

توابعی نظیر تابع سینوس با ضابطه $y = \sin x$ و تابع کسینوس با ضابطه $y = \cos x$ نمونه‌هایی از توابع مثلثاتی‌اند که در این درس با نمودار آنها آشنا می‌شوید.

رسم تابع سینوس

فعالیت

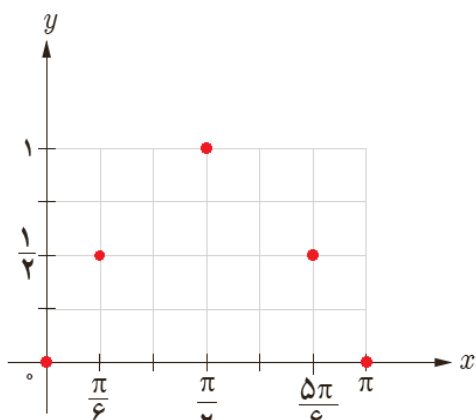
۱ جدول روبه‌رو را کامل کنید.

مجموعه زوج‌های مرتب حاصل در جدول مقابل یک تابع به صورت زیر مشخص می‌کند.

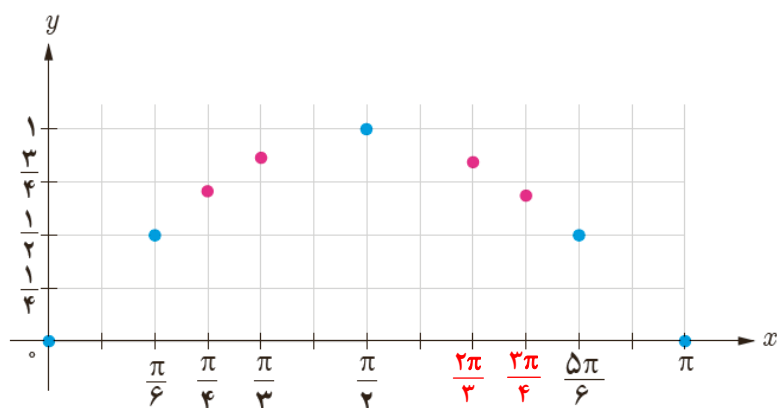
$$f = \left\{ (0, 0), \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), (\pi, 0) \right\}$$

x	$y = \sin x$	مختصات نقطه
۰	۰	$(0, 0)$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	۱	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$
π	۰	$(\pi, 0)$

۲ نقاط حاصل در جدول را در شکل زیر مشخص کنید.

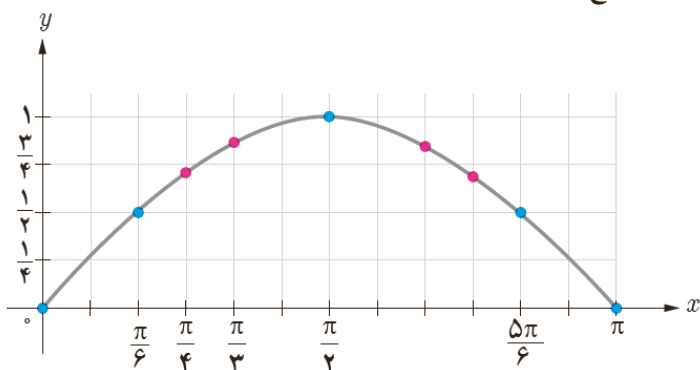


۳ با افزودن نقاط $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ، $(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ، $(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ و $(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ به جدول بالا، شکل زیر به دست می‌آید.
(با فرض $\sqrt{2} \approx 1/4$ و $\sqrt{3} \approx 1/7$)



۴ نقاط حاصل در شکل را به ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل

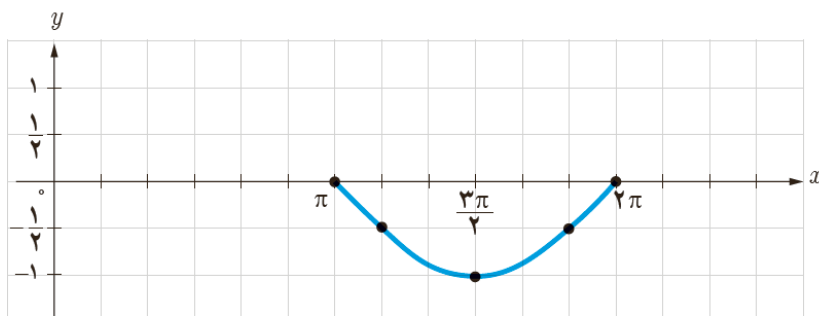
مقابل به دست بیاید. با افزودن تعداد نقاط جدول فوق در بازه $[0, \pi]$ این شکل به طور دقیق‌تری به دست می‌آید. شکل حاصل نمودار تابع سینوس با ضابطه $y = \sin x$ را در این بازه مشخص می‌کند.



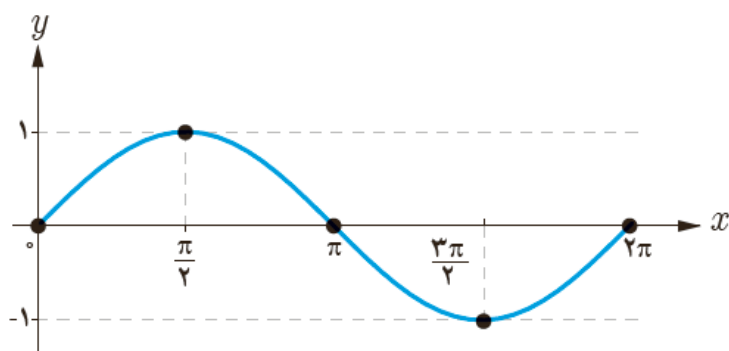
۵ مراحل صفحه قبل را برای رسم نمودار تابع سینوس در بازه $[\pi, 2\pi]$ انجام دهید.

برای این کار ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس نقاط به دست آمده در جدول را در صفحه مختصات مطابق شکل زیر مشخص و آنها را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید.

x	$y = \sin x$	مختصات نقطه
π	۰	$(\pi, 0)$
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2})$
$\frac{3\pi}{2}$	-۱	$(\frac{3\pi}{2}, -1)$
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{2})$
2π	۰...	$(2\pi, 0)$



۶ با توجه به شکل های فوق، نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ در شکل زیر رسم شده است. حال با توجه به این شکل جدول زیر را درباره مقدار این تابع در هر بازه تکمیل کنید.



$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
مقدار تابع سینوس از ۰ به ۱ افزایش می یابد.	مقدار تابع از ۱ به ۰ کاهش می یابد.	مقدار تابع از ۰ به -۱ کاهش می یابد.	مقدار تابع از -۱ به ۰ افزایش می یابد.
مقدار تابع سینوس در ربع اول مثبت است.	مقدار تابع در ربع دوم مثبت است.	مقدار تابع در ربع سوم منفی است.	مقدار تابع در ربع چهارم منفی است.

۷ با توجه به رابطه $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، که در درس قبل آشنا شدید می توان گفت :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

یعنی مقدار تابع سینوس با اضافه کردن 2π رادیان به کمان آن تغییری نمی کند
بنابراین نمودار تابع سینوس در بازه های $[0, 2\pi]$ و $[2\pi, 4\pi]$ یکسان است.

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x$$

یعنی مقدار تابع سینوس با کم کردن 2π رادیان از کمان آن تغییری نمی‌کند.

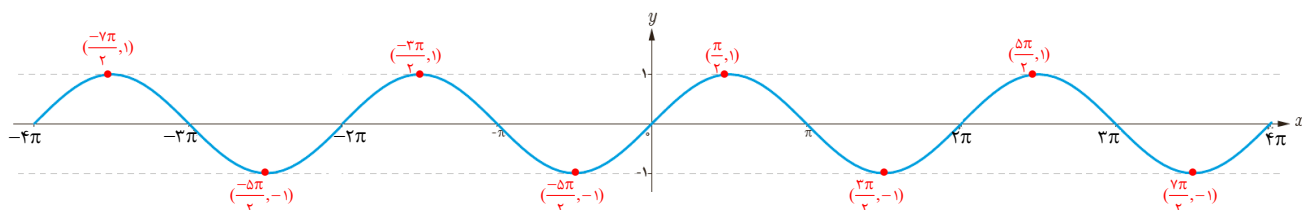
در نتیجه نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[0, 2\pi]$ و $[-2\pi, 0]$ یکسان است.

در حالت کلی چون مقدار تابع سینوس با اضافه یا کم کردن مضارب زوج π رادیان به کمان آن تغییر نمی‌کند،

نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[2k\pi, (2k+2)\pi]$ و $[-2k\pi, -2(k+1)\pi]$ یکسان است. به این ترتیب منحنی این تابع که در

بازه $[0, 2\pi]$ رسم شده در بازه‌های $[2\pi, 4\pi]$ ، $[-2\pi, 0]$ ، $[4\pi, 6\pi]$ ، $[-4\pi, -2\pi]$ تکرار می‌شود.

در شکل زیر نمودار تابع سینوس در 2 تکرار رسم شده است. این نمودار را برای 4 تکرار کامل کنید.



Ⓐ با توجه به شکل بالا جاهای خالی را درباره ویژگی‌های تابع سینوس با ضابطه $y = \sin x$ کامل کنید.

الف) دامنه تابع سینوس $\mathbb{R}$ و برد آن $[-1, 1]$ است.

ب) مقدار تابع سینوس در طول‌های $x = k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ برابر با **صفر** است.

پ) حداکثر مقدار تابع سینوس برابر با **۱** است که در نقاطی به طول‌های $x = \frac{\pi}{2}$ ، $x = \frac{5\pi}{2}$

و در حالت کلی $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ به دست می‌آید. $x = \frac{-3\pi}{2}$ ، $x = \frac{-7\pi}{2}$

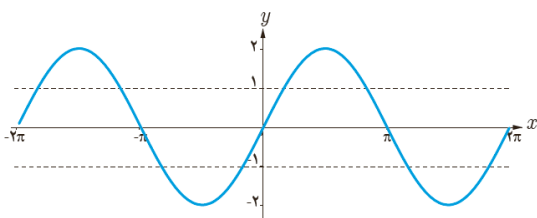
ت) حداقل مقدار تابع سینوس برابر با **-۱** است که در نقاطی به طول‌های $x = \frac{3\pi}{2}$ ، $x = \frac{7\pi}{2}$

و در حالت کلی $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ به دست می‌آید. $x = \frac{-\pi}{2}$ ، $x = \frac{-5\pi}{2}$

کار در کلاس

هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده دارای کدام نمودار است؟

۱) $y = 2 \sin x$



(الف)

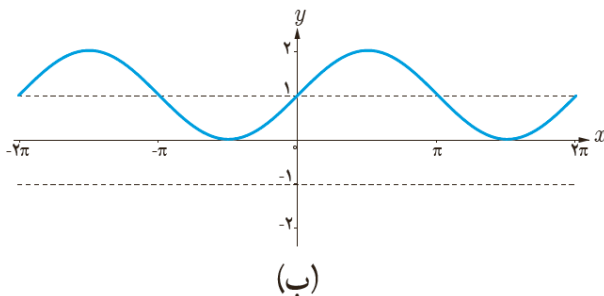
برای رسم نمودار این تابع در بازه $[0, 2\pi]$ چون برد تابع بازه $[-2, 2]$ است،

کافی است نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ را روی این بازه انبساط دهیم.

نمودار حاصل در بازه $[-2\pi, 0]$ نیز تکرار می‌شود. و شکل مقابل به دست

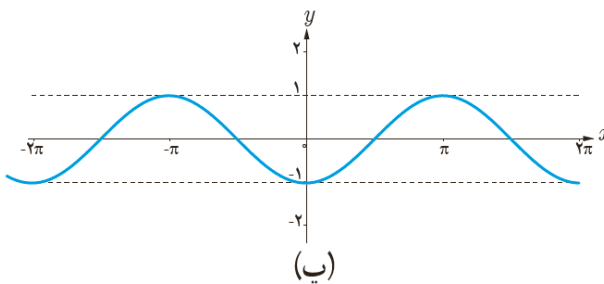
می‌آید.

$$۲ \quad y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$$



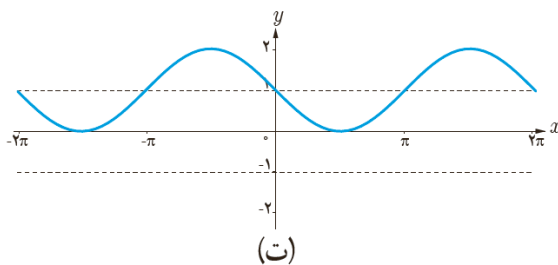
برای رسم نمودار این تابع کافی است نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ را به اندازه یک واحد در جهت مثبت روی محور عمودی انتقال دهیم. به این ترتیب شکل مقابل حاصل می شود.

$$۳ \quad y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$



برای رسم نمودار این تابع کافی است نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{2}$ واحد در جهت مثبت روی محور افقی انتقال دهیم. به این ترتیب شکل مقابل حاصل می شود.

$$۴ \quad y = -\sin(x + \frac{\pi}{2})$$



برای رسم نمودار این تابع ابتدا نمودار تابع با ضابطه $y = -\sin x$ را با قرینه کردن نمودار تابع سینوس نسبت به محور x ها رسم نموده و سپس نمودار حاصل را به اندازه یک واحد در جهت مثبت محور عمودی انتقال می دهیم به این ترتیب شکل مقابل به دست می آید.

رسم تابع کسینوس

فعالیت

۱ جدول زیر را کامل کنید.

به این ترتیب مجموعه زوج های مرتب زیر به دست می آید.

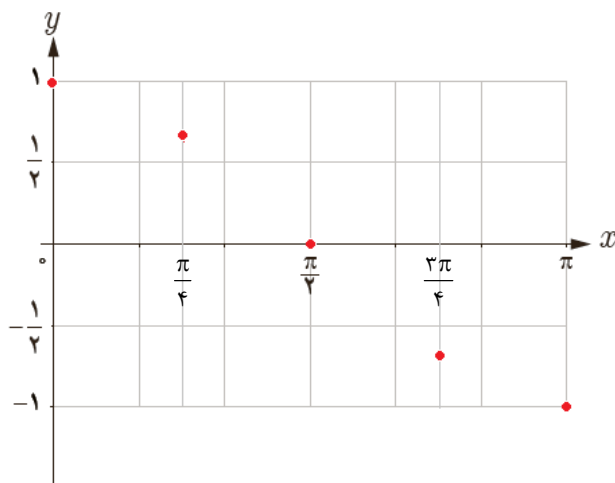
$$f = \{(\frac{\pi}{4}, 1), (\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2}), (\pi, 0), (\frac{5\pi}{4}, -\frac{1}{2}), (\frac{3\pi}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (2\pi, -1)\}$$

آیا این مجموعه یک تابع را مشخص می کند؟

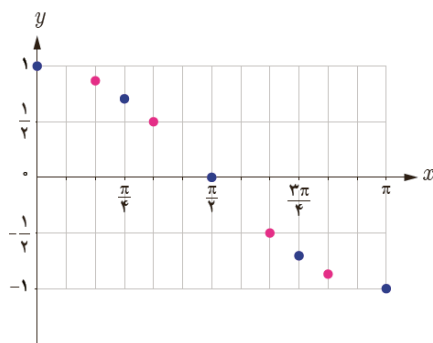
بله یک تابع را مشخص می کند.

x	$y = \cos x$	مختصات نقطه
0	1	$(0, 1)$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$	$(\frac{\pi}{4}, 0.7)$
$\frac{\pi}{2}$	0	$(\frac{\pi}{2}, 0)$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.7$	$(\frac{3\pi}{4}, -0.7)$
π	-1	$(\pi, -1)$

۲ نقاط جدول بالا را در این شکل مشخص کنید.



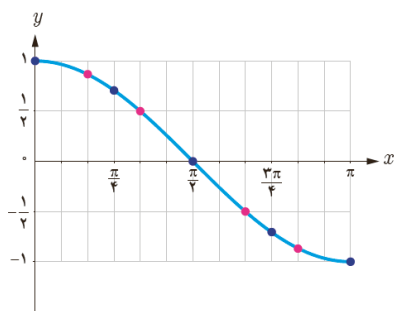
۳ نقاط به طول‌های $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ را به جدول بالا اضافه کنید تا شکل زیر به دست آید. ($\sqrt{3} \approx 1.7$).



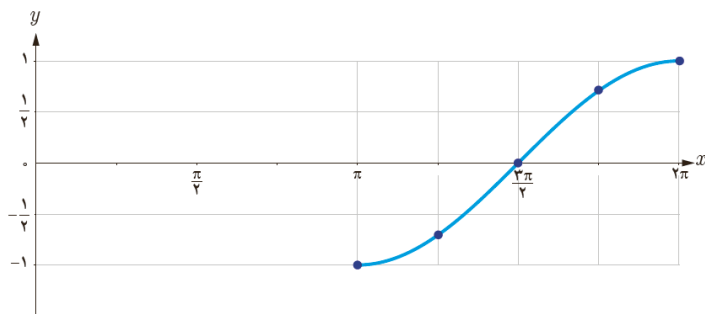
x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$y = \cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۴ نقاط شکل صفحه قبل را به ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل مقابل به دست آید.

این شکل نمودار تابع کسینوس با ضابطه $y = \cos x$ را در بازه $[0, \pi]$ مشخص می‌کند.

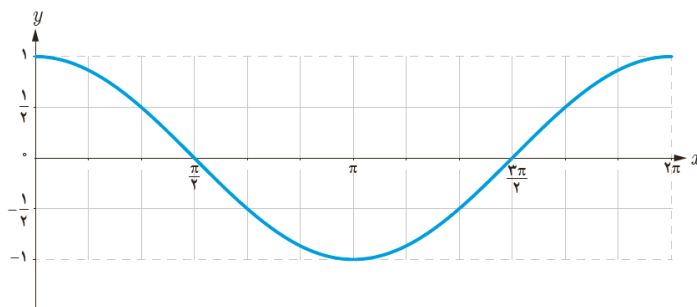


۵ جدول زیر را کامل کنید تا نمودار تابع کسینوس در بازه $[\pi, 2\pi]$ به صورت شکل مقابل به دست آید.



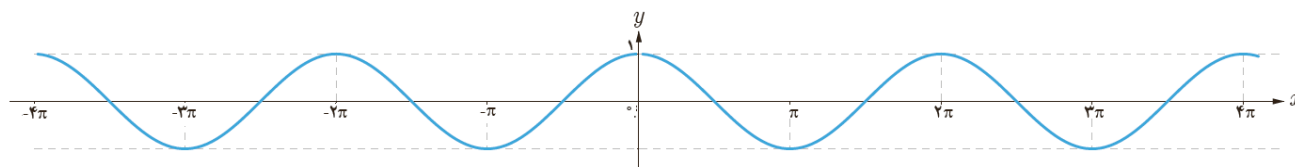
x	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	-۱	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	۰	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۱

۶ با توجه به مراحل بالا نمودار تابع کسینوس با ضابطه $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ در شکل زیر رسم شده است. با توجه به این شکل جدول زیر را کامل کنید.



$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
مقدار تابع کسینوس از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.	مقدار تابع از ۰ به -۱ کاهش می‌یابد.	مقدار تابع از -۱ به ۰ افزایش می‌یابد.	مقدار تابع از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.
مقدار تابع کسینوس در ربع اول مثبت است.	مقدار تابع در ربع دوم منفی است.	مقدار تابع در ربع سوم منفی است.	مقدار تابع در ربع چهارم مثبت است.

۷ تابع کسینوس دارای نمودار یکسانی در بازه‌های $[0, 2\pi]$ ، $[2\pi, 4\pi]$ ، $[-2\pi, 0]$ و $[-4\pi, -2\pi]$ است. در شکل زیر نمودار تابع کسینوس در بازه $[0, 4\pi]$ رسم شده است. شکل را کامل کنید.



۸ با توجه به شکل صفحه قبل جاهای خالی را در خصوص ویژگی‌های تابع با ضابطه $y = \cos x$ کامل کنید.

الف) دامنه تابع کسینوس $\mathbb{R}$ و برد آن $[-1, 1]$ است.

ب) مقدار تابع کسینوس در طول‌های $x = \frac{k\pi}{2}$ برابر با صفر است. ($k \in \mathbb{Z}$)

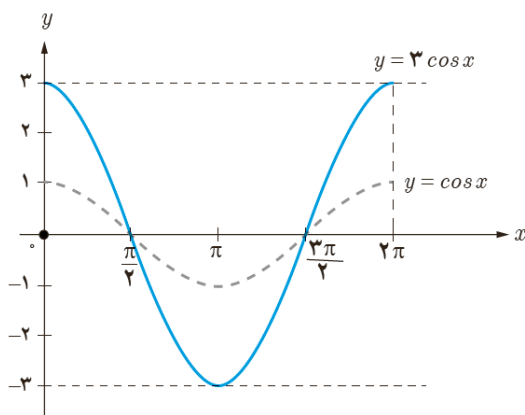
پ) حداکثر مقدار تابع کسینوس 1 است که در طول‌های $x = 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، به دست می‌آید.

ت) حداقل مقدار تابع کسینوس -1 است که در طول‌های $x = (2k+1)\pi$ به دست می‌آید. ($k \in \mathbb{Z}$)

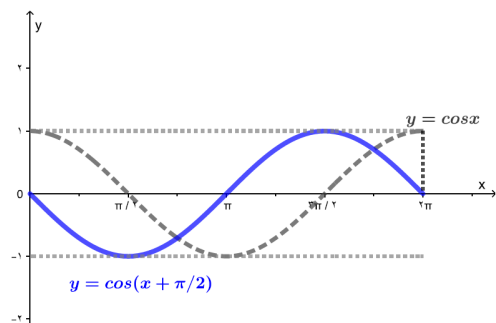
کار در کلاس

شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = 3 \cos x$ را نشان می‌دهد. به طور مشابه هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده را

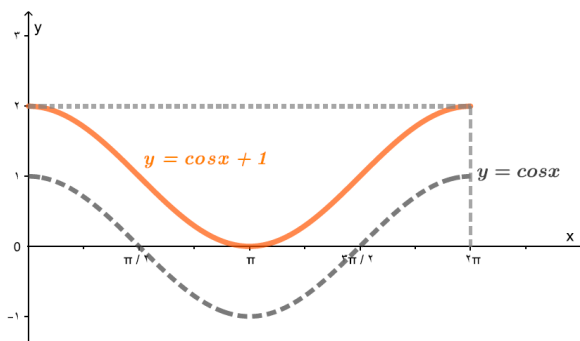
در بازه $[0, 2\pi]$ ، با استفاده از نمودار تابع کسینوس رسم کنید.



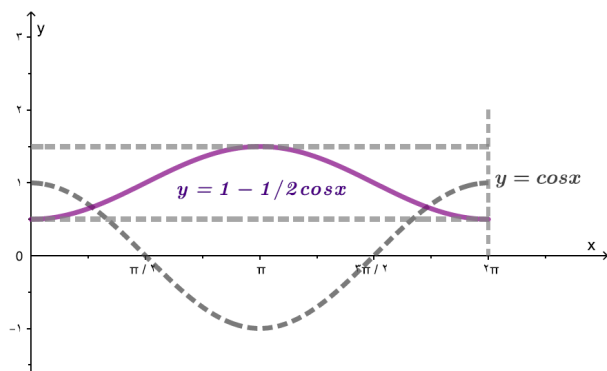
۱) $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$



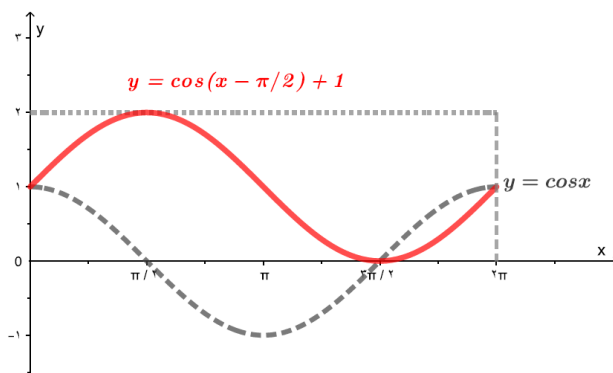
۲) $y = \cos x - 1$



۳) $y = 1 - \frac{1}{2} \cos x$



۴) $y = \cos(x - \frac{\pi}{2}) + 1$



تمرین

۱) آیا نمودارهای هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق‌اند یا خیر؟

۱) $y = \sin x$, $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$

$y = \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(-(\frac{\pi}{2} - x)) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

بله این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

۲) $y = \cos x$, $y = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$

$y = \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$

بله این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

۳) $y = \cos x$, $y = \cos(2\pi - x)$

$y = \cos(2\pi - x) = \cos x$

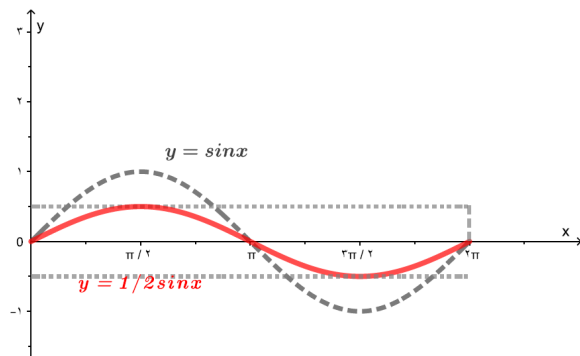
بله این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

$$۴) y = \sin x, \quad y = \sin(\Delta\pi - x)$$

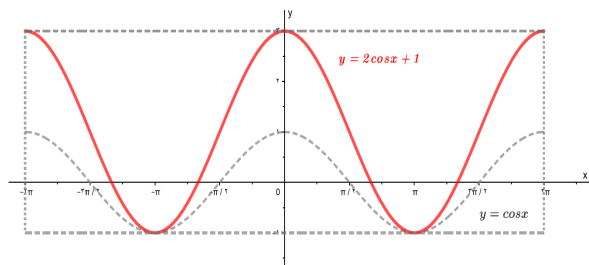
$y = \sin(\Delta\pi - x) = \sin(۴\pi + \pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x$ این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

۲) نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را در دستگاه مختصات در بازه‌های داده شده رسم کنید.

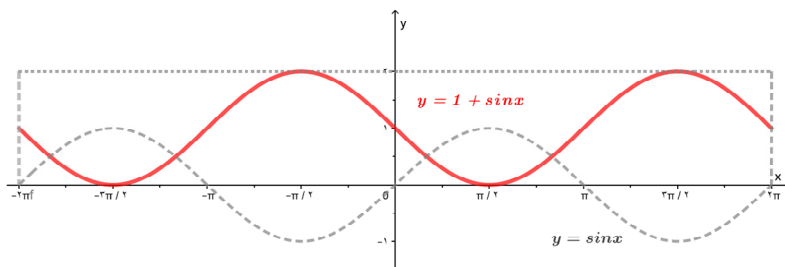
$$۱) y = \frac{1}{2} \sin x, \quad [0, 2\pi]$$



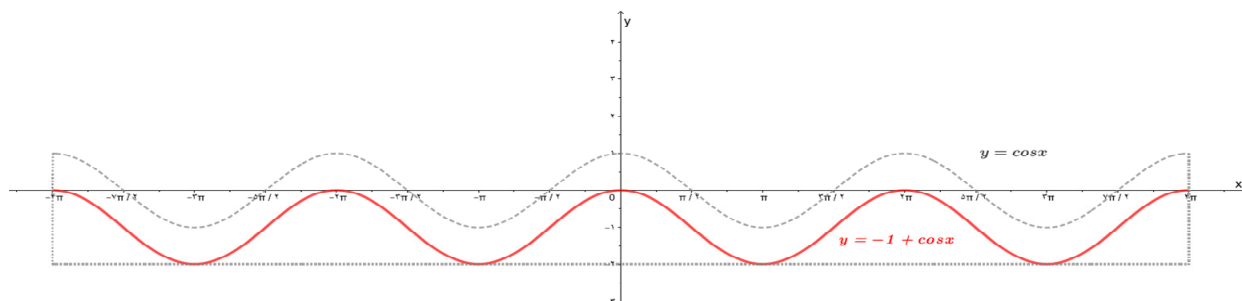
$$۲) y = 2 \cos x + 1, \quad [-2\pi, 2\pi]$$



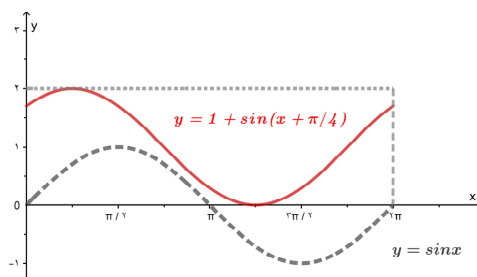
$$۳) y = 1 - \sin x, \quad [-2\pi, 2\pi]$$



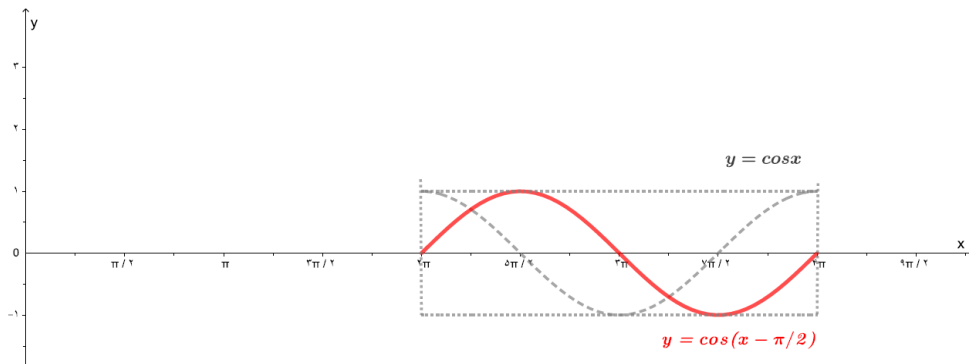
$$۴) y = -1 + \cos x, \quad [-4\pi, 4\pi]$$



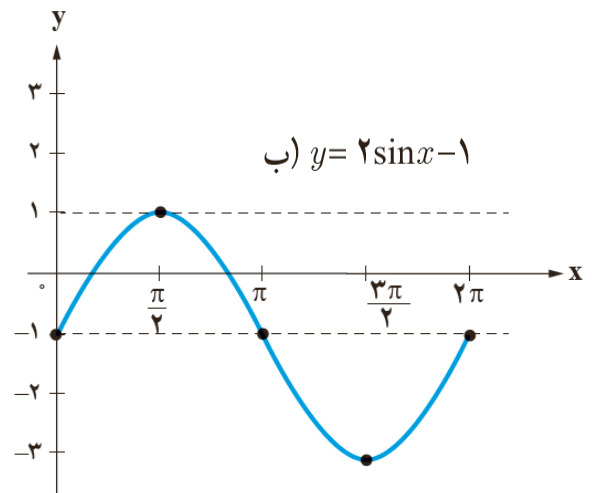
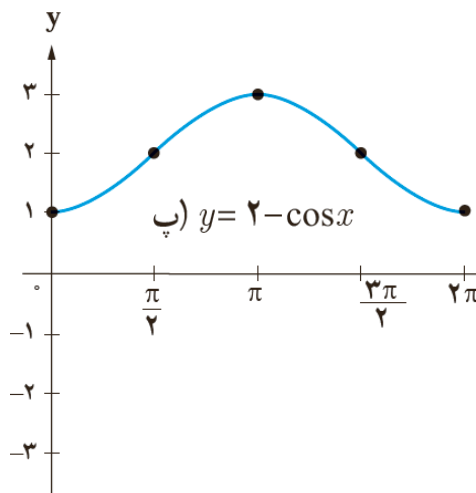
$$۵) y = 1 + \sin(x + \frac{\pi}{4}), \quad [0, 2\pi]$$



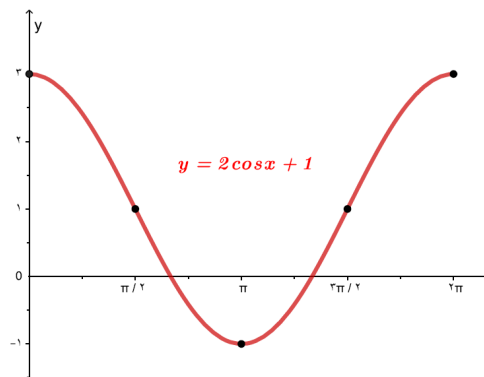
۶) $y = \cos(x - \frac{\pi}{2})$, $[\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$



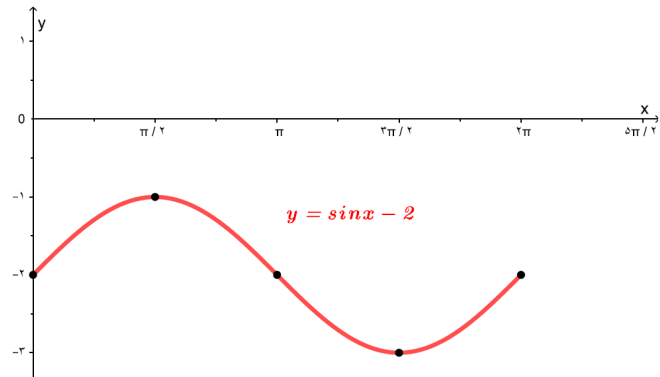
۳ با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هریک از دو نمودار زیر کدام یک از ضابطه‌های داده شده را دارند؟ نمودار تابع با سایر ضابطه‌ها را نیز رسم کنید.



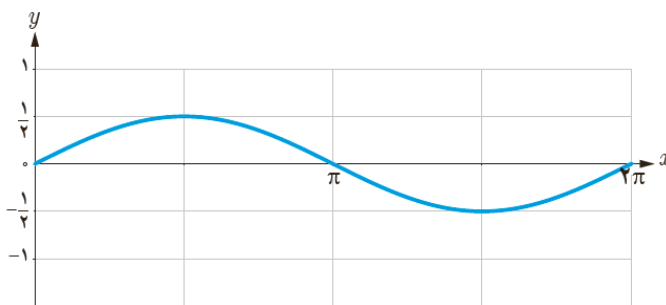
الف) $y = 2 \cos x + 1$



ت) $y = \sin x - 2$

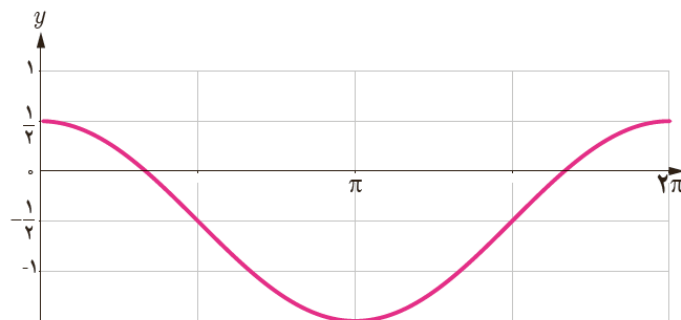


۴ با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟
 الف) شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{1}{4} \sin x$ را نشان می‌دهد.



درست است. در نمودار تابع سینوس مقادیر y باید نصف شوند.

ب) شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $y = \cos x - \frac{1}{4}$ را نشان می‌دهد.



درست است نمودار تابع کسینوس را به اندازه نصف واحد به موازات محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.

پ) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + \sin x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازه یک واحد به موازات محور x ها انتقال دهیم.
 ت) برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y = -\cos x$ کافی است نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

پ) باید به اندازه یک واحد به موازات محور y ها به سمت بالا انتقال یابد.

ت) درست است.

