

سوال ۳) در دایره $C(O, r)$ هر نقطه که فاصله آن از نقطه O کمتر از r باشد درون دایره قرار دارد و هر نقطه که درون دایره قرار داشته باشد فاصله آن نقطه از نقطه O کمتر از r است. در دایره $C(O, r)$ هر نقطه که فاصله آن از نقطه O بیشتر از r باشد بیرون دایره قرار دارد و هر نقطه که بیرون دایره قرار داشته باشد فاصله آن نقطه از نقطه O بیشتر از r است.

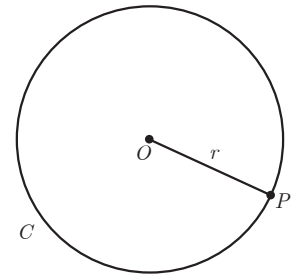
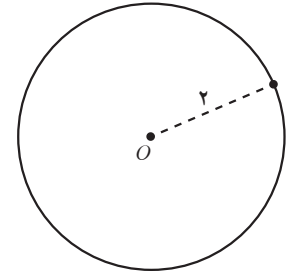
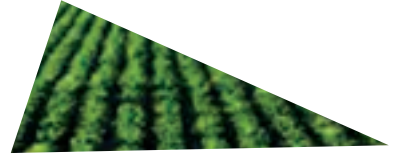
درس اول

ترسیم های هندسی

انسان از دیرباز برای حل بسیاری از مسائل خود از ترسیم های هندسی کمک گرفته است. فرض کنید بخواهیم زمینی مثلث شکل را تنها با کشیدن یک دیوار مستقیم به دو قسمت هم مساحت تقسیم نماییم. چگونه می توان این کار را انجام داد؟
یک میانه زمین مثلث شکل را رسم کنید زمین به دو قسمت با مساحت مساوی تقسیم می شود

فعالیت

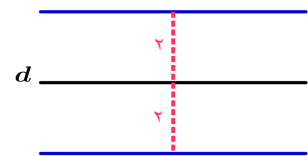
۱) یک نقطه ثابت در صفحه، مانند O را در نظر بگیرید و تمام نقاطی را که به فاصله ثابت ۲ سانتی متر از آن هستند در نظر بگیرید. این نقاط چه شکلی را تشکیل می دهند؟ دایره ای به شعاع ۲ سانتی متر



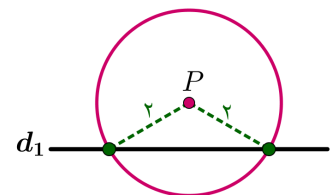
۲) یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی متر بکشید و یک نقطه دلخواه روی آن در نظر بگیرید. فاصله این نقطه تا مرکز دایره چقدر است؟ دو سانتی متر است

نتیجه: دایره $C(O, r)$ (بخوانید دایره C به مرکز O و به شعاع r) را در نظر بگیرید. هر نقطه که از نقطه O به فاصله r باشد... دایره قرار دارد و هر نقطه که... دایره قرار دارد از نقطه O به فاصله r است.

۳) مانند آنچه برای نقاط روی دایره انجام داده شد، یک بار برای نقاط داخل دایره و یک بار برای نقاط بیرون دایره نتایج مشابهی به دست آورید.



۴) خطی مانند d در نظر بگیرید. تمام نقاطی را که به فاصله ۲ سانتی متر از خط d هستند مشخص کنید. این نقاط چه شکلی یا شکل هایی را تشکیل می دهند؟ دو خط موازی فاصله d به



۵) نقطه P به فاصله ۱ سانتی متر از خط d_1 قرار دارد.

(الف) تمام نقاطی را که به فاصله ۲ سانتی متر از نقطه P هستند، مشخص کنید.

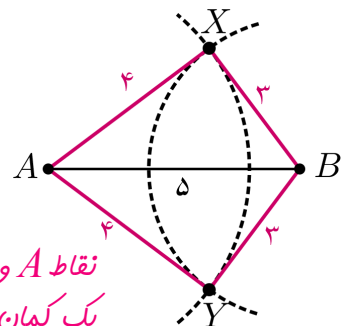
(ب) نقاطی از خط d_1 را که به فاصله ۲ سانتی متر از نقطه P هستند، مشخص کنید.

۶) نقاط A و B را به فاصله ۵ سانتی متر از هم در نظر بگیرید. به مرکز A و به شعاع ۴ سانتی متر یک کمان رسم کنید و سپس به مرکز B و به شعاع ۳ سانتی متر کمانی دیگر رسم کنید

تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند X و Y قطع کند. $\triangle AXB: \overline{AB} = 5, \overline{AX} = 4, \overline{BX} = 3$

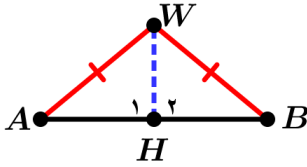
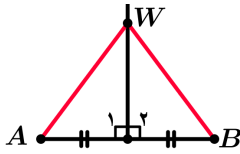
(الف) اندازه اضلاع مثلث های AXB و AYB را مشخص کنید. $\triangle AYB: \overline{AB} = 5, \overline{AY} = 4, \overline{BY} = 3$

(ب) توضیح دهید که چگونه می توانید مثلثی به طول ضلع های داده شده ۴ و ۵ و ۷ رسم کنید.



نقاط A و B را به فاصله ۷ سانتی متر از هم در نظر می گیریم. به مرکز A و به شعاع ۴ سانتی متر یک کمان رسم می کنیم و سپس به مرکز B و به شعاع ۵ سانتی متر کمانی دیگر رسم می کنیم دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند C و D قطع می کنند. دو مثلث ACB و ADB پدید می آید

$$\begin{cases} AH = BH \\ WH = WH \Rightarrow \triangle AHW \cong \triangle BHW \Rightarrow AW = BW \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{cases}$$



برخی خواص عمود منصف و ترسیم آن

۱- در شکل مقابل پاره خط AB و عمود منصف آن مشخص شده اند. نقطه ای دلخواه مانند W روی عمود منصف AB در نظر بگیرید و نشان دهید W از دوسر AB به یک فاصله است.

نتیجه ۱: هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است

۲- پاره خط AB و نقطه W مانند شکل مقابل به گونه ای قرار دارند که W از دوسر AB به یک فاصله است (یعنی $AW = BW$). نشان دهید W روی عمود منصف AB قرار دارد. راهنمایی: (از W به A و B و به وسط AB وصل کنید و با استفاده از هم نهستی مثلث ها نشان دهید W روی عمود منصف AB قرار دارد.) **نقطه وسط AB ، H می نامیم**

$$\begin{cases} AW = BW \\ AH = BH \Rightarrow \triangle AHW \cong \triangle BHW \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \\ WH = WH \end{cases}$$

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_2, \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$$

نتیجه ۲: هر نقطه که از دوسر یک پاره خط به فاصله یکسان باشد، **روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد**

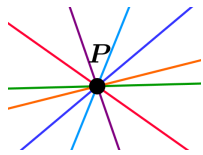
توجه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم: هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط باشد از دوسر آن پاره خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دوسر آن پاره خط به یک فاصله باشد روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

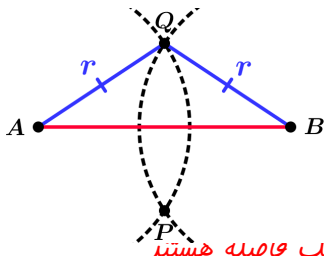
فعالیت



۱- نقطه P در صفحه مشخص شده است. چند خط می توانید رسم کنید که از نقطه P عبور نمایند؟ **بیشمار خط می توان رسم کرد**

۲- دو نقطه A و B در صفحه مشخص شده اند. چند خط متمایز می توانید رسم کنید که از هر دو نقطه A و B عبور نمایند؟ **فقط یک خط عبور می کند**

۳- به نظر شما برای اینکه یک خط مشخص شود حداقل چند نقطه از آن باید مشخص شده باشد؟ **حداقل دو نقطه از خط باید مشخص شود**



رسم عمود منصف یک پاره خط داده شده

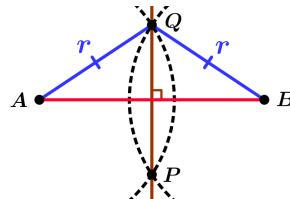
می خواهیم عمود منصف پاره خط AB را رسم کنیم.

۱- دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار به مرکز نقطه A و بار دیگر به همان شعاع و به مرکز B کمان بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند P و Q قطع کنند.

۲- آیا نقاط P و Q تقاطعی متعلق به عمود منصف AB هستند؟ چرا؟ **بله - چون از دو سر پاره خط AB به یک فاصله هستند**

۳- آیا با داشتن نقاط P و Q می توان عمود منصف AB را مشخص کرد؟ چرا؟ **بله - چون برای رسم هر خط دو نقطه لازم است**

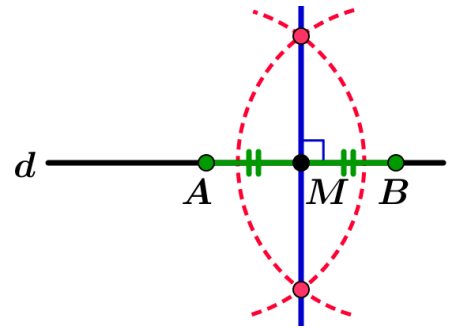
۴- حال عمود منصف AB را رسم کنید.



۱- به مرکز M و شعاع دلخواه r دایره ای رسم می کنیم مثل برافورد قط d و دایره A و B می نامیم. در نتیجه داریم $AM=MB=r$

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه ای روی آن

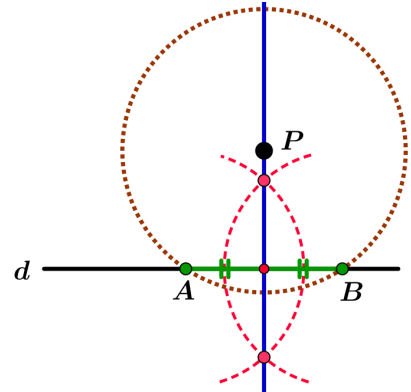
خط d و نقطه M روی آن مانند شکل مشخص شده اند. می خواهیم خطی رسم کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد.



- ۱- به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d بیابید که $AM=MB$ باشد.
- ۲- عمودمنصف پاره خط AB را رسم کنید. توضیح رسم عمود منصف در صفحه قبل داده شده است
- ۳- عمودمنصف پاره خط AB خطی است که بر خط d عمود... و از نقطه M می گذرد.

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه ای غیر واقع بر آن

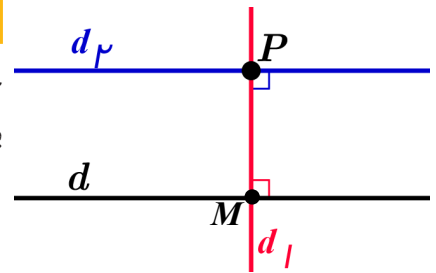
خط d و نقطه P مانند شکل داده شده اند. می خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه P بگذرد و بر خط d عمود باشد.



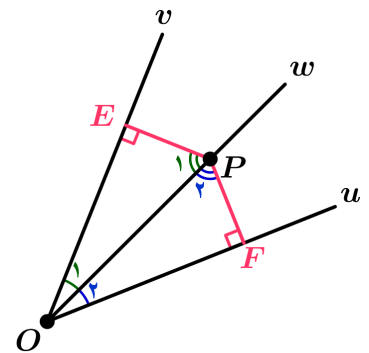
- ۱- به کمک پرگار نقاطی مانند A و B را بر خط d به گونه ای بیابید که از نقطه P به یک فاصله باشند. یک دایره به مرکز P و شعاع بیشتر از فاصله نقطه P از خط d می زنیم نقاط برافورد این دایره و خط d همان A و B هستند
- ۲- عمودمنصف پاره خط AB را رسم کنید. سوال ۳ - به چون فاصله این نقطه از
- ۳- آیا عمودمنصف پاره خط AB از نقطه P می گذرد؟ چرا؟ دو سر پاره خط به یک فاصله است عمودمنصف پاره خط AB بر خط d عمود... و از نقطه P می گذرد.

رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه ای غیر واقع بر آن

خط d و نقطه P مانند شکل مقابل داده شده اند. می خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه P بگذرد و با خط d موازی باشد.



- ۱- خط d_1 را به گونه ای رسم کنید که از نقطه P بگذرد و بر خط d عمود باشد.
 - ۲- خط d_2 را به گونه ای رسم کنید که از نقطه P بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.
 - ۳- خط d_p نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورب در نظر بگیرید)
- این دو خط موازی هستند. $(d \parallel d_p)$ - فرض می کنیم خط d_1 مورب است و دو خط d و d_1 در نقاط M و P قطع می کند. تمام زوایه های ایثار شده توسط این خط مورب برابر ۹۰ درجه است چون $d \perp d_1$ و $d_p \perp d_1$ پس طبق عکس قضیه خطوط موازی و خط مورب این دو خط با هم موازیند
- برخی خواص نیمساز و ترسیم آن**



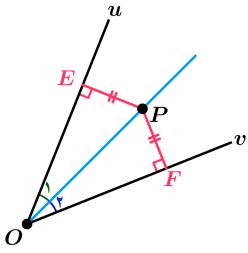
- ۱- در شکل مقابل نیم خط Ow نیمساز زاویه vOu است. فرض کنید P یک نقطه دلخواه روی Ow باشد. ثابت کنید فاصله نقطه P از دو ضلع زاویه vOu یکسان است. (یعنی اگر از نقطه P عمودهایی بر Ov و Ou رسم کنیم، طول آنها با هم برابر است.)
- چون نیمساز OP زاویه O است پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و داریم $\hat{E} = \hat{F} = 90^\circ$

نتیجه ۱: هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه فاصله یکسان دارد

$$\begin{cases} \hat{O}_1 + \hat{P}_1 + \hat{E} = 180^\circ \\ \hat{O}_2 + \hat{P}_2 + \hat{F} = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{P}_1 + \hat{E} = \hat{O}_2 + \hat{P}_2 + \hat{F} \Rightarrow \hat{P}_1 = \hat{P}_2$$

$$\begin{cases} OP = OP \\ \hat{P}_1 = \hat{P}_2 \Rightarrow \triangle OPE \cong \triangle OPF \Rightarrow EP = FP \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{بنا به حالت وتر و یک ضلع} \\ OP = OP \\ \text{زاویه قائمه} \\ EP = FP \\ \Rightarrow \end{array} \right\} \Delta OEP \cong \Delta OFP \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \hat{E} = \hat{F} = 90^\circ$$



۲- در شکل مقابل فاصله نقطه P از دو ضلع زاویه vOu یکسان است. نشان دهید که نقطه P روی نیمساز زاویه قرار دارد.

راهنمایی: پاره خط OP را و دو عمود از نقطه P بر Ou و Ov رسم کنید و با استفاده از (هم نهستی مثلث‌ها نشان دهید OP همان نیمساز زاویه vOu است).

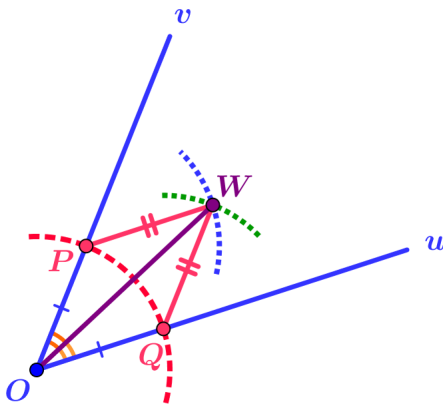
نتیجه ۲: هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصله یکسان باشد، روی نیمساز آن زاویه است.

توجه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن دبیران ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.



۳- رسم نیمساز یک زاویه

الف) زاویه vOu را در نظر بگیرید. به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی رسم کنید تا نیم خط‌های Ov و Ou را در نقاطی مانند P و Q قطع کند.

طول پاره خط‌های OP و OQ نسبت به هم چگونه‌اند؟ $OP=OQ=r_1$

ب) دهانهٔ پرگار را کمی بیش از نصف طول پاره خط PQ باز کنید و یک بار به مرکز P و بار دیگر به مرکز Q کمانی رسم کنید تا دو کمان مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند W قطع کنند.

طول پاره خط‌های PW و QW نسبت به هم چگونه‌اند؟ $QW=PW=r_2$

پ) پاره خط‌های WP ، WO ، WQ را رسم کنید. دو مثلث OPW و OQW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ $OP=OQ$ ، $PW=QW$ ، $OW=OW$ پس بنا به حالت برابری سه ضلع دو مثلث OPW و OQW هم نوشت هستند

اندازهٔ زاویه‌های POW و QOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ با هم برابرند. زیرا دو مثلث همنهشت هستند

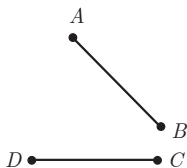
پاره خط OW نیمساز زاویه vOu است.

تمرین

جواب تمام تمرینات در صفحات بعد

۱ الف) دو پاره خط AB و CD مطابق شکل داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطه C و D نیز به یک فاصله باشد.

ب) نقطهٔ مورد نظر در قسمت الف) را O می‌نامیم. اگر نقطهٔ O روی عمود منصف پاره خط BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رأس‌های چهارضلعی $ABCD$ نسبت به دایرهٔ G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟



جواب تمام تمرینات در صفحات بعد

۲ مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. عمود منصف‌های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۳ مثلثی دلخواه رسم کنید و آن را ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویه این مثلث را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را O بنامید. از نقطه O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. به مرکز O و به شعاع OH دایره‌ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۴ فرض کنید نقطه A به فاصله ۴ سانتی متر از خط d باشد. روش رسم هریک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.

(الف) مثلثی متساوی الساقین که A یک رأس آن و قاعده آن بر خط d منطبق باشد.

(ب) مثلثی که شرایط (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی متر باشد.

(پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن 8cm^2 باشد.

d

• A

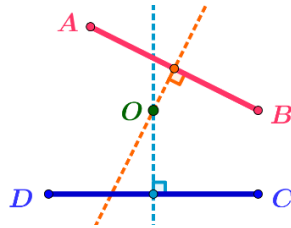
نوبه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

تمرین ۱:

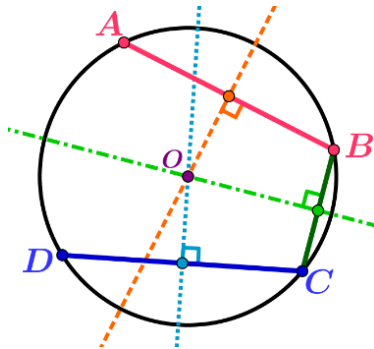
(الف) نقطه O مورد نظر محل برخورد عمود منصف های دو پاره خط AB و CD است.



(ب) چهار نقطه A, B, C, D روی دایره G قرار خواهند داشت. زیرا: چون O روی عمود منصف AB است پس: $OA = OB$ (۱)

چون O روی عمود منصف CD است پس: $OC = OD$ (۲) چون O روی عمود منصف BC است پس: $OC = OB$ (۳)

پس طبق روابط (۱)، (۲)، (۳) خواهیم داشت: $OA = OB = OC = OD$ و چون شعاع دایره برابر OA است پس حتماً ۴ نقطه روی دایره G قرار خواهند داشت.



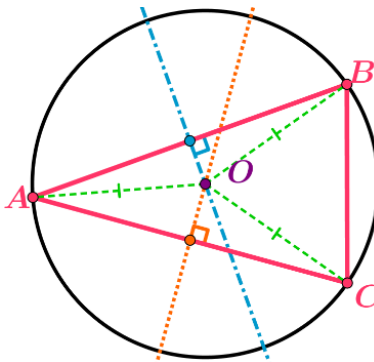
توجه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

تمرین ۲: چون O روی عمود منصف AB است پس: $OA = OB$ (۱) چون O روی عمود منصف AC است پس: $OC = OA$ (۲)

پس طبق روابط (۱)، (۲) خواهیم داشت: $OA = OB = OC$ چون شعاع دایره برابر OA است پس حتماً سه نقطه روی دایره قرار خواهند داشت.

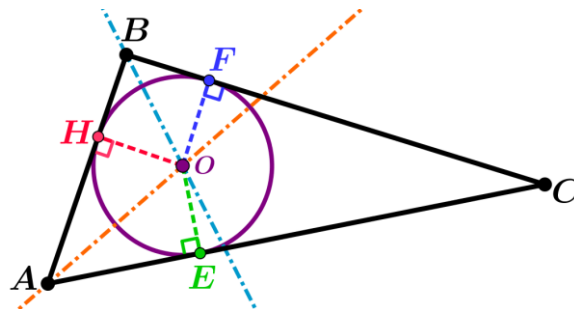


تمرین ۳:

چون O روی نیمساز زاویه A است پس: $OH = OE$ (۱) چون O روی نیمساز زاویه B است پس: $OH = OF$ (۲)

پس طبق روابط (۱)، (۲) خواهیم داشت: $OH = OE = OF$ چون شعاع دایره برابر OH است پس حتماً نقاط E, F روی دایره قرار خواهند داشت.

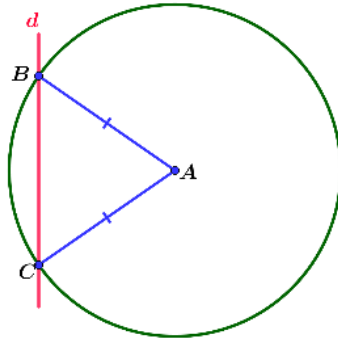
در نتیجه اضلاع مثلث ABC مماس بر دایره هستند.



تمرین ۴:

الف) دایره ای به مرکز A و شعاع r (بیشتر از ۴ باشد) می زنیم محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس های مثلث است زیرا:

$$AC = AB = r$$

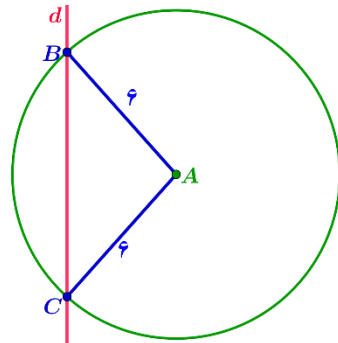


نویسنده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن مصلحان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

ب) دایره ای به مرکز A و شعاع $r = 6$ می زنیم محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس های مثلث است زیرا: $AC = AB = 6$

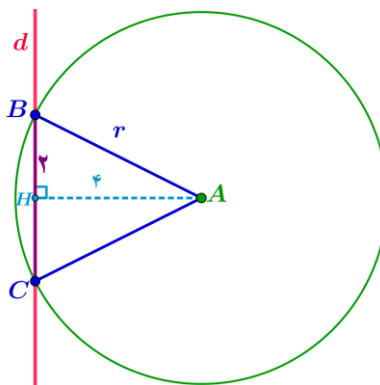


پ) چون فاصله عمودی نقطه A از خط d برابر ۴ است و این فاصله همان ارتفاع مثلث است، اگر بخواهیم مساحت این مثلث ۸ سانتی متر مربع باشد باید قاعده آن ۴ سانتی متر باشد یعنی فاصله دو نقطه B و C روی خط d برابر ۴ باشد. در نتیجه طبق قضیه فیثاغورث داریم:

$$(AB)^2 = (AH)^2 + (BH)^2 \Rightarrow r^2 = (4)^2 + (2)^2 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow r = \sqrt{20}$$

بنابراین اگر دایره ای به شعاع $\sqrt{20}$ بزینیم و محل برخورد این دایره با خط d همان نقاط دیگر رأس های مثلث است زیرا: $AC = AB = \sqrt{20}$ این

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(4)(4) = 8 \text{ همان مثلثی است که مساحت آن ۸ می شود.}$$



نویسنده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن مصلحان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir