۲x^{۲}+۳x+۱=۰$

$\Delta=۱ \Rightarrow x=-۱ \ , \ x=-\frac{۱}{۲}$

هر دو ریشه قابل قبول است زیرا هیچ یک باعث صفر شدن مخرج ها نمی شوند.

(ت) $\sqrt{t+۴}=۳$

$(\sqrt{t+۴})^{۲}=۳^{۲}$

$\Rightarrow t+۴=۹$

$\Rightarrow t=۵$

$\Rightarrow \sqrt{۵+۴}=\sqrt{۹}=۳$

(ث) $k=\sqrt{۶k-۸}$

$k^{۲}=(\sqrt{۶k-۸})^{۲} \Rightarrow k^{۲}=۶k-۸$

$\Rightarrow k^{۲}-۶k+۸=۰ \Rightarrow (k-۴)(k-۲)=۰$

$\Rightarrow k=۴ \ , \ k=۲$

$k=۴ \Rightarrow ۴=\sqrt{۲۴-۸} \Rightarrow ۴=۴$

$k=۲ \Rightarrow ۲=\sqrt{۱۲-۸} \Rightarrow ۲=۲$

هر دو ریشه قابل قبول هستند.

(ج) $x+\sqrt{x}=۶$

$\sqrt{x}=۶-x \Rightarrow (\sqrt{x})^{۲}=(۶-x)^{۲} \Rightarrow x=۳۶-۱۲x+x^{۲}$

$\Rightarrow x^{۲}-۱۳x+۳۶=۰ \Rightarrow (x-۴)(x-۹)=۰$

$\Rightarrow x=۴ \quad x=۹$

$x=۴ \Rightarrow ۴+\sqrt{۴}=۶ \Rightarrow ۶=۶$

$x=۹ \Rightarrow ۹+\sqrt{۹}=۶ \Rightarrow ۱۲=۶ \ , \ ۱۲\neq ۶$

همانطور که دیده می شود $x=۹$ قابل قبول نیست.

(چ) $\sqrt{x+۱}-\sqrt{۲x-۵}=۱$

$\sqrt{x+۱}-۱=\sqrt{۲x-۵} \Rightarrow (\sqrt{x+۱}-۱)^{۲}=(\sqrt{۲x-۵})^{۲}$

$\Rightarrow x+۱-۲\sqrt{x+۱}+۱=۲x-۵ \Rightarrow -۲\sqrt{x+۱}=x-۷$

$\Rightarrow (-۲\sqrt{x+۱})^{۲}=(x-۷)^{۲} \Rightarrow ۴x+۴=x^{۲}-۱۴x+۴۹$

$\Rightarrow x^{۲}-۱۸x+۴۵=۰ \Rightarrow (x-۳)(x-۱۵)=۰$

$\Rightarrow x=۳ \ , \ x=۱۵$

$x=۳ \Rightarrow \sqrt{۴}-\sqrt{۱}=۱ \Rightarrow ۱=۱$

$x=۱۵ \Rightarrow \sqrt{۱۶}-\sqrt{۲۵}=۱ \Rightarrow -۱=۱ \ , \ -۱\neq ۱$

همانطور که دیده می شود $x=۱۵$ قابل قبول نیست.

(ح) $\sqrt{m}+\frac{۱}{\sqrt{m}}=۲$

$\sqrt{m}\times\sqrt{m}+\sqrt{m}\times\frac{۱}{\sqrt{m}}=\sqrt{m}\times ۲ \Rightarrow m+۱=۲\sqrt{m}$

$\Rightarrow (m+۱)^{۲}=(۲\sqrt{m})^{۲} \Rightarrow m^{۲}+۲m+۱=۴m$

$\Rightarrow m^{۲}-۲m+۱=۰ \Rightarrow (m-۱)^{۲}=۰ \Rightarrow m=۱$

$m=۱ \Rightarrow \sqrt{۱}+\frac{۱}{\sqrt{۱}}=۲ \Rightarrow ۲=۲$

همانطور که ملاحظه می شود معادله یک جواب قابل قبول دارد.

۲ علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجلهٔ ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از تایپ مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک نماید، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

زمانی که علی برای ۱۶صفحه صرف می کند : ۲ ساعت یا ۱۲۰ دقیقه پس در ۱ دقیقه $\frac{16}{120}$ صفحه ویرایش می کند.

زمانی که علی و رضا باهم صرف ویرایش ۱۶ صفحه می کنند : ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه یعنی ۸۰ دقیقه پس در ۱ دقیقه باهم $\frac{16}{80}$ صفحه ویرایش می کنند.

اگر زمانی را که رضا صرف ویرایش ۱۶ صفحه به تنهایی می کند x در نظر بگیریم پس در یک دقیقه $\frac{16}{x}$ صفحه ویرایش می کند.پس داریم :

$$\frac{16}{120}+\frac{16}{x}=\frac{16}{80} \Rightarrow \frac{1}{120}+\frac{1}{x}=\frac{1}{80} \Rightarrow 240x\times\frac{1}{120}+240x\times\frac{1}{x}=240x\times\frac{1}{80}$$

$$2x+240=3x \Rightarrow x=240$$

۳ اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد داشت؛ به‌طوری که $t=\sqrt{10-\frac{h}{5}}$.

این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

$$t=1 \Rightarrow 1=\sqrt{10-\frac{h}{5}} \Rightarrow 1^2=\left(\sqrt{10-\frac{h}{5}}\right)^2 \Rightarrow 1=10-\frac{h}{5} \Rightarrow \frac{h}{5}=9 \Rightarrow h=45\ \text{m}$$

۴ الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟

$$\sqrt{x}-x=\frac{x}{2} \Rightarrow 2\sqrt{x}-2x=x \Rightarrow 2\sqrt{x}=3x \Rightarrow (2\sqrt{x})^2=(3x)^2 \Rightarrow 4x=9x^2 \Rightarrow 9x^2-4x=0$$

$$\Rightarrow x(9x-4)=0 \Rightarrow x=0\ ,\quad x=\frac{4}{9}$$

با توجه به این که عدد باید صحیح باشد بنا براین فقط $x=0$ قابل قبول است .

ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن باشد. مسئله چند جواب دارد؟

$$x-\sqrt{x}=\frac{x}{2} \Rightarrow 2x-2\sqrt{x}=x \Rightarrow x=2\sqrt{x} \Rightarrow x^2=(2\sqrt{x})^2 \Rightarrow x^2=4x \Rightarrow x^2-4x=0$$

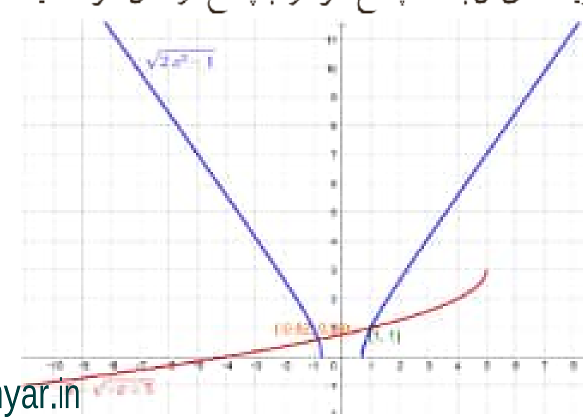
$$\Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow x=0\ ,\quad x=4$$

این مسئله دو جواب دارد.

۵ معادله‌ای شاملِ مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه‌های آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستان خود مقایسه کنید.

۱) $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{-x+5}=3$ ، ۲) $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+3}=3$

جواب های ۱ با نموار بررسی شده است .



تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی