درس دوم

وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک

وارون یک تابع

کار در کلاس

الف) هر مایل تقریباً ۱/۶ کیلومتر است. تعیین کنید که هر یک از جملات سمت راست مربوط به کدام یک از رابطه‌های سمت چپ است.

این رابطه برای تبدیل تقریبی «مایل» به «کیلومتر» است. $f(x)=\frac{۸}{۵}x$

این رابطه برای تبدیل تقریبی «کیلومتر» به «مایل» است. $g(x)=\frac{۵}{۸}x$

ب) تندی ۳۰ مایل بر ساعت تقریباً معادل تندی چند کیلومتر بر ساعت است؟ $f(۳۰)=\frac{۸}{۵}\times ۳۰=۴۸ \ \text{km/h}$

هر تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ بیان می‌کند که متغیر y چه ارتباطی با متغیر x دارد و چگونه می‌توان با در دست داشتن مقدار x، مقدار y را به‌دست آورد. اما گاهی مهم است که بدانیم چگونه می‌توان از مقدار y به مقدار x رسید. تبدیل یکای اندازه‌گیری نمونه‌ای ساده از این حالت است.

به خاطر دارید که یک تابع را می‌توان با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نشان داد.

با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج مرتب (a,b) می‌توان زوج مرتب (b,a) را به‌دست آورد. حال اگر مؤلفه‌های همهٔ زوج‌های مرتب تابع f را جابه‌جا کنیم، رابطهٔ جدیدی به دست می‌آید که آن را **وارون** تابع f می‌گوییم و با $f^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

خواندنی

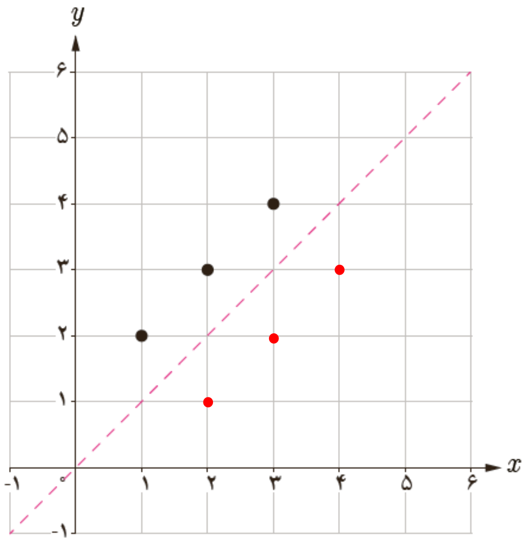
سال‌هاست که ریاضی‌دانان، با کمک داده‌های آماری جمعیت، تلاش می‌کنند به تابع تخمین جمعیت دست یابند و در این زمینه به نتایجی هم رسیده‌اند. این تابع نشان می‌دهد که مثلاً در سال ۱۴۲۰ جمعیت ایران چه تعداد خواهد بود. با این همه، در عمل معمولاً وارون این تابع نیز اهمیت دارد؛ به عنوان مثال مهم است که مشخص کنیم در چه سالی جمعیت ایران به ۱۰۰ میلیون نفر خواهد رسید. در فصل پنجم با نمونه‌ای از توابع تخمین جمعیت آشنا خواهید شد.

برای مثال وارون تابع $f=\{(۲,۱),(۵,۳),(۶,۴)\}$ برابر با $f^{-۱}=\{(۱,۲),(۳,۵),(۴,۶)\}$ است.

کار در کلاس

وارون تابع‌های داده شده را حساب کنید.

$s=\{(۴,۱),(۱,۴),(۳,۳),(۲,۵)\}$	$s^{-۱}=\{(۱,۴),(۴,۱),(۳,۳),(۵,۲)\}$
$t=\{(۵,۱),(۱,۴),(۴,۳),(۲,۳)\}$	$t^{-۱}=\{(۱,۵),(۴,۱),(۳,۴),(۳,۲)\}$
$u=\{(۲,۳),(۵,۲),(۴,۱),(۳,۴)\}$	$u^{-۱}=\{(۳,۲),(۲,۵),(۱,۴),(۴,۳)\}$



فعالیت

۱ در دستگاه مختصات داده شده نمودار تابع f رسم شده است.

الف) تابع f را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

$f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴)\}$

ب) تابع $f^{-۱}$ را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

$f^{-۱}=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۳)\}$

پ) در همین دستگاه مختصات، نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید.

ت) نمودار f و $f^{-۱}$ چه ارتباطی با هم دارند؟

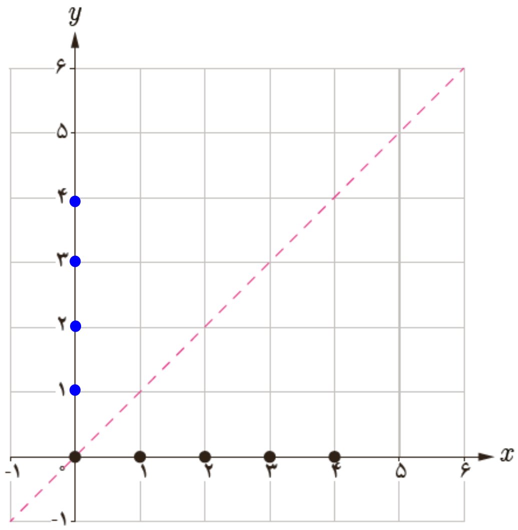
نمودار ها دو طرف خطچین قرمز رنگ قرار دارند ونسبت به این خط قرینه اند زیرا اگر هر نقطه را روی نمودار f به نقطهٔ نظیرش روی نمودار $f^{-۱}$ وصل کنیم این خط عمود منصف پاره خط ایجاد شده خواهد بود.

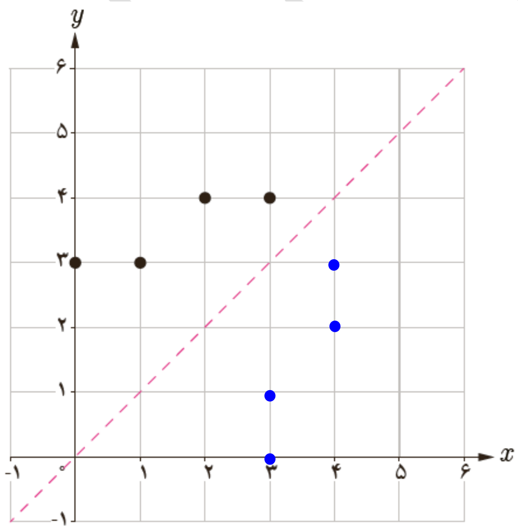
«نمودار f و $f^{-۱}$ نسبت به خط y = x قرینهٔ یکدیگرند.»

۲ الف) در هر مورد بیان کنید چرا نمودار داده شده معرف یک تابع است و سپس وارون آن را رسم کنید.

نمودار ها معرف یک تابع هستند زیرا برای هر x فقط یک y وجود دارد.

می توانیم خط هایی موازی محور y ها رسم کنیم ملاحظه می شود که نمودار ها فقط در یک نقطه این خطوط را قطع خواهند کرد. همچنین می توانیم هر یک از توابع را به صورت زوج مرتب نمایش دهیم و مشاهده می کنیم که مؤلفه اول تکراری نداریم.



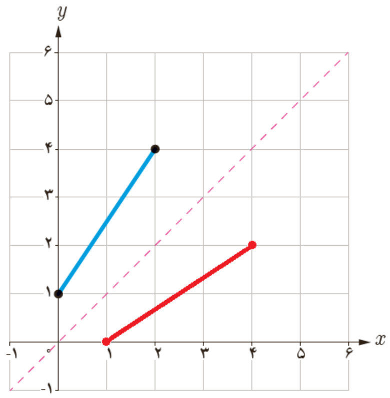


ب) عبارت زیر را کامل کنید.

برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است که قرینهٔ نمودار آن تابع را نسبت به خط y = x رسم کنید.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

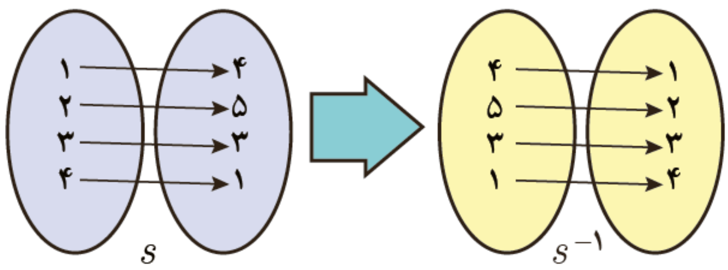
۳ نمودار وارون تابع داده شده را رسم کنید.

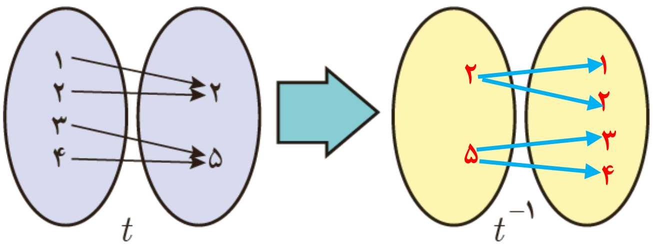


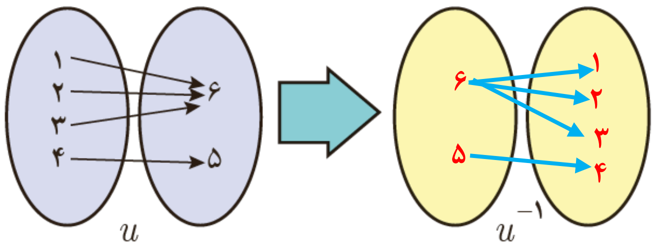
تابع یک به یک

فعالیت

۱ الف) به نمونهٔ حل شده دقت کنید. با کمک نمودار پیکانی، وارون توابع داده شده را به دست آورید.







ب) درستی یا نادرستی عبارات روبه‌رو را تعیین کنید.

s^{-1} یک تابع است.	بله ■ خیر □
t^{-1} یک تابع است.	بله □ خیر ■
u^{-1} یک تابع است.	بله □ خیر ■

پ) عبارت زیر را کامل کنید.

وارون تابع f، خود یک تابع است هرگاه در زوج‌های مرتب متفاوت تابع f مؤلفه‌های ......دوم...... تکراری وجود نداشته باشد.

> به تابعی که در زوج‌های مرتب متفاوت خود مؤلفه‌های **دوم** تکراری نداشته باشد، تابع **یک‌به‌یک** می‌گویند.

تذکر : وارون هر تابع یک‌به‌یک، خود یک تابع است.

ت) تابعِ $f=\{(۱,۲),(-۲,۴),(۲,-۱),(-۱,۲)\}$ را در نظر بگیرید. بدون محاسبهٔ f^{-1}، تعیین کنید که این تابع یک‌به‌یک است یا خیر؟

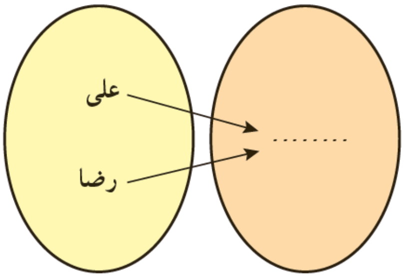
خیر ، زیرا همانطور می بینم مولفه های دوم در زوج های مرتب متفاوت تکراری است پس این تابع یک به یک نیست.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

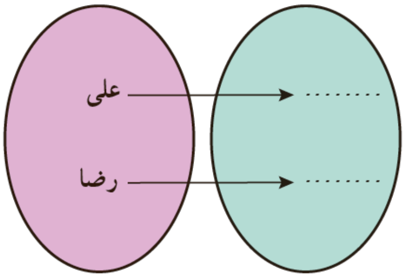
۲ نمودارهای پیکانی زیر بیانگر تابع اثر انگشت و تابع گروه خونی علی و رضا است.

الف) مشخص کنید که کدام نمودار پیکانی مربوط به اثر انگشت و کدام نمودار پیکانی مربوط به گروه خونی است.

نمودار پیکانی f مربوط به اثر انگشت و نمودار پیکانی g مربوط به گروه خونی است .



g



f

ب) آیا f و g هر دو تابع‌اند؟

بله هردو تابع هستند زیرا هر شخص فقط یک اثر انگشت و یک نوع گروه خونی دارد.

پ) در مورد تابع بودن f^{-1} و g^{-1} چه می‌توان گفت؟

f^{-1} تابع است اما g^{-1} تابع نیست .

ت) کدام‌یک از دو تابع f و g یک‌به‌یک هستند؟

تابع f یک به یک است ولی تابع g یک به یک نیست.

ث) عبارت‌های زیر را کامل کنید.

با دانستن گروه خونی یک انسان، هویت او به‌طور یکتا تعیین .نمی.شود. .

با دانستن اثر انگشت یک انسان، هویت او به‌طور یکتا تعیین .می.شود.. .

خواندنی

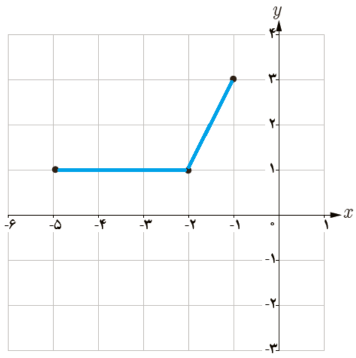
قرن‌ها پیش رشیدالدین فضل‌الله همدانی، طبیب و مورخ برجستهٔ ایرانی در کتاب جامع‌التواریخ به رسم چینی‌ها در شناسایی افراد از طریق اثر انگشت اشاره کرده و توضیح داده بود که «شواهد و تجربیات نشان می‌دهد که اثر انگشت هیچ دو نفری کاملاً یکسان نیست». در آن زمان در ایران نیز از اثر انگشت شست برای مهر کردن اسناد استفاده می‌کردند. در اوایل قرن بیستم، غربی‌ها نیز با الهام گرفتن از شرقی‌ها برای شناسایی در تحقیقات جنایی از اثر انگشت بهره گرفتند. امروزه تشخیص اثر انگشت به عنوان یکی از دقیق‌ترین و سریع‌ترین روش بیومتریک در حفظ امنیت سیستم‌های کنترل دسترسی و همچنین در ساعت‌های حضور و غیاب، کاربرد بسیاری دارد.

فعالیت

۱ در شکل داده شده، با وصل کردن نقاط مشخص شده به هم، نموداری رسم کنید که تابع باشد.

الف) آیا تابعی که رسم کرده‌اید یک‌به‌یک است؟

خیر یک به یک نیست .زیرا نقاطی که روی پاره خط موازی محور طول ها قرار دارند همگی یک عرض دارند به عبارتی نقاط متفاوت مؤلفه ی دوم یکسان دارند.



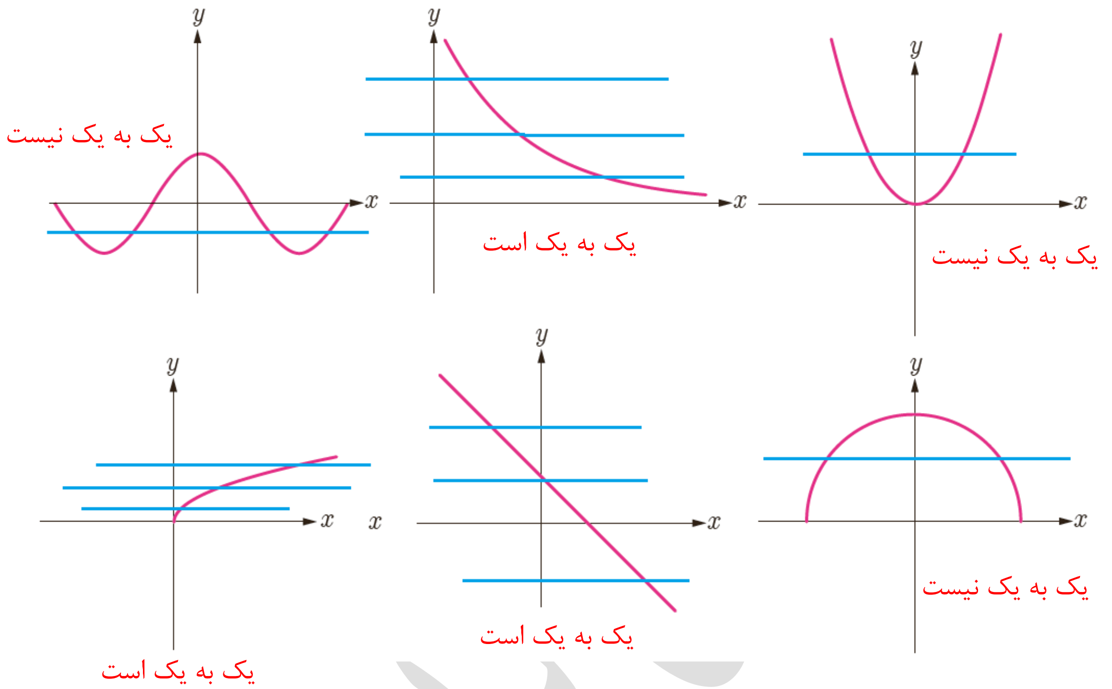
ب) با کامل کردن عبارت زیر مشخص کنید که چگونه با در دست داشتن نمودار یک تابع، می‌توان تشخیص داد که آیا آن تابع یک به یک است یا خیر؟

اگر هر خطِ موازی محور طول ها (x ها) نمودار یک تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن‌گاه آن تابع یک به یک است.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

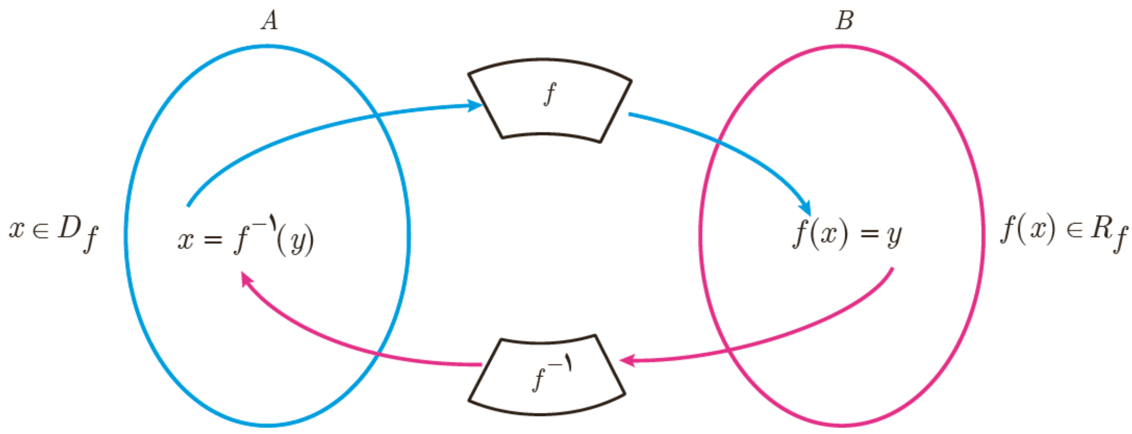
برای تشخیص دادن این که یک تابع یک به یک است یا خیر کافی است خط یا خطوطی موازی محور طول ها (x ها) رسم کنیم اگر نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند می گوییم تابع یک به یک نیست.

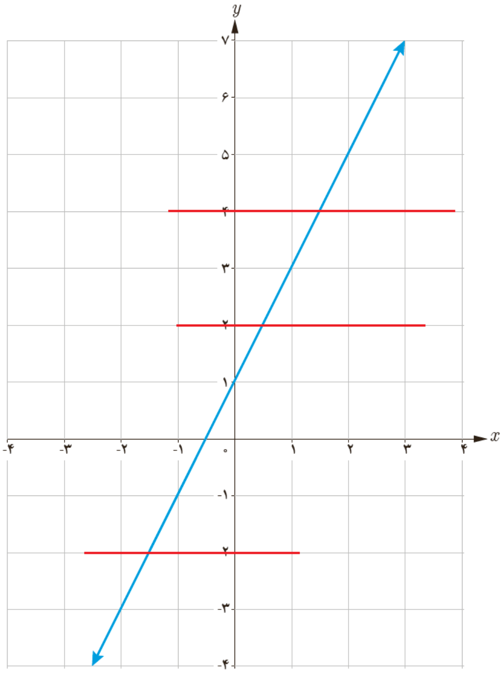
۲ کدام‌یک از توابع زیر یک‌به‌یک است؟



به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت

اگر f تابعی یک به یک باشد و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و f^{-1} را نشان می‌دهد. (R_f نماد برد تابع f است).





فعالیت

تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲x+۱$ را در نظر می‌گیریم.

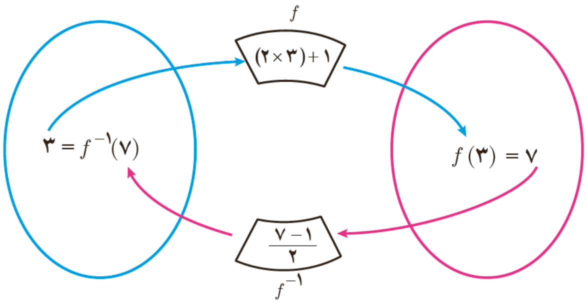
الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک به یک است.

همانطور که مشاهده می شود اگر خط یا خطوطی موازی محور طول ها رسم کنیم نمودار را حد اکثر در یک نقطه قطع می کند .

ب) نمودار زیر را توضیح دهید :

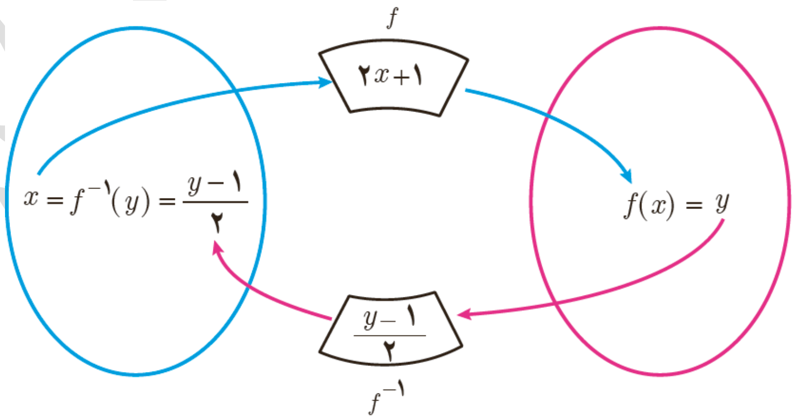
$(۳,۷) \in f$ و $(۷,۳) \in f^{-۱}$

به عبارت دیگر $f(۳) = ۷$ و $f^{-۱}(۷) = ۳$



۳ عضوی از دامنه تابع f است که با توجه به ضابطهٔ تابع f ابتدا دو برابر می شود سپس یک واحد به آن اضافه می شود و مقدار برد به دست می آید که ۷ است . حالا عدد ۷ عضوی از برد تابع f است و عضوی از دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ است که از آن یک واحد کم می شود سپس حاصل نصف می شود تا عدد ۳ به دست آید. که عدد ۳ حالا عضوی از برد تابع $f^{-۱}$ است .

پ) در حالت کلی برای هر عضو دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲x+۱$ ، داریم :



ت) بنابراین می‌توان نوشت :

$$f(x) = ۲x+۱ \qquad (x \in D_f)$$

$$f^{-۱}(y) = \frac{y-۱}{۲} \qquad (y \in R_f)$$

آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه $f^{-۱}$ همان برد f است. بنابراین یک نمایش مناسب برای $f^{-۱}$ به‌صورت زیر است :

$$f^{-۱}(x) = \frac{x-۱}{۲}$$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

به‌طور کلی :
برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت مانند f، در معادله $y=f(x)$، x را برحسب y محاسبه می‌کنیم. سپس با جابه‌جا کردن y و x، ضابطهٔ تابع $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

وارون تابع با ضابطهٔ $f(x)=۲x+۱$، چنین محاسبه می‌شود :

$$f(x)=۲x+۱ \Rightarrow y=۲x+۱$$
$$\Rightarrow ۲x=y-۱$$
$$\Rightarrow x=\frac{y-۱}{۲}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(y)=\frac{y-۱}{۲}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{۲}$$

کار در کلاس

۱ هر تابع خطی غیرثابت یک‌به‌یک است. (چرا؟) وارون هر یک از توابع خطی زیر را به‌دست آورید.

توابع خطی غیر ثابت یک به یک هستند زیرا هرگاه خطی موازی محور x ها رسم کنیم نمودار را فقط در یک نقطه قطع می کند.
اما نمودار توابع ثابت خطی موازی محور طول ها است و هر دو زوج مرتب متفاوت دارای مؤلفه دوم یکسان هستند. پس نمی تواند یک به یک باشد.

الف) $f(x)=x+۵$

$$y=x+۵ \Rightarrow x+۵=y$$
$$\Rightarrow x=y-۵ \Rightarrow f^{-۱}(x)=x-۵$$

ب) $g(x)=۴x$

$$y=۴x \Rightarrow ۴x=y$$
$$\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}y \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۴}x$$

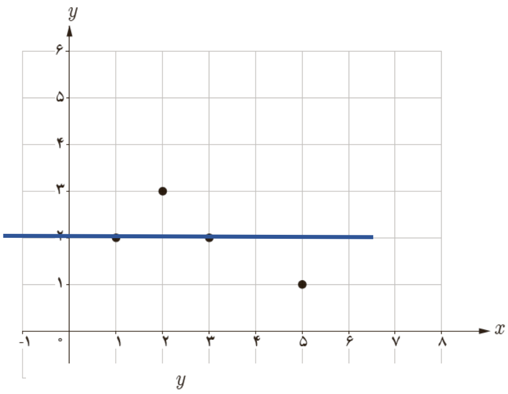
پ) $u(x)=۲x+۳$

$$y=۲x+۳ \Rightarrow ۲x+۳=y$$
$$\Rightarrow ۲x=y-۳ \Rightarrow x=\frac{y-۳}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۳}{۲}$$

ت) $v(x)=\frac{۲}{۳}x-۴$

$$y=\frac{۲}{۳}x-۴ \Rightarrow y=\frac{۲x-۱۲}{۳} \Rightarrow ۳y=۲x-۱۲$$
$$\Rightarrow ۲x-۱۲=۳y \Rightarrow ۲x=۳y+۱۲ \Rightarrow x=\frac{۳y+۱۲}{۲}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۳x+۱۲}{۲}$$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی



۲) الف) چرا نمودار داده شده، نمودار یک تابع یک‌به‌یک نیست؟

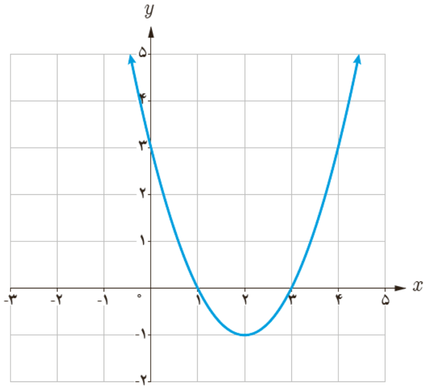
زیرا اگر خطی مانند $y = ۲$ را رسم کنیم نمودار را در دو نقطه قطع می کنند.

ب) با حذف تنها یک نقطه، نمودار مقابل را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنید.

مسئله چند جواب دارد؟

می توانیم نقطهٔ $(۳,۲)$ یا $(۱,۲)$ را حذف کنیم تا نمودار تبدیل به یک تابع شود..

کار در کلاس



الف) به نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-۴x+۳$ در شکل مقابل، دقت کنید.

با محدود کردن دامنهٔ این تابع روی کدام بازه‌های زیر می‌توان یک تابع یک‌به‌یک ساخت؟

☐ $[۱,۴)$

☑ $[۰,۲]$

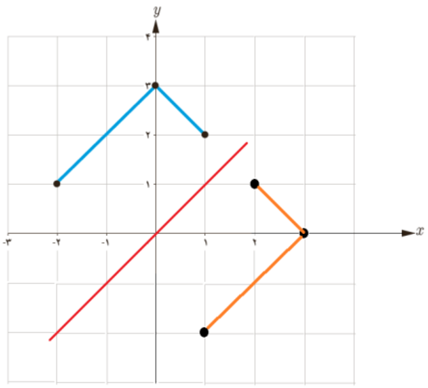
ب) آیا هر تابع درجهٔ ۲، تابعی یک‌به‌یک است؟ چرا؟

در حالت کلی خیر زیرا وقتی خطی موازی محورطول ها رسم می کنیم نمودار را در دو نقطه قطع می کند. مگر اینکه دامنهٔ تابع را محدود کنیم .

تمرین

۱) وارون تابع $f=\{(۲,۳),(-۲,۱),(-۱,۲)\}$ را به‌دست آورید.

$f^{-۱}=\{(۳,۲),(۱,-۲),(۲,-۱)\}$



۲) نمودار وارون تابع داده شده در شکل مقابل را رسم کنید.

۳) ضابطهٔ وارون هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را بیابید.

الف) $f(x)=۵x-۲$

$y=۵x-۲ \Rightarrow ۵x-۲=y \Rightarrow ۵x=y+۲$

$\Rightarrow x=\dfrac{y+۲}{۵} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\dfrac{x+۲}{۵}$

ب) $f(x)=\dfrac{۳}{۵}x+۴$

$y=\dfrac{۳}{۵}x+۴ \Rightarrow ۵y=۳x+۲۰ \Rightarrow ۳x+۲۰=۵y$

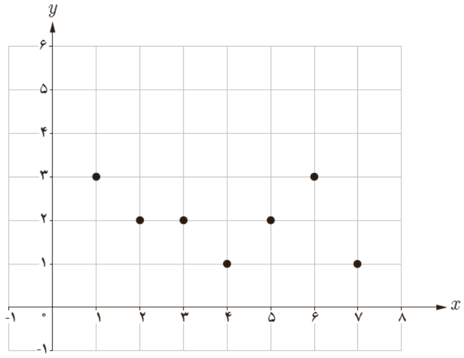
$\Rightarrow ۳x=۵y-۲۰ \Rightarrow x=\dfrac{۵y-۲۰}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\dfrac{۵x-۲۰}{۳}$

ج) $f(x)=\dfrac{-۷x+۳}{۵}$

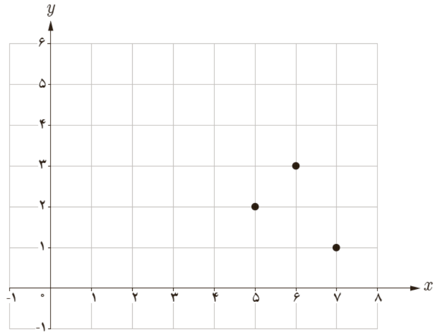
$y=\dfrac{-۷x+۳}{۵} \Rightarrow ۵y=-۷x+۳ \Rightarrow ۷x=-۵y+۳ \Rightarrow x=\dfrac{-۵y+۳}{۷} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\dfrac{-۵x+۳}{۷}$

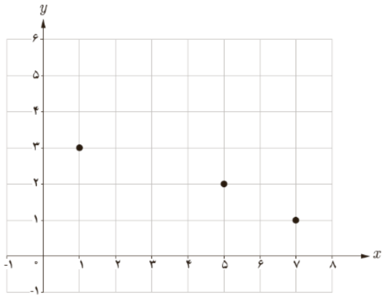
تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

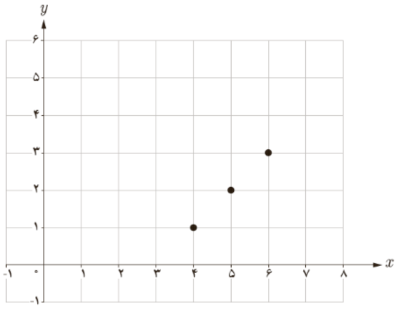
۴ می‌خواهیم با حذف تعدادی از نقاط نمودار مقابل، آن را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنیم. حداکثر چند نقطه می‌تواند باقی بماند؟

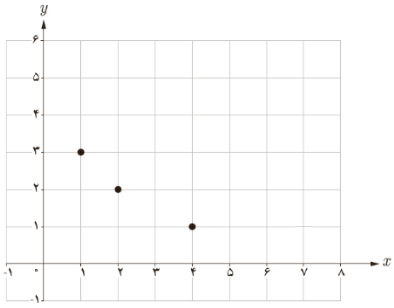


حد اکثر ۳ نقطه می تواند باقی بماند.
در شکل ها ی زیر چند حالت را رسم کرده ایم.



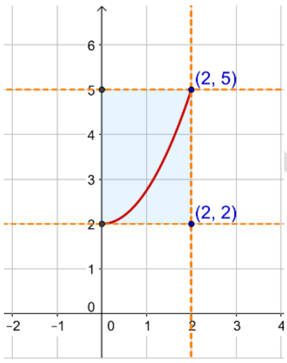






۵ نمودار تابعی با دامنهٔ $[۰,۲]$ و برد $[۲,۵]$ را رسم کنید :

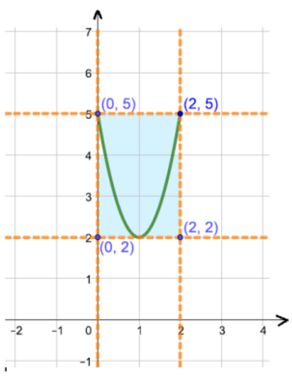
الف) به شرطی که این تابع یک‌به‌یک باشد.



نمودار تابع هایی مانند $g(x)=\frac{-۳}{۲}x+۵$ ، $f(x)=\frac{۵}{۲}x$ و $f(x)=\frac{۳}{۴}x^{۲}+۲$ با دامنه $[۰,۲]$ و برد $[۲,۵]$ یک به یک است.

البته بی شمار تابع خطی و غیر خطی یک به یک می توان پیدا کرد.

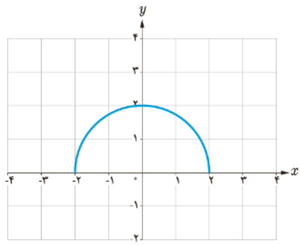
ب) به شرطی که این تابع یک‌به‌یک نباشد.

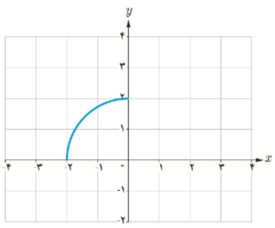


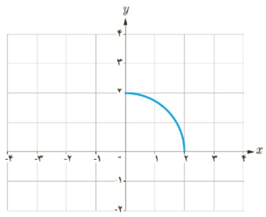
نمودار تابع $f(x)=۳x^{۲}-۶x+۵$ با دامنه $[۰,۲]$ و برد $[۲,۵]$ رسم شده است این تابع یک به یک نیست.

۶ با حذف بخشی از نمودار نیم‌دایرهٔ داده شده، نمودار یک تابع یک‌به‌یک را مشخص کنید.

دامنه تابع نیم دایره $[-۲,۲]$ است اگر دامنه را به صورت $[۰,۲]$ یا $[-۲,۰]$ محدود کنیم آنگاه نمودار یک تابع یک به یک را مشخص می کند.







تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی