

اگر  $f$  و  $g$  به ترتیب دو تابع با دامنه‌های  $D_f$  و  $D_g$  باشند، در این صورت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آنها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف دامنه	تعریف ضابطه	نام عمل
$D_{f+g} = D_f \cap D_g$	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	جمع
$D_{f-g} = D_f \cap D_g$	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	تفریق
$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$	ضرب*
$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	تقسیم

## فعالیت

اگر  $f(x) = 2x - 1$  و  $g(x) = x - 2$ ، آن‌گاه مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و حاصل تقسیم آنها  $\left(\frac{f}{g}\right)$  را به دست آورید و دامنه هر یک را مشخص کنید.

حل:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (2x - 1) + (x - 2) = 3x - 3$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (2x - 1) - (x - 2) = x + 1$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2x - 1) \cdot (x - 2) = 2x^2 - 5x + 2$$

$$D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

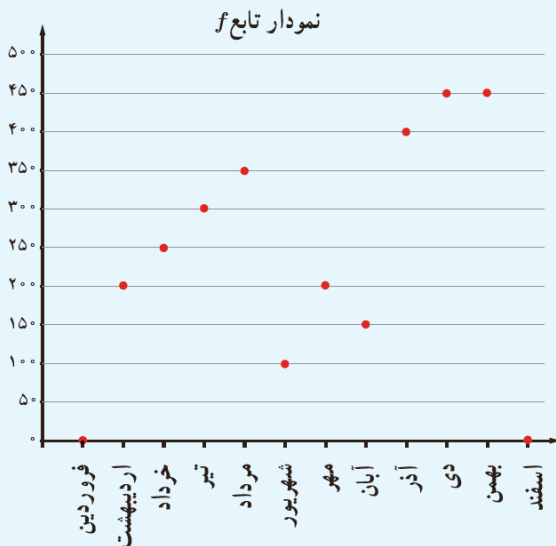
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(2x-1)}{(x-2)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\} = (\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) - \{x \mid x - 2 = 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

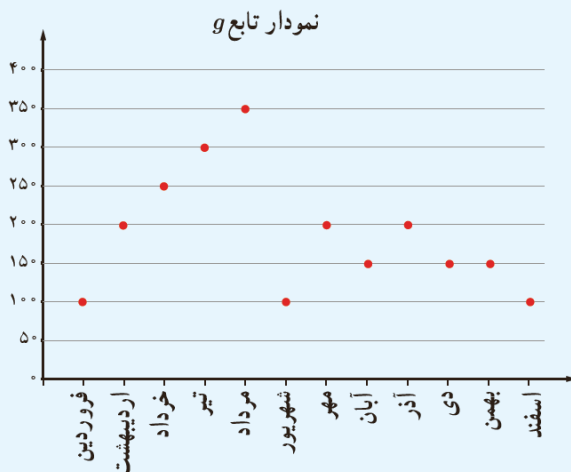
\* ضرب دو تابع  $f$  و  $g$  را با نمادهای  $f \times g$  و  $fg$  هم نشان می‌دهند.

## خواندنی

علی در یک کارگاه خانگی، محصولات دست‌دوز چرمی تولید می‌کند. او بخشی از مواد و لوازم مورد نیاز خود را از فروشگاه چرم و بخشی را از فروشگاه ابزار و یراق خریداری می‌کند. وی پس از تولید محصولاتی هنری، آنها را در بازارچه‌های کارآفرینی به فروش می‌رساند. نمودارهای زیر مقدار خرید او را در یک سال نشان می‌دهد. نمودار تابع  $f$  نشان می‌دهد که در هر ماه سال گذشته، چند هزار تومان چرم خریداری شده است؛ برای مثال با توجه به شکل،  $f(تیر) = 300$ . پس این هنرمند در چهارمین ماه سال، ۳۰۰ هزار تومان چرم خریده است.



نمودار تابع  $g$  نشان می‌دهد که این هنرمند در هر ماه سال گذشته چند هزار تومان ابزار و یراق خریده است.



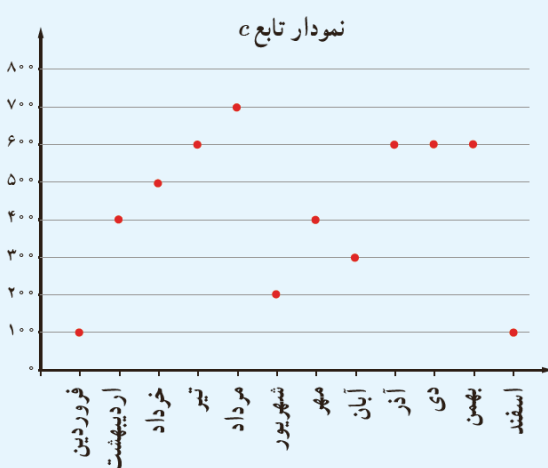
پس در واقع هزینه‌ای که علی در کارگاه خود دارد، شامل دو بخش است؛ هزینه چرم و هزینه ابزار و یراق.

به زبان ساده، «هزینه» او شامل قیمت همه مواد و لوازم خریداری شده است. در شکل روبه‌رو نمودار تابع هزینه خرید علی در سال گذشته رسم شده است. این تابع را با  $c$  نشان می‌دهیم.

الف) بر روی شکل، درستی مقادیر تابع  $c$  را برای ماه‌های فصل زمستان بررسی کنید.

ب) آیا برای هر  $x$  در دامنه تابع  $c$ ،  $c(x) = f(x) + g(x)$  درست است؟

همچنان که می‌بینید برای به‌دست آوردن مقادیر تابع  $c$ ، مقادیر دو تابع  $f$  و  $g$  را با هم جمع می‌کنیم.



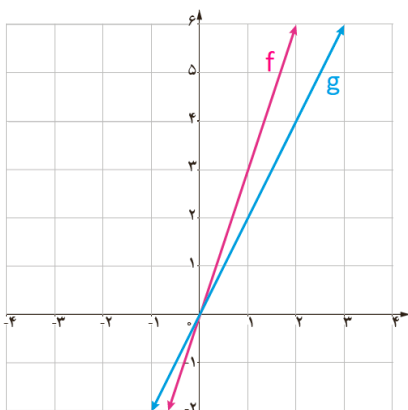
۱ درباره دو تابع با ضابطه  $f(x) = x^2 + 3x + 1$  و  $g(x) = x - 3$  جدول زیر را کامل کنید.

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x) = x^2 + 4x - 2$	$D_{f+g} = \mathbb{R}$
$f-g$	$(f-g)(x) = x^2 + 2x + 4$	$D_{f-g} = \mathbb{R}$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 3$	$D_{f \cdot g} = \mathbb{R}$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 3}$	$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{3\}$

۲ درباره دو تابع با ضابطه  $u(x) = \sqrt{x} + 1$  و  $v(x) = x - 1$  جدول زیر را کامل کنید.

تابع	ضابطه	دامنه
$u+v$	$(u+v)(x) = \sqrt{x} + 1 + x - 1 = \sqrt{x} + x$	$D_{u+v} = [0, +\infty) \cap \mathbb{R} = [0, +\infty)$
$u-v$	$(u-v)(x) = \sqrt{x} + 1 - (x - 1) = \sqrt{x} - x + 2$	$D_{u+v} = [0, +\infty) \cap \mathbb{R} = [0, +\infty)$
$u \cdot v$	$(u \cdot v)(x) = (\sqrt{x} + 1)(x - 1) = \sqrt{x}(x - 1) + x - 1$	$D_{u+v} = [0, +\infty) \cap \mathbb{R} = [0, +\infty)$
$\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 1}$	$D_{u+v} = ([0, +\infty) \cap \mathbb{R}) - \{1\}$ $= [0, +\infty) - \{1\}$

## فعالیت



مطابق شکل، دو تابع  $f$  و  $g$  به ترتیب با رنگ‌های قرمز و آبی نشان داده شده‌اند. الف) ضابطه دو تابع  $f$  و  $g$  را به دست آورید.

$$g(x) = 2x$$

$$f(x) = 3x$$

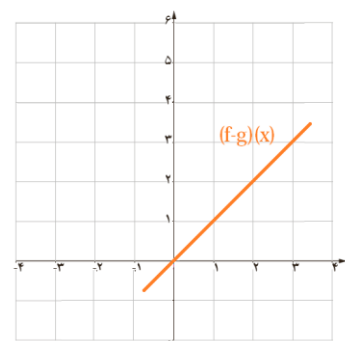
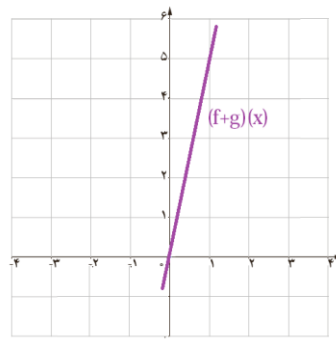
ب) ضابطه دو تابع  $f+g$  و  $f-g$  را به دست آورید.

$$(f+g)(x) = 3x + 2x = 5x$$

$$(f-g)(x) = 3x - 2x = x$$

پ) با تکمیل جدول مقابل، نمودارهای توابع  $f+g$  و  $f-g$  را با رنگ‌های مختلف رسم کنید.

$x$	۰	۱
$f(x)$	۰	۳
$g(x)$	۰	۲
$(f+g)(x)$	۰	۵
$(f-g)(x)$	۰	۱



ت) آیا جمع دو تابع خطی همیشه یک تابع خطی است؟ در مورد تفریق آنها چه می‌توان گفت؟

بله جمع دو تابع خطی همیشه یک تابع خطی است.

$$\left. \begin{matrix} f(x) = ax + b \\ g(x) = a'x + b' \end{matrix} \right\} \Rightarrow (f+g)(x) = ax + b + a'x + b'$$

$$(f+g)(x) = (a+a')x + (b+b') \xrightarrow{\substack{a+a'=A \\ b+b'=B}} (f+g)(x) = Ax + B$$

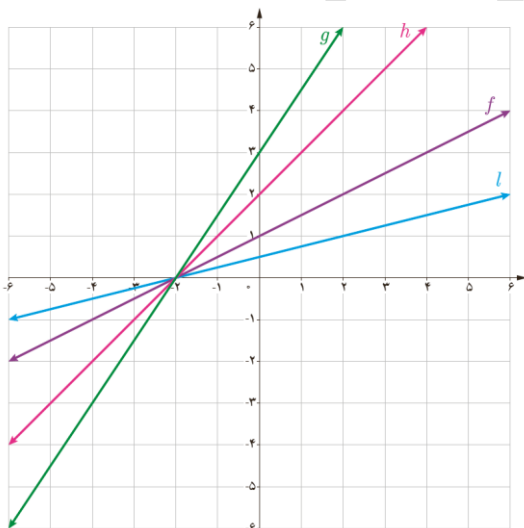
بله تفریق دو تابع خطی همیشه یک تابع خطی است.

$$\left. \begin{matrix} f(x) = ax + b \\ g(x) = a'x + b' \end{matrix} \right\} \Rightarrow (f-g)(x) = (ax + b) - (a'x + b')$$

$$(f-g)(x) = (a-a')x + (b-b') \xrightarrow{\substack{a-a'=A \\ b-b'=B}} (f-g)(x) = Ax + B$$

$$\xrightarrow{\substack{a=a' \\ b \neq b'}} (f-g)(x) = B$$

$$\xrightarrow{\substack{a=a' \\ b=b'}} (f-g)(x) = 0$$



فعالیت

با توجه به شکل دیده می‌شود که  $l(x) = \frac{1}{3}f(x)$ . جاهای خالی را پر کنید.

$$g(x) = \dots 3 \dots f(x)$$

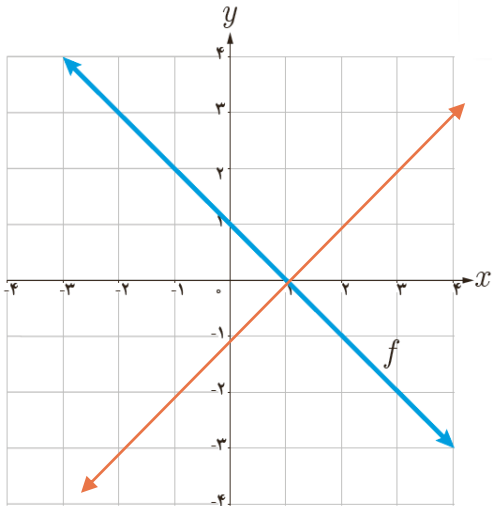
$$h(x) = \dots 2 \dots f(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 1, \quad l(x) = \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}, \quad h(x) = x + 2, \quad g(x) = \frac{2}{3}x + 3$$

$$\Rightarrow l = \frac{1}{3}f, \quad h = 2f, \quad g = 3l$$

با توجه به نمودار فوق ملاحظه می‌شود که:

اگر  $k$  عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع با ضابطه  $y = kf(x)$  کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه  $y = f(x)$  را  $k$  برابر کنیم.



۱ با توجه به نمودار تابع با ضابطه  $y = f(x)$  در شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطه  $y = -f(x)$  را رسم کنید.

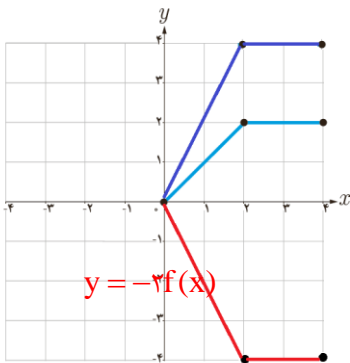
$$y = f(x) \Rightarrow f(0) = 1, f(1) = 0$$

$$y = -f(x) \Rightarrow y = -f(0) = -1 \Rightarrow (0, -1)$$

$$y = -f(x) \Rightarrow y = -f(1) = 0 \Rightarrow (1, 0)$$

۲ عبارت زیر را کامل کنید.

برای رسم نمودار تابع با ضابطه  $y = -f(x)$  کافی است قرینه نمودار تابع ضابطه  $y = f(x)$  را نسبت به محور طول ها (x ها) رسم کنیم.



۳ در شکل روبه‌رو، نمودار تابع f داده شده است. نمودار تابع با ضابطه  $y = -2f(x)$  را رسم کنید.

ابتدا عرض هر نقطه را ۲ برابر می‌کنیم و نمودار جدید را رسم می‌کنیم. سپس قرینه نقاط جدید را نسبت به محور طول ها (x ها) به دست می‌آوریم و نقاط را به هم وصل می‌کنیم.

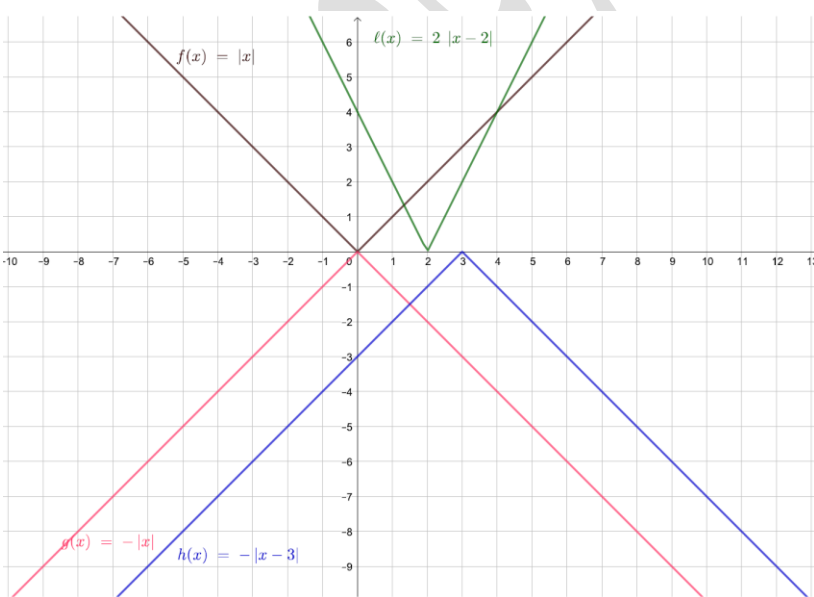
تمرین

۱ با استفاده از نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = |x|$ ، نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف)  $g(x) = -|x|$

ب)  $h(x) = -|x-3|$

پ)  $l(x) = 2|x-2|$



الف)  $g(x) = -f(x)$

کافی است نمودار تابع f را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم.

ب)  $h(x) = -f(x-3)$

باید نمودار تابع f را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم و ۳ واحد روی محور طول ها به سمت مثبت ها حرکت کنیم.

پ)  $l(x) = 2f(x-2)$

باید نمودار تابع f را روی محور طول ها ۲ واحد به سمت مثبت ها حرکت داده و به ازای هر طول عرض را دو برابر کنیم.

۲ در هر مورد، دامنه و ضابطه حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

$$f(x) = |x|$$

$$g(x) = x \quad (\text{الف})$$

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x) =  x  + x$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
$f-g$	$(f-g)(x) =  x  - x$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) =  x x = x x $	$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{ x }{x}$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x   g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$g(x) = x + 2 \quad (\text{ب})$$

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x) = x^2 - 4 + x + 2 = x^2 + x - 2$	$D_{f+g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
$f-g$	$(f-g)(x) = x^2 - 4 - (x + 2) = x^2 - x - 6$	$D_{f-g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = (x^2 - 4)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$	$D_{f \cdot g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} = x - 2$	$D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = -\sqrt{x} \quad (\text{پ})$$

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x) = \sqrt{x} + (-\sqrt{x}) = 0$	$D_{f+g} = [0, +\infty)$
$f-g$	$(f-g)(x) = \sqrt{x} - (-\sqrt{x}) = 2\sqrt{x}$	$D_{f-g} = [0, +\infty)$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x}(-\sqrt{x}) = -x$	$D_{f \cdot g} = [0, +\infty)$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{x}} = -1$	$D_{\frac{f}{g}} = [0, +\infty) - \{0\} = (0, +\infty)$

$$f(x) = \frac{x-2}{x+5} \quad g(x) = x^2 + 3x - 1 \quad (ت)$$

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x) = \frac{x^3 + 8x^2 + 6x - 52}{x+5}$	$D_{f+g} = \mathbb{R} - \{-5\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} - \{-5\}$
$f-g$	$(f-g)(x) = \frac{-x^3 - 8x^2 - 4x + 48}{x+5}$	$D_{f-g} = \mathbb{R} - \{-5\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} - \{-5\}$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = (x-2)^2$	$D_{f \cdot g} = \mathbb{R} - \{-5\} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} - \{-5\}$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{(x+5)^2}$	$D_{\frac{f}{g}} = (\mathbb{R} - \{-5\} \cap \mathbb{R}) - \{2\}$ $= \mathbb{R} - \{-5, 2\}$

$$(f+g)(x) = \frac{x-2}{x+5} + x^2 + 3x - 1 = \frac{x-2+x^3+3x^2-1 \cdot x+5x^2+15x-5}{x+5} \Rightarrow (f+g)(x) = \frac{x^3+8x^2+6x-52}{x+5}$$

$$(f-g)(x) = \frac{x-2}{x+5} - (x^2+3x-1) = \frac{x-2-x^3-3x^2+1 \cdot x-5x^2-15x+5}{x+5} \Rightarrow (f-g)(x) = \frac{-x^3-8x^2-4x+48}{x+5}$$

$$(f \cdot g)(x) = \left(\frac{x-2}{x+5}\right)(x^2+3x-1) = \frac{(x-2)(x+5)(x-2)}{(x+5)} \Rightarrow (f \cdot g)(x) = (x-2)^2$$

$$(f/g)(x) = \left(\frac{x-2}{x+5}\right) \div (x^2+3x-1) = \frac{(x-2)}{(x+5)} \times \frac{1}{(x+5)(x-2)} \Rightarrow (f/g)(x) = \frac{1}{(x+5)^2}$$

$$f = \{(2, 5), (3, 4), (0, -2)\} \quad g = \{(-1, 2), (0, 3), (2, 4), (3, 0)\} \quad (ث)$$

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x) = \{(2, 9), (3, 4), (0, 1)\}$	$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{0, 2, 3\}$
$f-g$	$(f-g)(x) = \{(2, 1), (3, 4), (0, -5)\}$	$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{0, 2, 3\}$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = \{(2, 20), (3, 0), (0, -6)\}$	$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = \{0, 2, 3\}$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \{(2, \frac{5}{4}), (0, \frac{-2}{3})\}$	$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x   g(x) = 0\} = \{0, 2\}$

$\left. \begin{matrix} f(2) = 5 \\ g(2) = 4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (f+g)(2) = 5+4=9$	$\left. \begin{matrix} f(2) = 5 \\ g(2) = 4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (f-g)(2) = 5-4=1$	$\left. \begin{matrix} f(2) = 5 \\ g(2) = 4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (f \cdot g)(2) = 5 \times 4 = 20$	$\left. \begin{matrix} f(2) = 5 \\ g(2) = 4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{5}{4}$
$\left. \begin{matrix} f(3) = 4 \\ g(3) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (f+g)(3) = 4+0=4$	$\left. \begin{matrix} f(3) = 4 \\ g(3) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (f-g)(3) = 4-0=4$	$\left. \begin{matrix} f(3) = 4 \\ g(3) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (f \cdot g)(3) = 4 \times 0 = 0$	$\left. \begin{matrix} f(3) = 4 \\ g(3) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{4}{0}$
$\left. \begin{matrix} f(0) = -2 \\ g(0) = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (f+g)(0) = -2+3=1$	$\left. \begin{matrix} f(0) = -2 \\ g(0) = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (f-g)(0) = -2-3=-5$	$\left. \begin{matrix} f(0) = -2 \\ g(0) = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (f \cdot g)(0) = -2 \times 3 = -6$	$\left. \begin{matrix} f(0) = -2 \\ g(0) = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{-2}{3}$

۳ با استفاده از نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$ ، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

الف) $r(x) = 2\sqrt{x}$	ب) $s(x) = -\sqrt{x-2}$	پ) $t(x) = -3\sqrt{x}$
ت) $u(x) = 1 - \sqrt{x}$	ث) $v(x) = 1 - \sqrt{x-3}$	

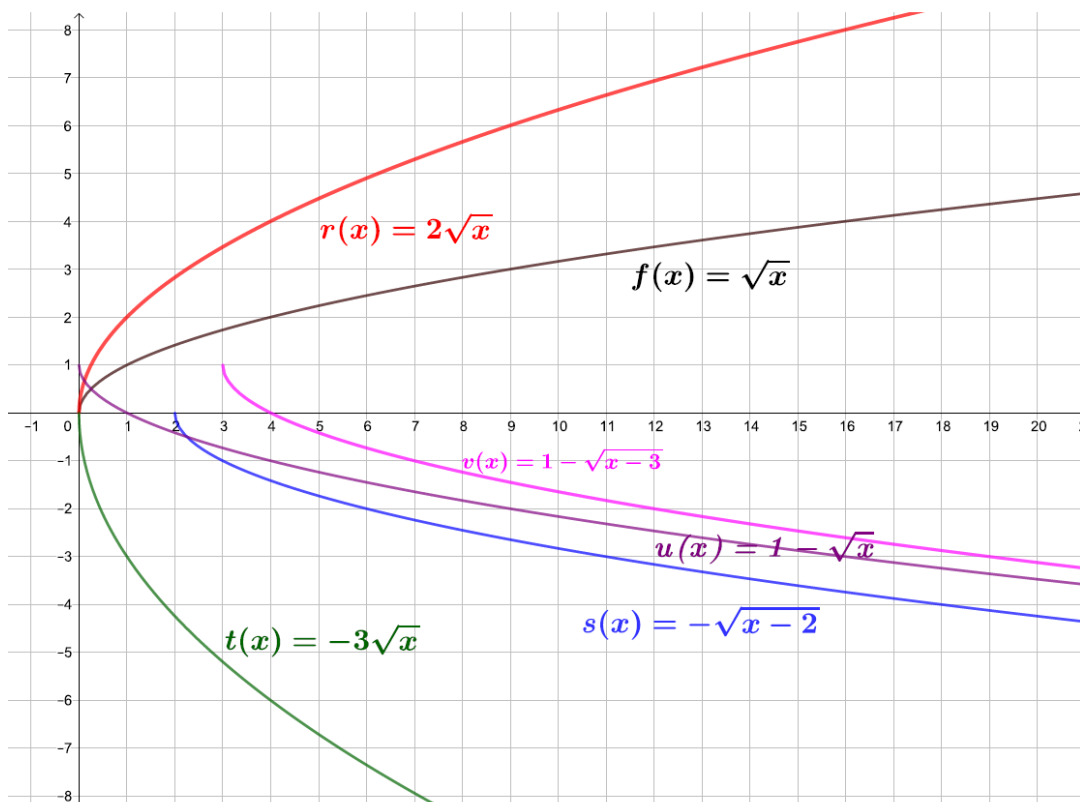
الف) با توجه به این که  $r(x) = 2f(x)$  کافی است عرض های هر نقطه از نمودار  $f$  را دو برابر کنیم.

ب) با توجه به این که  $s(x) = -f(x-2)$  کافی است ابتدا نمودار  $f$  را به اندازه  $2$  واحد روی محور طول ها به سمت مثبت ها انتقال دهیم سپس آن را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم.

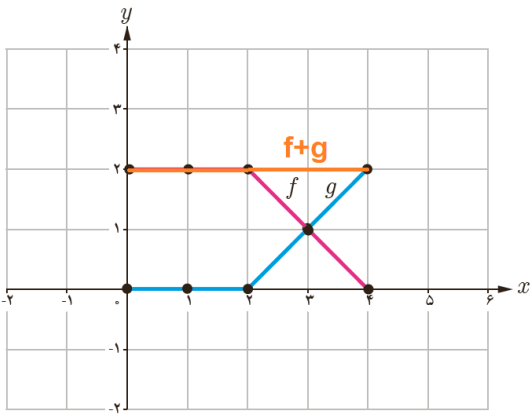
پ) با توجه به این که  $t(x) = -3f(x)$  کافی است ابتدا عرض های هر نقطه از نمودار  $f$  را سه برابر کنیم سپس نمودار را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم.

ت) با توجه به این که  $u(x) = -f(x) + 1$  کافی است ابتدا نمودار  $f$  را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم سپس نمودار جدید را به اندازه  $1$  واحد روی محور عرض ها به سمت مثبت ها انتقال دهیم.

ث) با توجه به این که  $v(x) = -f(x-3) + 1$  کافی است ابتدا نمودار  $f$  را به اندازه  $3$  واحد روی محور طول ها به سمت مثبت ها انتقال دهیم سپس نسبت به محور طول ها قرینه کنیم بعد نمودار جدید را به اندازه  $1$  واحد روی محور عرض ها به سمت مثبت ها انتقال دهیم.

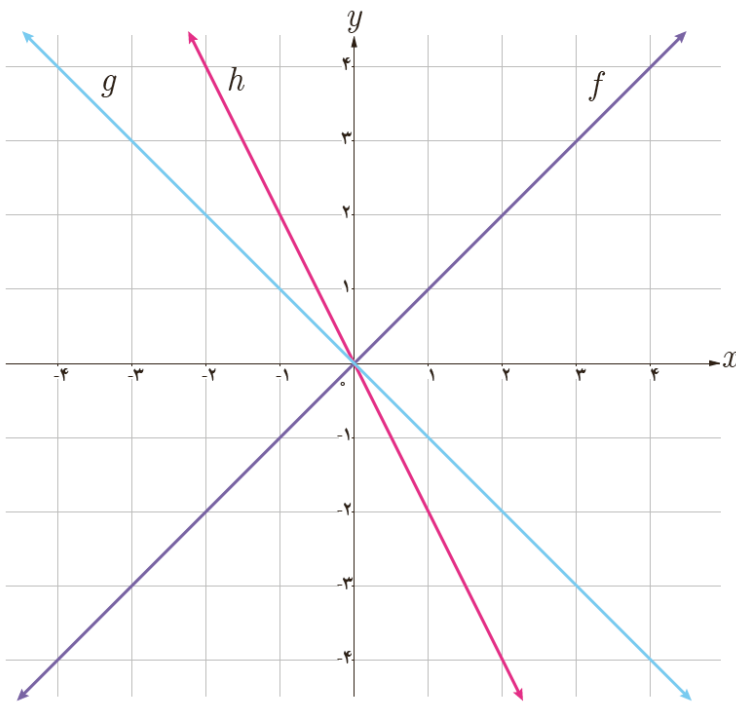






۴ در شکل مقابل، نمودار دو تابع  $f$  و  $g$  رسم شده است. نمودار حاصل جمع این دو تابع را به دست آورید.

۵ با توجه به نمودار سه تابع داده شده، مشخص کنید کدام یک از آنها برابر مجموع دو تابع دیگر است؟



$$\left. \begin{array}{l} f() = 1 \\ h() = -2 \\ g() = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow f() + h() = g() \Rightarrow (f + h)(x) = g(x)$$