درس دوم

استدلال و قضیهٔ تالس

نسبت و تناسب

در پایه‌های قبل با دو مفهوم نسبت و تناسب و برخی خواص ابتدایی آنها آشنا شده‌اید. می‌دانیم که هر دو **نسبت** مساوی یک **تناسب** تشکیل می‌دهند.

می‌دانیم که اگر یک مقدار ثابت را با دوطرف یک تساوی جمع و یا تفریق کنیم، تساوی دوباره برقرار خواهد بود. همچنین اگر دوطرف یک تساوی را در یک مقدار ضرب کنیم یا به یک مقدار غیرصفر تقسیم نماییم، تساوی برقرار می‌ماند. با توجه به این مطلب هریک از خواص زیر را به راحتی می‌توان ثابت کرد.

کار در کلاس

۱ با فرض اینکه تمام مخرج‌ها مخالف صفرند و با توجه به نکات گفته شده در بالا هریک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad=bc$ (طرفین وسطین)

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \overset{\times bd}{\Longrightarrow} \frac{a}{\cancel{b}}\times \cancel{b}d=\frac{c}{\cancel{d}}\times b\cancel{d} \Rightarrow ad=bc$

ب) $ad=bc \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (تبدیل حاصل‌ضرب به تناسب)

$ad=bc \overset{\div bd}{\Longrightarrow} \frac{a\cancel{d}}{b\cancel{d}}=\frac{\cancel{b}c}{\cancel{b}d} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

پ) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (معکوس کردن تناسب)

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \overset{\times \frac{bd}{ac}}{\Longrightarrow} \frac{a}{\cancel{b}}\times\frac{\cancel{b}d}{ac}=\frac{c}{\cancel{d}}\times\frac{b\cancel{d}}{ac} \Rightarrow \frac{\cancel{a}d}{\cancel{a}c}=\frac{b\cancel{c}}{a\cancel{c}} \Rightarrow \frac{d}{c}=\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

ت) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{d}{b}\\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d}\end{cases}$ (تعویض جای طرفین یا وسطین)

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \overset{\times \frac{d}{a}}{\Longrightarrow} \frac{\cancel{a}}{b}\times\frac{d}{\cancel{a}}=\frac{c}{\cancel{d}}\times\frac{\cancel{d}}{a} \Rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{d}{b}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \overset{\times \frac{b}{c}}{\Longrightarrow} \frac{a}{\cancel{b}}\times\frac{\cancel{b}}{c}=\frac{\cancel{c}}{d}\times\frac{b}{\cancel{c}} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

ث) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases}\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\\ \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}\end{cases}$ ترکیب(نسبت در صورت یا مخرج

$\overset{+1}{\Longrightarrow} \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{c}{d}+\frac{d}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

$\Rightarrow ad=bc \overset{+ac}{\Longrightarrow} ad+ac=bc+ac \overset{+ac}{\Longrightarrow} a(d+c)=c(b+a) \Rightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{d+c}$

راهنمایی: در قسمت (ث) برای اثبات اولین تناسب به دو طرف تساوی عدد ۱ را اضافه کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس نمایید، سپس به دو طرف عدد ۱ را اضافه کنید.

ج) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases}\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\\ \frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}\end{cases}$ تفضیل(نسبت در صورت یا مخرج

$\overset{+1}{\Longrightarrow} \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1 \Rightarrow \frac{a}{b}-\frac{b}{b}=\frac{c}{d}-\frac{d}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

$\Rightarrow ad=bc \overset{-ac}{\Longrightarrow} ad-ac=bc-ac \overset{-ac}{\Longrightarrow} a(d-c)=c(b-a) \Rightarrow \frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$

راه دوم قسمت دوم ج $\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \Rightarrow \frac{b}{a}-1=\frac{d}{c}-1 \Rightarrow \frac{b}{a}-\frac{a}{a}=\frac{d}{c}-\frac{c}{c} \Rightarrow \frac{b-a}{a}=\frac{d-c}{c} \Rightarrow \frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$

راه دوم قسمت دوم ث $\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \Rightarrow \frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1 \Rightarrow \frac{b}{a}+\frac{a}{a}=\frac{d}{c}+\frac{c}{c} \Rightarrow \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c} \Rightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$

راهنمایی : در قسمت (ج) برای اثبات اولین تناسب از دو طرف تساوی عدد ۱ را کم کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را **معکوس** کرده، سپس از دوطرف عدد ۱ را کم کنید.

۲ با توجه به خواص اثبات شده در ۱ موارد زیر را کامل کنید.

الف) $\frac{۵}{۱۴}=\frac{۱۵}{۴۲}\Rightarrow ۵\times ۴۲ = ۱۵\times ۱۴$

ب) $۳\times ۴۰=۱۲\times ۱۰\Rightarrow \frac{۳}{۱۰}=\frac{۱۲}{۴۰}$

پ) $\frac{۷}{۱۰}=\frac{۲۱}{۳۰}\Rightarrow \frac{۱۰}{۷}=\frac{۳۰}{۲۱}$

ت) $\frac{۶}{۱۱}=\frac{۱۸}{۳۳}\Rightarrow \frac{۶}{۱۸}=\frac{۱۱}{۳۳} \quad , \quad \frac{۳۳}{۱۱}=\frac{۱۸}{۶}$

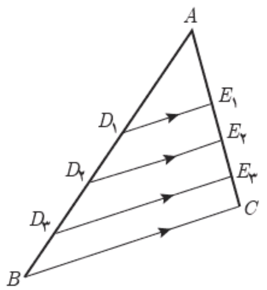
ث) $\frac{۴}{۱۴}=\frac{۱۰}{۳۵}\Rightarrow \frac{۱۸}{۱۴}=\frac{۱۰+۳۵}{۳۵} \quad , \quad \frac{۴}{۱۸}=\frac{۳۵}{۱۰+۳۵}$

ج) $\frac{۵}{۱۲}=\frac{۱۰}{۲۴}\Rightarrow \frac{-۷}{۱۲}=\frac{-۱۴}{۲۴} \quad , \quad \frac{۵}{-۷}=\frac{۱۰}{۱۴}$

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

سد باغکل ــ شهرستان خوانسار ــ استان اصفهان

استدلال، قضیهٔ تالس و تعمیم آن



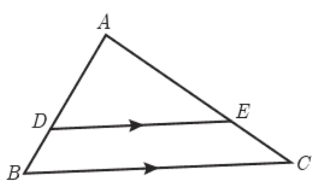
در شکل مقابل داریم: $D_1E_1 \| BC$ و $D_2E_2 \| BC$ و $D_3E_3 \| BC$. این اطلاعات را می‌توان به این صورت نشان داد: $D_iE_i \| BC$ برای $1 \le i \le 3$

ــ اندازهٔ پاره‌خط‌های زیر را با خط‌کش مشخص کرده و در کسرها جایگزین کنید و نسبت‌های برابر در ستون‌های متمایز را مشخص نمایید. اندازه ها به میلیمتر است

$$\frac{AD_1}{D_1B} = \frac{12}{24} \qquad \frac{AE_1}{E_1C} = \frac{10}{20}$$

$$\frac{AD_2}{D_2B} = \frac{25}{15} \qquad \frac{AE_3}{E_3C} = \frac{21}{5}$$

$$\frac{AD_3}{D_3B} = \frac{34}{8} \qquad \frac{AE_2}{E_2C} = \frac{15}{9}$$



ــ اگر پاره‌خط DE مانند شکل روبه‌رو موازی ضلع BC از مثلث ABC باشد، حدس می‌زنید نسبت کدام پاره‌خط‌ها با هم برابر باشند؟

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

آیا می‌توان نتیجه گرفت اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود، همواره تساوی مشابه بالا برقرار است؟ بله

در سال‌های قبل دیدید که نمی‌توان به درست بودن نتیجه‌ای که بر اساس مشاهدهٔ چند مورد به‌دست آمده باشد، مطمئن بود.

این نوع از استدلال که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی از آن گرفته می‌شود؛ یعنی «از جزء به کل می‌رسیم»، **استدلال استقرایی** نامیده می‌شود.

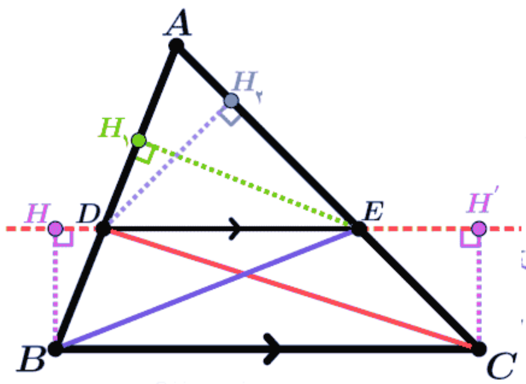
استدلال استنتاجی، استدلالی است که بر اساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم، بیان می‌شود.

در ریاضیاتی که تاکنون خوانده‌اید، با مواردی از استدلال‌های استنتاجی مواجه شده‌اید. در ادامه با استدلال استنتاجی، نتیجه‌ای را که با استدلال استقرایی به‌دست آوردیم، ثابت خواهیم کرد.

$* \left.\begin{matrix} BH \perp DE \\ CH' \perp DE \end{matrix}\right\} \Rightarrow BH \parallel CH'$ ، $\left.\begin{matrix} BH \parallel CH' \\ BC \parallel HH' \end{matrix}\right\} \Rightarrow BHH'C$ چهارضلعی متوازی‌الاضلاع $\Rightarrow BH = CH'$ (1)

قضیهٔ تالس

فعالیت



فرض کنید مانند شکل مقابل پاره‌خط DE موازی ضلع BC باشد.

می‌خواهیم نشان دهیم: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

از نقاط B و C بر امتداد پاره‌خط DE عمود ما کنیم و پای عمود را به ترتیب H و H' مینامیم و چون HH' روی DE است پس $* HH' \parallel BC$

۱ از نقطهٔ D به C و از E به B وصل کنید. مساحت‌های مثلث‌های DEC و DEB که آنها را با S_{DEC} و S_{DEB} نشان می‌دهیم، با هم برابرند. چرا؟ پس مساحت دو مثلث برابرند

$S_{DEC} = \frac{1}{۲} DE \times CH'$

$S_{DEB} = \frac{1}{۲} DE \times BH \xRightarrow{\text{طبق (1)}} S_{DEB} = \frac{1}{۲} DE \times CH'$

۲ از نقطهٔ E به ضلع AB عمود کنید و پای عمود را H_1 بنامید. سپس از D به ضلع AC عمود کنید و پای عمود را H_2 بنامید.

۳ $$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}} = \frac{\frac{1}{۲} EH_1 \times AD}{\frac{1}{۲} EH_1 \times DB} = \frac{AD}{DB}$$

۴ $$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \frac{\frac{1}{۲} DH_2 \times AE}{\frac{1}{۲} DH_2 \times EC} = \frac{AE}{EC}$$

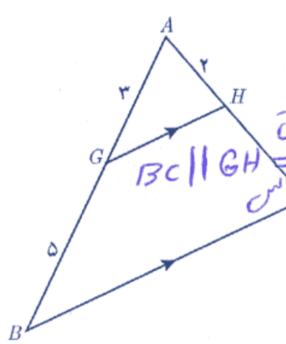
۵ از (۱) و (۳) و (۴) نتیجه می‌شود $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$. چرا؟ زیرا $S_{DEB} = S_{DEC}$

$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}} = \frac{S_{ADE}}{S_{DEC}}$$

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به‌دست می‌آیند، **قضیه** نامیده می‌شوند.

نتیجهٔ بالا قضیه‌ای از تالس[1] است. همان‌گونه که مشاهده کردید، رابطهٔ بین طول‌های پاره‌خط‌هایی را که توسط خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، بر دو ضلع دیگر آن مثلث به‌وجود می‌آید، بیان می‌کند.

کار در کلاس

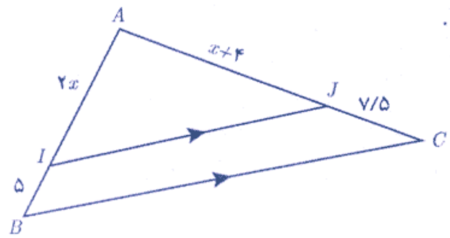


۱ در شکل پاره‌خط‌های GH و BC موازی‌اند. اندازهٔ پاره‌خط‌های AC و HC را به دست آورید.

$BC \parallel GH \xRightarrow{\text{طبق تالس}} \frac{AG}{GB} = \frac{AH}{HC} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۲}{HC}$ 　 $HC = \frac{۲ \times ۵}{۳} \Rightarrow HC = \frac{۱۰}{۳}$

$AC = AH + HC$ 　 $AC = ۲ + \frac{۱۰}{۳} = \frac{۶ + ۱۰}{۳} = \frac{۱۶}{۳}$

۱ــ فیلسوف و ریاضی‌دان که حدود ۶۲۳ سال قبل از میلاد در نواحی غرب ترکیهٔ امروزی به دنیا آمد. اثبات بسیاری از قضایای مهم هندسی را به او نسبت داده‌اند.



۲ با تشکیل یک معادله، مقدار x و اندازهٔ پاره‌خط‌های AI و AJ را به دست آورید.

$IJ \parallel BC \Rightarrow \frac{AI}{IB}=\frac{AJ}{JC} \Rightarrow \frac{۲x}{۵}=\frac{x+۴}{۷/۵} \Rightarrow$

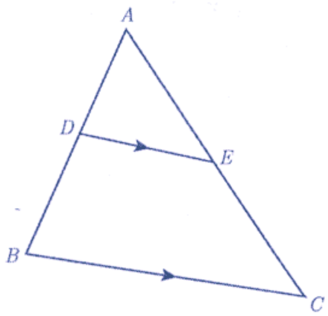
$۱۵x = ۵x+۲۰ \Rightarrow ۱۵x-۵x=۲۰ \Rightarrow ۱۰x=۲۰$

$\Rightarrow x=\frac{۲۰}{۱۰} \Rightarrow x=۲$

$AJ=(۲)+۴=۶ \quad , \quad AI=۲(۲)=۴$

تعمیم قضیهٔ تالس

فعالیت



۱ در شکل مقابل $DE \parallel BC$.

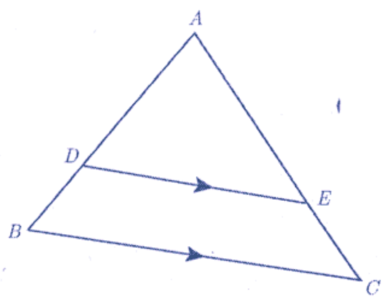
الف) تناسب قضیهٔ تالس را بنویسید. $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

ب) به کمک ترکیب نسبت در مخرج تناسب $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

پ) به کمک تفضیل نسبت در صورت از تناسب به‌دست آمده در (ب) تناسب $\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

توجه کنید که تناسب‌های به‌دست آمده در (ب) و (~~ج~~ پ) صورت‌های دیگر قضیهٔ تالس‌اند.

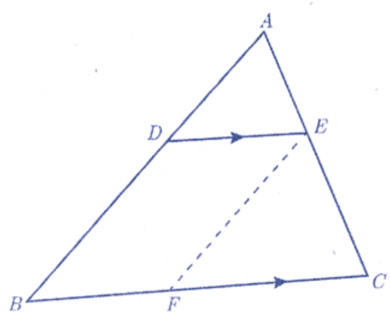
اشتباه تایپی



۲ در مثلث ABC پاره‌خط DE موازی ضلع BC است. ابتدا تناسبِ قضیهٔ تالس را بنویسید. سپس با توجه به ویژگی‌های تناسب و تکمیل تساوی‌های زیر، تناسب‌های دیگری را از قضیهٔ تالس نتیجه بگیرید.

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow \begin{cases} \frac{DB}{DA}=\frac{EC}{AE} , \frac{BD}{BA}=\frac{CE}{CA} , \frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CE} \\ \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} , \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE} \end{cases}$$

۳



الف) در شکل پاره‌خط‌های DE و BC موازی‌اند. با توجه به قضیهٔ تالس داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

ب) پاره‌خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم. بنابراین داریم: $\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC}$

پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC}$

ت) چهارضلعی $DEFB$ چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ متوازی الاضلاع چون $BD \parallel EF$, $DE \parallel BF$

پاره‌خط BF با کدام پاره‌خط برابر است؟ $BF=DE$

ث) با توجه به قسمت‌های (~~ج~~ پ) و (~~د~~ ت) داریم: $\boxed{\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}}$

اشتباه چاپی

این رابطه تعمیم قضیهٔ تالس است.

$BE \parallel BC \Rightarrow$

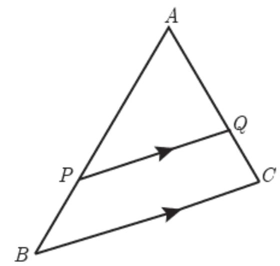
۱) (ب) $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \xRightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب نسبت}} \frac{AD}{AD+DB}=\frac{AE}{AE+EC} \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

۲) (پ) $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{AD-AB}{AB}=\frac{AE-AC}{AC} \Rightarrow \frac{\cancel{-}BD}{AB}=\frac{\cancel{-}EC}{AC} \Rightarrow$

$\frac{BD}{AB}=\frac{EC}{AC}$

کار در کلاس

در شکل پاره‌خط PQ موازی با ضلع BC است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.



الف) $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}=\frac{PQ}{BC}$ نادرست

ب) $\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}$ درست

پ) $\frac{PB}{AP}=\frac{QC}{AC}$ نادرست

ت) $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}=\frac{PQ}{BC}$ نادرست

ث) $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}$ درست

ج) $\frac{AB}{AP}=\frac{AC}{AQ}=\frac{BC}{PQ}$ درست

اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه‌جا کنیم، آنچه حاصل می‌شود، «عکس قضیه» است. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

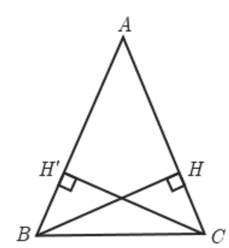
در مثال‌های زیر قضیه و عکس آن آمده است.

مثال ۱ :

قضیه : اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه : اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مثال ۲ :



قضیه : اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

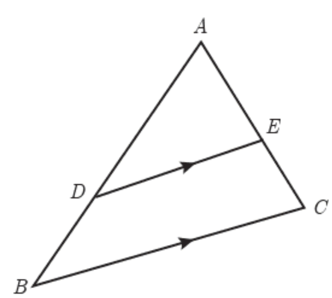
فرض: $AB=AC$

حکم: $BH=CH'$

عکس قضیه : اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH=CH'$

حکم: $AB=AC$



مثال ۳ : در قضیهٔ تالس فرض و حکم به صورت زیر است.

فرض: $DE \parallel BC$

حکم: $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

با توجه به آنچه گفته شد، فرض و حکم عکس قضیهٔ تالس را بنویسید.

فرض: $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

حکم: $DE \parallel BC$

به عبارت دیگر عکس قضیه تالس می‌گوید هرگاه پاره‌خط DE مانند شکل پاره‌خط‌های AB و AC را به گونه‌ای قطع کرده باشد که داشته باشیم $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$، در این صورت پاره‌خط DE موازی پاره‌خط BC است. به نظر شما عکس قضیه تالس درست است یا نه؟ کمی بعد به بررسی این مسئله خواهیم پرداخت.

معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض با حکم جابه‌جا می‌شود و قسمت‌هایی از فرض ممکن است هم در قضیه و هم درعکس آن ثابت باشند؛ مثلاً در مثال قبل مثلث بودن ABC هم در خود قضیه و هم در عکس آن جزء مفروضات است.

برهان خلف

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی از آن استفاده می‌شود، **برهان غیرمستقیم** ~~یا **برهان خلف**~~ است. ~~در برهان خلف~~ به‌جای اینکه به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا به یک نتیجهٔ غیرممکن می‌رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.

مسئله: A (فرض) $\Rightarrow$ B (حکم)

غیر مستقیم

اثبات به روش ~~برهان خلف~~:

$$\left.\begin{array}{r} A \text{ درست} \\ \text{و} \\ B \text{ نادرست} \end{array}\right\} \underbrace{\Rightarrow \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow}_{\text{استدلال، منطق و حقایق}} \begin{cases} \text{(۱) } A \text{ درست نیست} \\ \text{(۲) تناقض منطقی} \end{cases}$$

عکس نقیض (۱)

برهان خلف (۲)

پس نتیجه می‌گیریم حکم B درست است، زیرا در صورت نادرستی B طبق استدلال فوق به یکی از نتایج ۱ یا ۲ می‌رسیم که هیچ‌کدام نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

مثال: اگر $n \in \mathbb{N}$ و n^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه n نیز عددی فرد است.

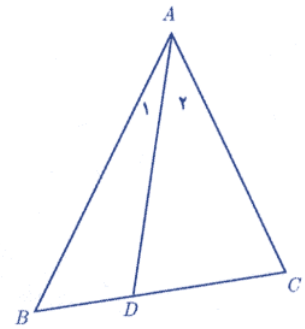
حل:

با استفاده از برهان خلف فرض کنیم حکم مسئله نادرست باشد؛ یعنی n عددی فرد نباشد؛ بنابراین n عددی زوج خواهد بود و می‌توان

نوشت $n=2k$ به‌طوری که k یک عدد طبیعی باشد.

بنابراین $n^2=4k^2=2(2k^2)$ که عددی زوج است و با فرض مسئله در تناقض است؛ لذا از ابتدا n نمی‌توانست عددی زوج باشد.

مثال : فرض کنیم AD نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq DC$ باشد، آن‌گاه $AB \neq AC$.



حل :

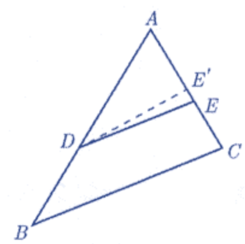
$AB = AC$
$AD = AD$
$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ $\Rightarrow$

با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد.

بنابراین داریم $AB = AC$ (فرض خلف) در این صورت خواهیم داشت $\overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{ACD}$ (چرا؟). از این هم‌نهشتی نتیجه خواهد شد $BD = DC$ است، که با فرض مسئله در تناقض است. لذا از ابتدا فرض $AB = AC$ نادرست بوده است، بنابراین $AB \neq AC$ است.

حال می‌خواهیم با استفاده از برهان خلف درستی عکس قضیهٔ تالس را ثابت کنیم.

عکس قضیهٔ تالس : مانند شکل مقابل در مثلث ABC، اگر $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$، آن‌گاه $DE \parallel BC$.

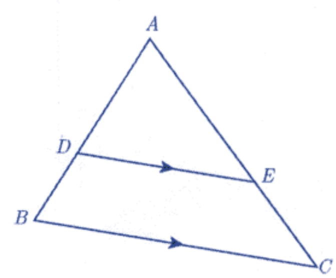


اثبات : با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حُکم مسئله غلط باشد؛ یعنی $DE \nparallel BC$. لذا از نقطهٔ D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه‌ای مانند E' قطع کند. طبق قضیهٔ تالس داریم $\frac{AE'}{E'C}=\frac{AD}{DB}$ و از مقایسه با فرض مسئله خواهیم داشت $\frac{AE}{EC}=\frac{AE'}{E'C}$.

حال با ترکیب نسبت در مخرج داریم $\frac{AE}{AC}=\frac{AE'}{AC}$ و در نتیجه $AE=AE'$. این یعنی نقطهٔ E بر E' منطبق است و لذا DE' همان DE است و این یک تناقض است، زیرا $DE' \parallel BC$ و $DE \nparallel BC$ است. بنابراین از ابتدا فرضِ غلط بودن حکم نادرست بوده است و حکم نمی‌تواند غلط باشد، یعنی $DE \parallel BC$ است.

قضیه‌های دو شرطی

همان‌گونه که دیدیم، قضیهٔ تالس و عکس آن هر دو درست‌اند؛ بنابراین برای مثلثی مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ در شکل مقابل می‌توان هر دوی آنها را به‌صورت زیر بیان کرد :



اگر $DE \parallel BC$، آن‌گاه $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ و برعکس.

چنین قضیه‌هایی را **قضیه‌های دو شرطی** می‌نامیم. قضیه‌های دو شرطی را با نماد $\Leftrightarrow$[1]

۱ــ این نماد نشان دهندهٔ آن است که هر کدام از طرفین می‌توانند طرف دیگر را نتیجه دهند؛ لذا یا هر دو طرف درست‌اند و یا هر دو طرف نادرست‌اند.

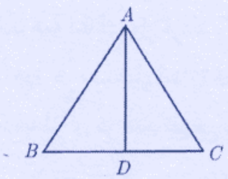
(که اگر و تنها اگرخوانده می‌شود) بیان کرد؛ به‌طور مثال قضیهٔ فوق و عکس آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :

فرض کنیم ABC یک مثلث و نقاط D و E به ترتیب روی AB و AC باشند. در این صورت

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Leftrightarrow DE \| BC .$$

در ادامه مثال‌هایی از قضایای دو شرطی ملاحظه خواهید کرد.

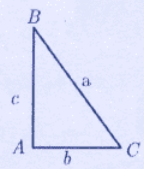
مثال : در یک مثلث دو ضلع برابرند؛ اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌رو به آنها باهم برابر باشند.



مثال : در مثلث متساوی‌الاضلاع یک پاره‌خط نیمساز است؛ اگر و تنها اگر میانه باشد.

کار در کلاس

الف) اگر در مثلث ABC، $AB=c$ ، $AC=b$ ، $BC=a$ و $a^2=b^2+c^2$ باشد.
آنگاه مثلث ABC در رأس A قائمه است.

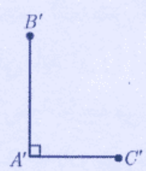


با توجه به قضیهٔ فیثاغورس اگر زاویهٔ A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید

ب) با انجام مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیهٔ فیثاغورس نیز درست است.

۱ـ فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازهٔ اضلاع آن برقرار است.



۲ـ پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به‌گونه‌ای درنظر بگیرید که $\hat{A}' = 90^\circ$ و $A'C' = AC$ و $A'B' = AB$ است.

۳ـ با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$، اندازه پاره‌خط $B'C'$ را به‌دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$

$(A'B')^2+(A'C')^2=(B'C')^2 \xrightarrow[AC=A'C']{AB=A'B'}$ $(AB)^2+(AC)^2=(B'C')^2$
$(AB)^2+(AC)^2=(BC)^2$ (دادیم) $\Rightarrow (BC)^2=(B'C')^2 \Rightarrow B'C'=BC$

۴ـ توضیح دهید چرا $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$ و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90^\circ$.

$\left\{\begin{array}{l} AB=A'B' \\ AC=A'C' \\ BC=B'C' \end{array}\right. \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \Rightarrow \hat{A}=\hat{A}'=90^\circ$

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به‌صورت یک قضیهٔ دو شرطی بیان کنید.

ج) در مثلث ABC ، $AB=c$ ، $AC=b$ ، $BC=a$ و $a^2=b^2+c^2$ است اگر و تنها اگر مثلث ABC در رأس A قائمه باشد.

مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که در پایه‌های قبل نیز تا حدودی با آن آشنا شده‌اید، استدلال با **مثال نقض** است. اگر فردی ادعا کند که «همهٔ اعداد فرد، اول‌اند»، این یک حکم کلی دربارهٔ تمام اعداد فرد است و ارائه عدد ۹ به عنوان عددی که فرد و غیر اول است، برای رد این ادعا کافی است. به چنین مثالی که برای رد یک حکم کلی استفاده می‌شود، مثال نقض می‌گوییم.

به عنوان مثالی دیگر؛ فرض کنیم فردی ادعا کند که «هیچ فرد ایرانی‌ای تا به حال مدال

فیلدز[1] نگرفته است». در این صورت شما برای رد ادعای او چه می‌توانید بگویید؟ اگر شما حتی یک فرد ایرانی را که مدال فیلدز گرفته است، برای او مثال بزنید، در این صورت ادعای او باطل شده است و در واقع شما با استفاده از یک مثال نقض، ادعای او را باطل کرده‌اید.

با دقت در ادعای مطرح شده خواهیم دید که کلمهٔ «هیچ» در این حکم باعث می‌شود که این ادعا یک حکم کلی برای تمام اعضای یک مجموعه (که در اینجا مجموعهٔ افراد ایرانی است) باشد. بنابراین در این مورد نیز آوردن یک مثال نقض کافی است تا آن حکم رد شود و به عبارتی غلط بودن آن حکم اثبات گردد.

در ادامه نمونه‌هایی از حکم‌های کلی آمده‌اند.

الف) همهٔ اعداد اول فردند. (حکم کلی دربارهٔ تمام اعداد اول)

ب) «در هر مستطیل اندازهٔ قطرها باهم برابر است.» (حکم کلی دربارهٔ تمام مستطیل‌ها)

پ) «به ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت $n^۲+n+۴۱$ عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

نادرست است

دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم «الف» چه حدسی می‌زنید؟ چگونه می‌توانید حدس خود را ثابت کنید؟ مثال نقض: عدد ۲ اول زوج است

می‌دانیم که ۲ یک عدد اول و زوج است. بنابراین حکم کلی «الف» با ارائهٔ همین مثال نقض رد می‌شود. دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم‌های «ب» و «پ» چه حدس‌هایی می‌زنید؟ آیا می‌توانید برای آنها مثال نقض بیاورید و آنها را باطل کنید؟

اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض ارائه کنیم، دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟ آیا در این حالت درستی حکم را باید پذیرفت؟

برای قسمت (ب) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این برای پذیرش این حکم کافی نیست و باید توجه کرد که «**برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید آن را اثبات کنیم**».

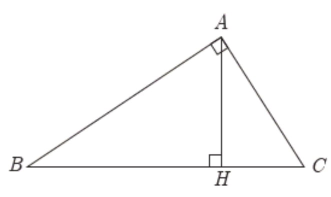
برای مثال نقض اگر جای n عدد ۴۱ یا هر مضرب ۴۱ را قرار دهیم. خواهیم داشت $۴۱^۲+۴۱+۴۱=۴۱(۴۱+۲)=۴۱\times۴۳$ پس دیگر عبارت عدد اول نیست

دربارهٔ گزینهٔ (پ) چه می‌توان گفت؟

اگر درستی یا نادرستی یک حکم کلی بر ما مشخص نباشد و برای رد آن، مثال نقض نیز نتوانیم ارائه دهیم، نمی‌توان دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم کلی نتیجه‌ای گرفت.

تمرین

۱ در شکل مقابل مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را به دو روش محاسبه کنید و از تساوی دو عبارت به‌دست آمده برای مساحت مثلث، یک تناسب به‌دست‌آورید.



[1] ــ مدال یا نشان فیلدز (Fields medal) جایزه‌ای است که به ابتکار ریاضی‌دان کانادایی جان چارلز فیلدز هر چهار سال یک‌بار به ریاضی‌دانان جوان (کمتر از چهل سال) که کار ارزنده‌ای در ریاضی انجام داده باشند تعلق می‌گیرد. از آنجا که در رشتهٔ ریاضی جایزهٔ نوبل اهدا نمی‌شود، این جایزه را «نوبل ریاضیات» می‌خوانند. در سال ۲۰۱۴ نشان فیلدز به ریاضی‌دان ایرانی خانم **مریم میرزاخانی** تعلق گرفت. گفتنی است که میرزاخانی اولین زنی در دنیاست که موفق به گرفتن این نشان شده‌است. البته با تأسف تمام موقع تدوین کتاب خبر درگذشت ایشان، جهان علم و جامعهٔ ایرانی را سخت متأثر ساخت، روانش شاد

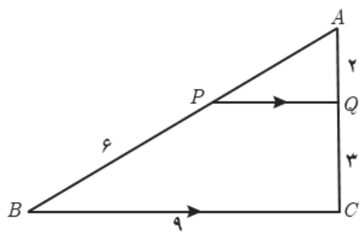
حل تمرینات در صفحات بعدی

۲ در هر مورد، مقدار عددی نسبت $\frac{a}{b}$ را به‌دست آورید.

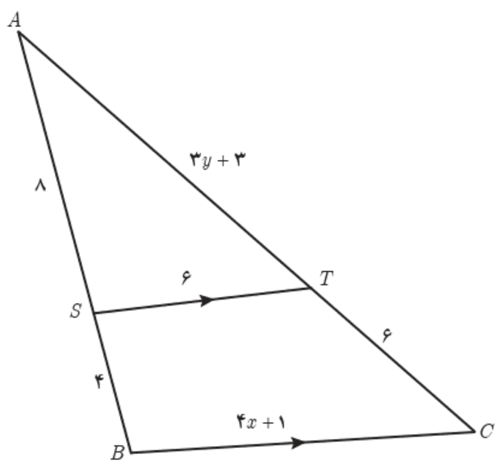
الف) $\frac{a}{۱۰+a}=\frac{b}{۸+b}$ ‏ ‏ ‏ ‏ ب) $\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷}{۷+۲b}$

۳ ثابت کنید در هر مثلث پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.

۴ در شکل مقابل $PQ||BC$ است. طول پاره‌خط‌های AP و PQ را به‌دست آورید.



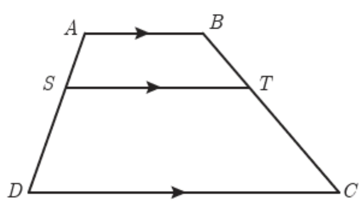
۵ در شکل مقابل $ST||BC$ است. مقادیر x و y را به‌دست آورید.



تهیه کننده :
گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

۶ در ذوزنقه مقابل $AB||ST||DC$ است. ثابت کنید : $\frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC}$

(**راهنمایی** : یکی از قطرها را رسم کنید.)



۷ در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم عکس آنچه را داده شده است، بنویسید.

الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود.

ب) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبه‌رو موازی باشند، در این‌صورت زوایای مقابل با هم برابرند.

پ) اگر رأس‌های یک چهارضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، در این‌صورت زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل‌اند.

ت) در یک مثلث اگر دو ارتفاع نابرابر باشند، «ضلع متناظر به ارتفاع بزرگ‌تر» کوچک‌تر است از «ضلع مقابل به ارتفاع کوچک‌تر».

(**راهنمایی** : شکل بکشید و به زبان ریاضی بنویسید)

۸ با برهان خلف ثابت کنید نمی‌توان از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط، دو عمود بر آن خط رسم کرد.

۹ هر یک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

الف) هیچ عدد اولِ بزرگ‌تر از ۱۲۷ وجود ندارد.

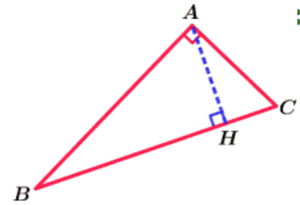
ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.

پ) در هر مثلث اندازهٔ هر ضلع از اندازهٔ هر ارتفاع بزرگ‌تر است.

ت) در هر مثلث میانه و عمودمنصف متناظر به هر ضلع برهم منطبق‌اند.

تمرین فصل ۳ – صفحه ۴۰ و ۴۱

تمرین ۱ :



$$\left.\begin{array}{l} S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC \\ S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{۲}AB\times AC=\frac{۱}{۲}AH\times BC \Rightarrow AB\times AC=AH\times BC$$

تمرین ۲ :

الف) $\frac{a}{۱۰+a}=\frac{b}{۸+b} \Rightarrow ۸a+\cancel{ab}=۱۰b+\cancel{ab} \Rightarrow ۸a=۱۰b \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۱۰}{۸} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۵}{۴}$

ب) $\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷}{۷+۲b} \Rightarrow ۲۱a+\cancel{۶ab}+\cancel{۷۰}+۲۰b=۳۰b+\cancel{۷۰}+\cancel{۶ab}+۱۴a \Rightarrow ۲۱a-۱۴a=۳۰b-۲۰b \Rightarrow ۷a=۱۰b \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۱۰}{۷}$

تمرین ۳ : مثلث ABC را چنان در نظر می گیریم که M وسط ضلع AB و N وسط ضلع AC باشد. در نتیجه داریم:

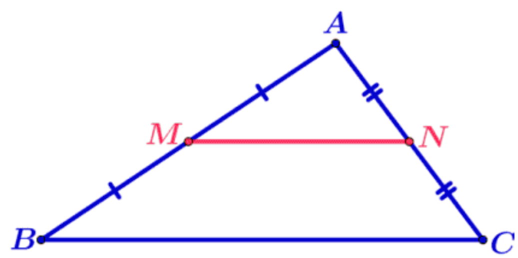
$AN=NC=\frac{AC}{۲}$, $AM=MB=\frac{AB}{۲}$

$\frac{AM}{MB}=۱$, $\frac{AN}{NC}=۱ \Rightarrow \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow$ طبق عکس قضیه تالس $MN\|BC$

$\frac{AM}{AB}=\frac{\frac{AB}{۲}}{AB}=\frac{۱}{۲}$, $\frac{AN}{AC}=\frac{\frac{AC}{۲}}{AB}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{۱}{۲}$ (۱)

$MN\|BC$ طبق نتیجه قضیه تالس $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$ (۲)

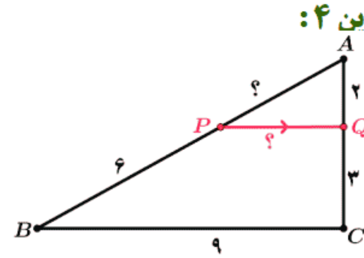
طبق روابط (۱) و (۲): $\frac{MN}{BC}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow MN=\frac{۱}{۲}BC$



تمرین ۴ :

$PQ\|BC$ طبق قضیه تالس $\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{AP}{۶}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow AP=\frac{۶\times۲}{۳} \Rightarrow AP=۴$

$PQ\|BC$ طبق قضیه تالس $\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{QC} \Rightarrow \frac{۲}{۲+۳}=\frac{PQ}{۹} \Rightarrow PQ=\frac{۹\times۲}{۵} \Rightarrow PQ=\frac{۱۸}{۵}$



تهیه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

تمرین ۵ :

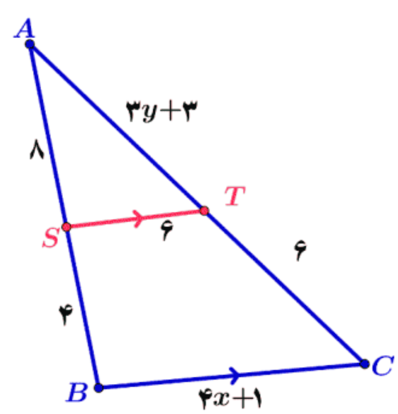
$ST\|BC$ طبق قضیه تالس $\frac{AS}{AB}=\frac{AT}{AC}=\frac{ST}{BC}$

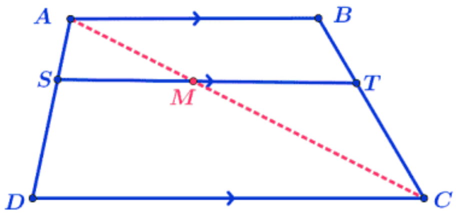
$\frac{AS}{AB}=\frac{AT}{AC} \Rightarrow \frac{۸}{۱۲}=\frac{۳y+۳}{۳y+۹} \Rightarrow ۲۴y+۷۲=۳۶y=۳۶$

$\Rightarrow ۳۶y-۲۴y=۷۲-۳۶ \Rightarrow y=\frac{۳۶}{۱۲} \Rightarrow y=۳$

$\frac{AS}{AB}=\frac{ST}{BC} \Rightarrow \frac{۸}{۱۲}=\frac{۶}{۴x+۱} \Rightarrow ۳۲x+۸=۷۲$

$\Rightarrow ۳۲x=۷۲-۸ \Rightarrow ۳۲x=۶۴ \Rightarrow x=\frac{۶۴}{۳۲} \Rightarrow x=۲$





تمرین ۶:

قطر AC را رسم می کنیم نقطه برخورد قطر AC با خط ST را M می نامیم.

$\triangle ADC: \ SM \parallel DC \Rightarrow$ طبق قضیه تالس $\Rightarrow \dfrac{AS}{SD} = \dfrac{AM}{MC}$ (۱)

$\triangle CAB: \ AB \parallel MT \Rightarrow$ طبق قضیه تالس $\Rightarrow \dfrac{MC}{AM} = \dfrac{CT}{TB} \Rightarrow$ عکس تناسب $\Rightarrow \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{TB}{CT}$ (۲)

طبق روابط (۱) و (۲): $\Rightarrow \dfrac{AS}{SD} = \dfrac{TB}{CT}$

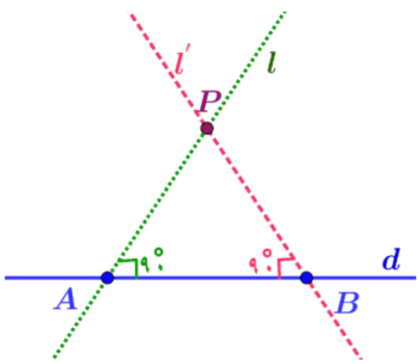
تمرین ۷:

الف) اگر در مثلثی سه زاویه برابر باشند، آنگاه سه ضلع نیز برابر خواهند بود.

ب) اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل برابر باشند آنگاه در این صورت اضلاع روبه رو موازی هستند.

پ) اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل مکمل باشند آنگاه در این صورت رأس های آن چهارضلعی روی یک دایره هستند.

ت) اگر در یک مثلث دو ضلع نابرابر باشند، آنگاه ارتفاع متناظر به ضلع بزرگتر کوچکتر از ارتفاع متناظر به ضلع کوچکتر است.



تمرین ۸:

(فرض خلف) فرض می کنیم از نقطه P خارج خط d دو خط L و L' بر d عمود هستند.

پس هر دو خط L و L'، خط d را در دو نقطه A و B قطع می کنند. و چون عمود هستند لذا داریم:

$\hat{A} = ۹۰^\circ \quad , \quad \hat{B} = ۹۰^\circ$

$\triangle ABP: \ \hat{A} + \hat{B} + \hat{P} = ۹۰^\circ + ۹۰^\circ + \hat{P} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{P} = ۱۸۰^\circ + \hat{P} \overset{\hat{P} > ۰}{\Rightarrow} \hat{A} + \hat{B} + \hat{P} > ۱۸۰^\circ$

این متناقض با این است که مجموع زاویه های داخلی ۱۸۰° است. پس فرض غلط است.

تمرین ۹:

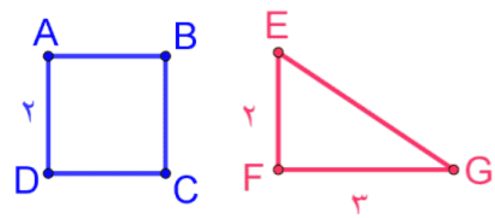
الف) ۲۱۱ عدد اول است و از ۱۲۷ بزرگتر است.

تهیه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

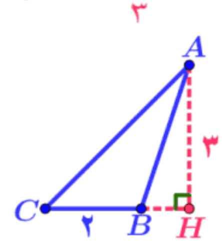
khuzmath1394@chmail.ir

ب)



$S_{\triangle EFG} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۳ = ۳$ و $S_{\square ABCD} = ۲ \times ۲ = ۴ \Leftarrow S_{\triangle EFG} < S_{\square ABCD}$

پ)



ت)