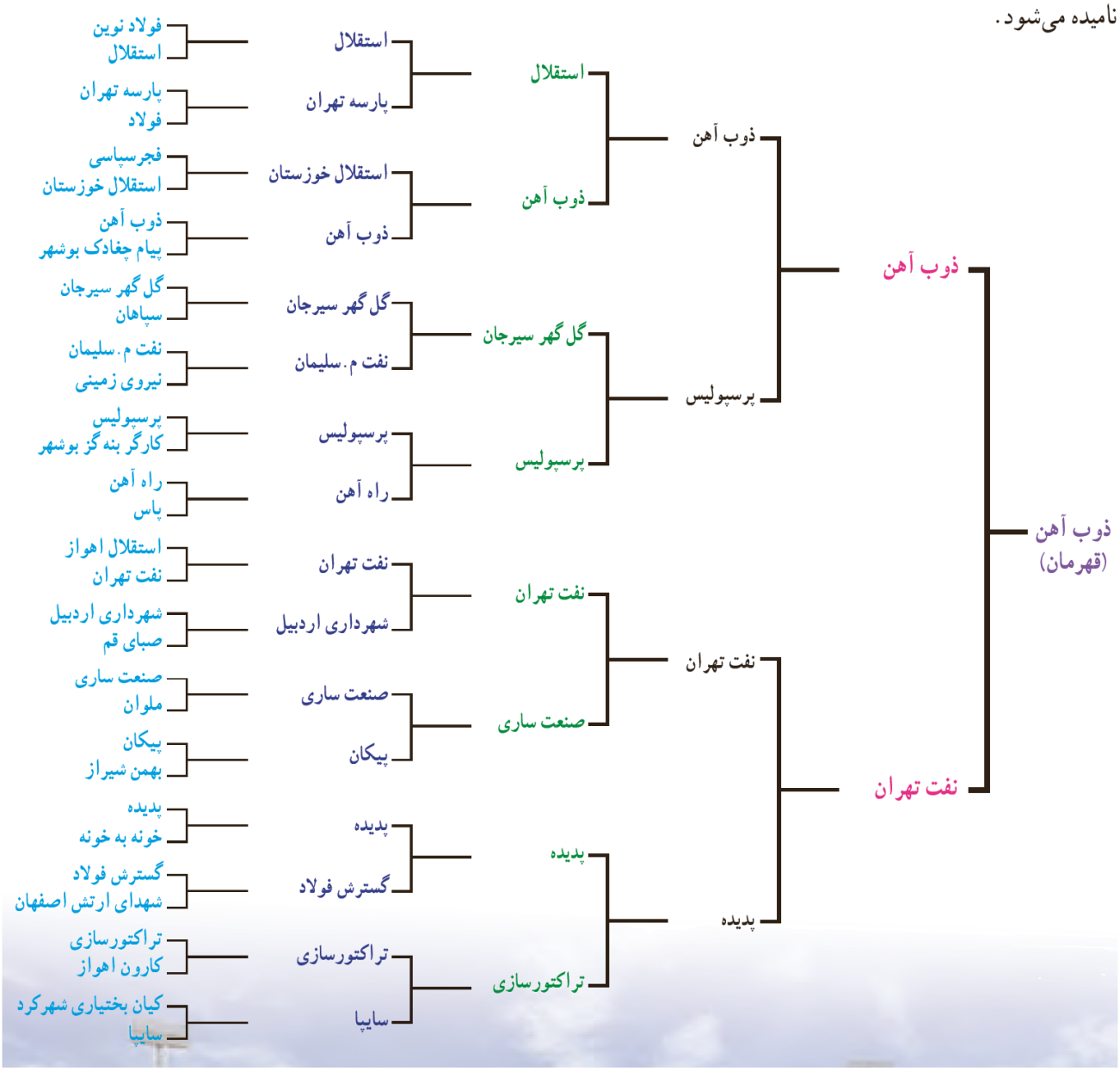
درس اوّل

تابع نمایی و ویژگی‌های آن

فعالیت

مسابقات جام حذفی فوتبال ایران در فصل ۹۴-۹۳ با شرکت ۳۲ تیم ودر پنج مرحله بازی از یک شانزدهم نهایی تا بازی نهایی به صورت زیر برگزار شد. همان طور که می‌بینید، در هر مرحله تیم برنده به مرحلهٔ بعدی می‌رود وتیم بازنده حذف می‌شود؛ به همین دلیل جام حذفی نامیده می‌شود.



تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

۱ در بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟ ۲ تیم

۲ در مرحلهٔ قبل از بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟ ۴ تیم

۳ تعداد تیم‌ها در هرمرحله با تعداد تیم‌ها در مرحلهٔ قبل از آن چه ارتباطی دارد؟

اگر تعداد تیم های هر مرحله را در ۲ ضرب کنیم، تعداد تیم ها ی مرحله قبل به دست می آید.

به عبارتی : تعداد تیم ها در مرحلهٔ قبل = تعداد تیم ها در هر مرحله×۲

۴ چه رابطه‌ای بین تعداد مراحل و تعداد کل تیم‌های شرکت کننده در این مسابقات برقرار است؟

تعداد کل تیم های شرکت کننده = $۲^{(\text{تعداد مراحل})}$

۵ باتوجه به الگوی ارائه شده درشکل، اگر تعداد مراحل برابر ۶ باشد، تعداد تیم‌های اولیه چند تاست؟

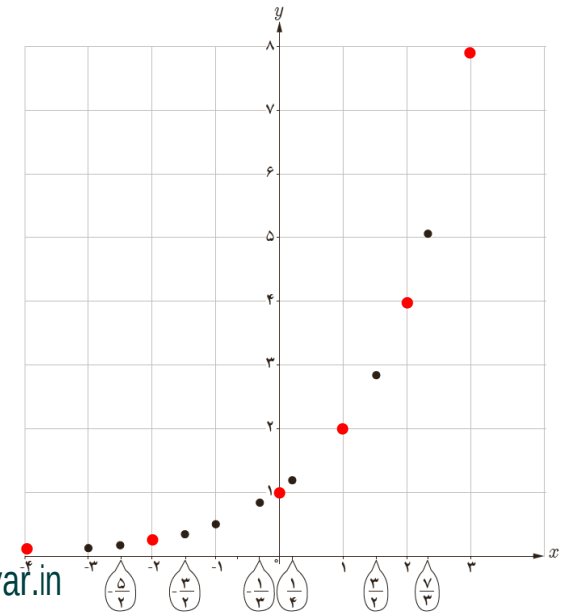
تعداد تیم های اولیه $= ۲^{۶} = ۶۴$

۶ اگر تعداد مراحل x و تعداد کل تیم‌ها y باشد، چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟ $y = ۲^{x}$

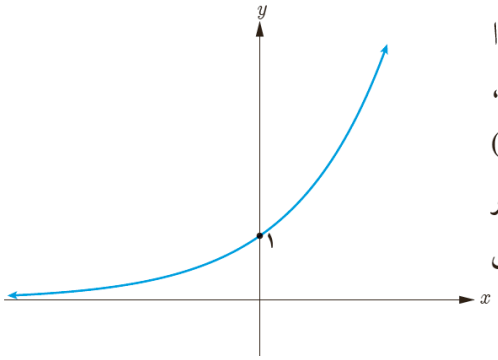
فعالیت

جدول زیر را کامل و نقاط به‌دست آمده را در نمودار مشخص کنید. مقادیر به صورت تقریبی نوشته شده است.

x	-۴	-۳	$-\frac{۵}{۲}$	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۷}{۳}$	۳
۲^{x}	$\frac{۱}{۱۶}$	۰/۱۲	۰/۱۸	$\frac{۱}{۴}$	۰/۳۵	۰/۵	۰/۷۹	۱	۱/۱۹	۲	۲/۸۳	۴	۵/۰۴	۸



تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی



دیدیم که برای هر عدد گویای a، مقداری برای ۲^a به‌دست می‌آید و نقطهٔ $(a, ۲^a)$ را می‌توان در دستگاه مختصات نشان داد. این موضوع برای اعداد گنگ نیز برقرار است، یعنی برای هر عدد گنگ مانند b نیز مقداری برای ۲^b خواهیم داشت و مختصات $(b, ۲^b)$ نیز نقطه‌ای را در دستگاه مختصات نمایش می‌دهد. اگر برای تمام اعداد حقیقی r، مقادیر ۲^r را به‌دست آوریم و نقاط $(r, ۲^r)$ را در دستگاه مختصات مشخص کنیم، نمودار مقابل به‌دست خواهد آمد.

توان‌های حقیقی

در کتاب سال دهم، به ازای هر عدد حقیقی مثبت a $(a\neq ۱)$ و عدد گویای $\frac{m}{n}$، مقدار $a^{\frac{m}{n}}$ را تعریف کردیم و ویژگی‌های مقدماتی آن را به‌دست آوردیم. این قوانین برای توان‌های حقیقی نیز برقرار است؛ یعنی اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ و x و y دو عدد حقیقی باشند، داریم :

الف) $a^{۰}=۱$ ب) $a^{-x}=\frac{۱}{a^x}$ پ) $a^x.a^y=a^{x+y}$ ت) $(a^x)^y=a^{xy}$

ث) $(ab)^x=a^x.b^x$ ج) $(\frac{a}{b})^x=\frac{a^x}{b^x}$ چ) $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$

کار در کلاس

۱ نمودارهای توابع با ضابطه‌های $y=x^۲$ و $y=۲^x$ را با تکمیل جدول‌های زیر رسم کنید. مقادیر به‌صورت تقریبی نوشته شده است.

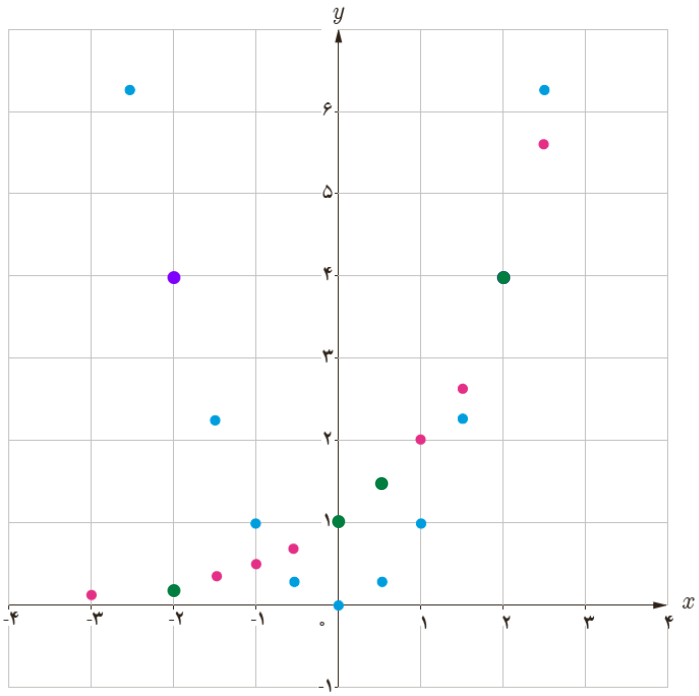
x	$-\frac{۵}{۲}$	$-۲.$	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۵}{۲}$
$y=x^۲$	۶/۲۵	۴	۲/۲۵	۱	۰/۲۵	۰	۰/۲۵	۱	۲/۲۵	۴.	۶/۲۵

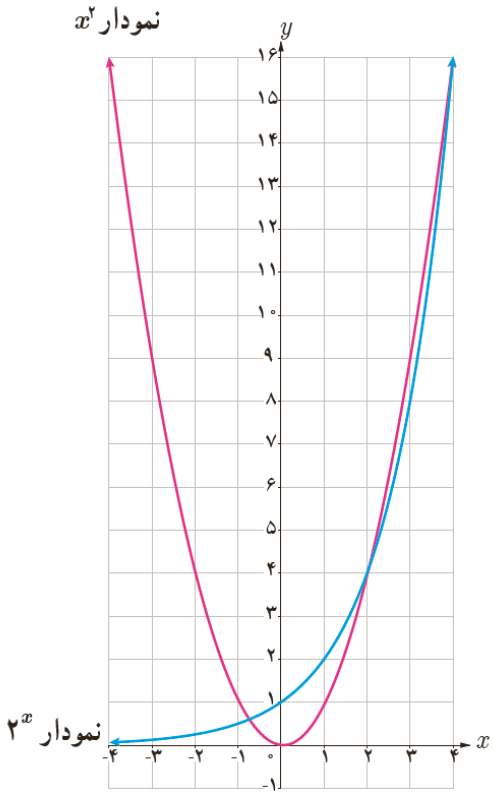
x	-۳	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۵}{۲}$
$y=۲^x$	۰/۱۲	$\frac{۱}{۴}$	۰/۳۵	۰/۵	۰/۷۱	۱.	۱/۴۱	۲	۲/۸۳	۴.	۵/۶۶

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

۲ حال این دو نمودار را دریک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. در چند نقطه مقادیر ۲^x و $x^۲$ باهم مساوی‌اند؟

۳ در $x^۲$، متغیر در ..پایه.. و عدد ثابت در ..توان.. است؛ ولی در ۲^x، ..متغیر.. در توان و ....عدد ثابت.... درپایه است.



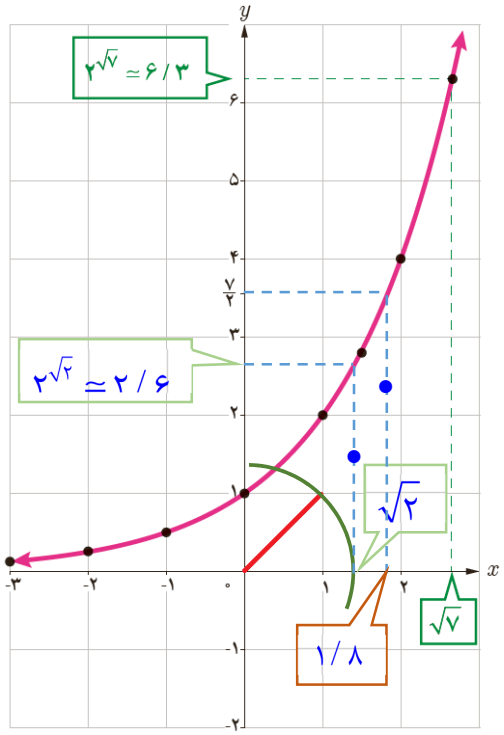


هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ که در آن $a\in\mathbb{R}$ و $a>۰$, $a\neq۱$ یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

مثال : توابع با ضابطه‌های $y=۲^x$ و $y=۳^x$ و $y=(\frac{۱}{۲})^x$ و $y=(\frac{۱}{۴})^x$ نمونه‌ای از توابع نمایی هستند.

فعالیت

درشکل مقابل نمودار تابع نمایی با ضابطهٔ $y=۲^x$ رسم شده است.



۱ محل تقاطع این نمودار با محور عرض‌ها چه نقطه‌ای است؟

نقطهٔ $(۰,۱)$

۲ دامنه و برد این تابع را به صورت بازه بنویسید.

$D=(-\infty,+\infty)$ و $R=(۰,+\infty)$

۳ آیا این تابع یک‌به‌یک است؟ چرا؟

بله ، زیرا خطوط موازی محور x ها ، نمودار تابع را حد اکثر در یک نقطه قطع می کند.

۴ عدد $\sqrt{۲}$ را روی محور xها مشخص کنید و به کمک نمودار، مقدار $۲^{\sqrt{۲}}$ را به‌صورت تقریبی به‌دست آورید. $۲^{\sqrt{۲}}=۲/۶$

۵ عدد $\frac{۷}{۲}$ روی محور yها مشخص شده است. با استفاده از نمودار، مقدار تقریبی عدد a را روی محور طول‌ها به‌دست آورید؛ به طوری‌که $۲^a \simeq \frac{۷}{۲}$.

همانطور که در شکل انجام شده ابتدا از نقطهٔ $y=\frac{۷}{۲}$ عمودی خارج می کنیم تا نمودار را قطع کند سپس از این نقطه بر محور x ها عمود می کنیم در نتیجه : $x \simeq ۱/۸$ که در واقع داریم : $۲^{(۱/۸)} \simeq \frac{۷}{۲}$

۶ اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$۲^{\sqrt{۵}} \quad , \quad ۲^{\frac{۳}{۲}} \quad , \quad ۲^{\frac{۵}{۲}} \quad , \quad ۲^{۰/۳} \quad , \quad ۲^{۵} \quad , \quad ۲^{-۰/۴} \quad , \quad ۲^{-۱}$$

$$۲^{-۱} < ۲^{-۰/۴} < ۲^{۰/۳} < ۲^{\frac{۳}{۲}} < ۲^{\sqrt{۵}} < ۲^{\frac{۵}{۲}} < ۲^{۵}$$

۷ درحالت کلی اگر $x<y$، چه رابطه‌ای بین ۲^x و ۲^y برقرار است؟

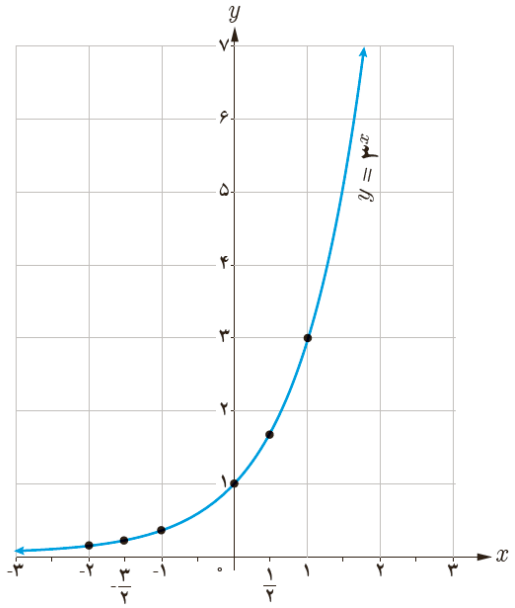
در حالت کلی رابطهٔ مقابل برقرار است .

$$x<y \Rightarrow ۲^x < ۲^y$$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

کار در کلاس

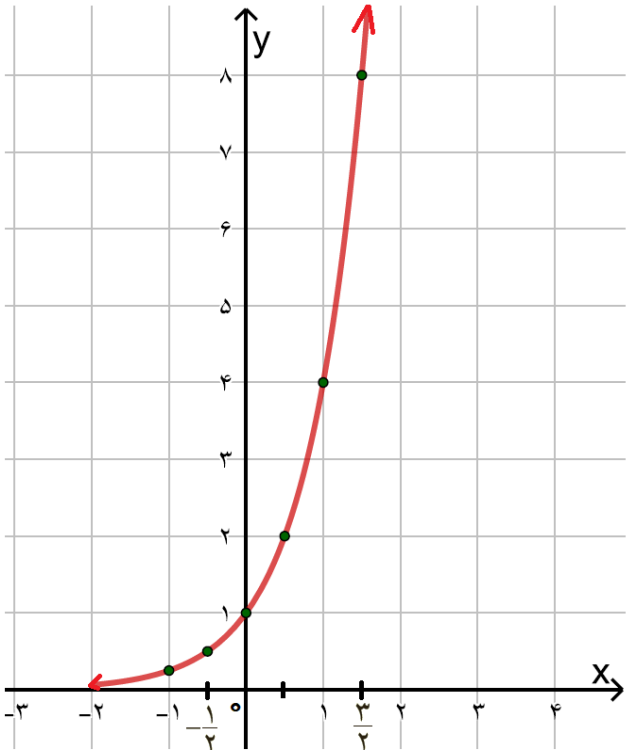
نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۳^x$ با استفاده از نقاط جدول زیر رسم شده است.



x	$y = ۳^x$
-۲	۰/۱۱
$-\frac{۳}{۲}$	۰/۱۹
-۱	۰/۳۳
۰	۱
$\frac{۱}{۲}$	۱/۷۳
۱	۳

۱ جدول زیر را کامل کنید و با استفاده از آن نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۴^x$ را رسم کنید.

x	$y = ۴^x$
... ۱- ...	$\frac{۱}{۴}$
$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
۰	... ۱ ...
$\frac{۱}{۲}$	.. ۲ ..
۱	.. ۴ ..
$\frac{۳}{۲}$	۸



تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

۲ دامنه و برد توابع فوق را باهم مقایسه کنید.

دامنهٔ هر دو تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی($\mathbb{R}$) است .یعنی $D=(-\infty,+\infty)$

برد هر دو تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی بزرگ تر از صفر است . یعنی $R=(0,+\infty)$

۳ با استفاده از نمودار، درجاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $۳^{۲/۵} \ (>) \ ۳^{\frac{۷}{۳}}$ ب) $۴^{\sqrt{۷}} \ (>) \ ۴^{\sqrt{۵}}$

با توجه به نمودار این دو تابع ، هر چقدر که مقدار x یعنی توان عدد های ۳ و ۴ افزایش پیدا کند مقدار y یعنی ۳^x و ۴^x هم افزایش پیدا می کنند .

۴ اگر $x<y$، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $۳^x \ (<) \ ۳^y$ ب) $۴^x \ (<) \ ۴^y$

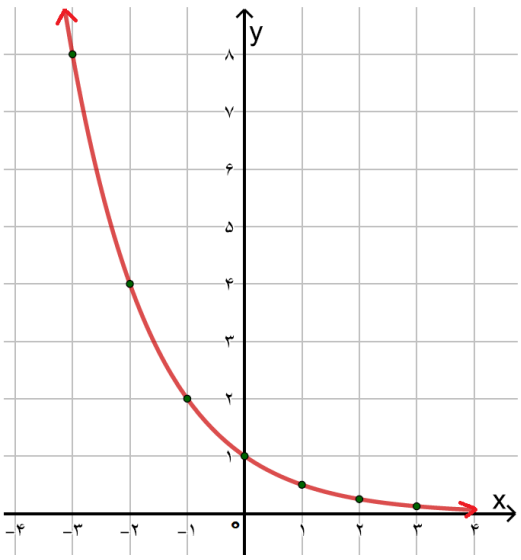
فعالیت

۱ با استفاده از جدول زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{۱}{۲})^x$ را رسم کنید.

x	-۳	-۲	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۱	۲	۳
$y=(\frac{۱}{۲})^x$	۸	۴	$\sqrt{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$

۲ محل تقاطع نمودار این تابع با محور y ها چه نقطه‌ای است؟

نقطهٔ $(0,1)$



۳ دامنه و برد این تابع را بنویسید.

$D=(-\infty,+\infty)$ و $R=(0,+\infty)$

۴ آیا این تابع یک‌به‌یک است؟چرا؟

بله ، زیرا خطوط موازی محور x ها ، نمودار تابع را حد اکثر در یک نقطه قطع می کند.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

۵ با استفاده از نمودار فوق، درجاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $(\frac{۱}{۲})^{۰/۵} \geq (\frac{۱}{۲})^{۱/۵}$ ب) $(\frac{۱}{۲})^{\sqrt{۲}} \geq (\frac{۱}{۲})^{۴}$ پ) $(\frac{۱}{۲})^{۳} \leq (\frac{۱}{۲})^{۴}$

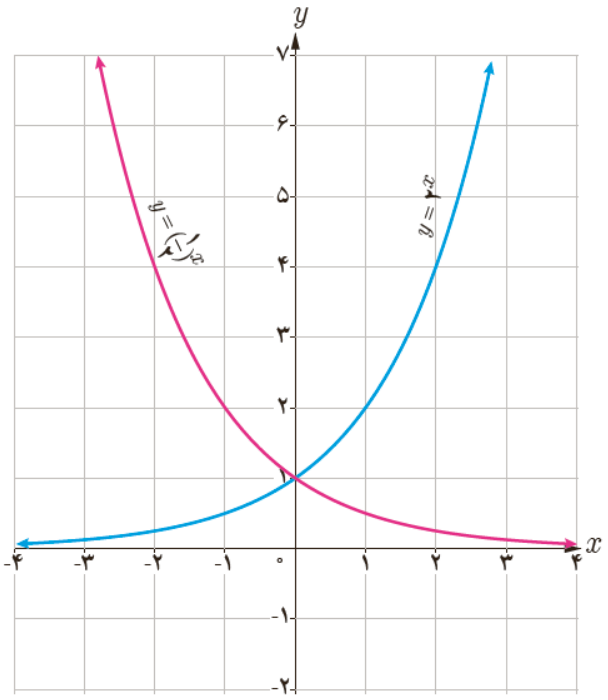
۶ با استفاده از نمودار، اگر $x<y$، چه رابطه‌ای بین $(\frac{۱}{۲})^{y}$ و $(\frac{۱}{۲})^{x}$ وجود دارد؟

درحالت کلی داریم : $x < y \Rightarrow (\frac{۱}{۲})^{x} > (\frac{۱}{۲})^{y}$

کار در کلاس

نمودار توابع با ضابطه‌های $y = ۲^{x}$ و $y = (\frac{۱}{۲})^{x}$ را در نظر بگیرید.

۱ نمودارهای این دو تابع نسبت به کدام محور مختصات قرینه‌اند؟



نمودار های این دو تابع نسبت به محور y ها قرینه اند.

۲ با جایگذاری $-x$ به جای x در تابع با ضابطهٔ $y = ۲^{x}$

به تابع با ضابطهٔ $y = ۲^{-x}$ یا همان $y = (\frac{۱}{۲})^{x}$ دست می‌یابیم.

۳ دامنه و برد این دو تابع چه رابطه‌ای با هم دارند؟

دامنه و برد این دو تابع باهم برابرند. یعنی :

$D=(-\infty,+\infty)$ و $R=(۰,+\infty)$

۴ دو تابع نمایی دیگری که نسبت به محور yها قرینه‌اند، مثال بزنید

$y = (\frac{۱}{۳})^{x}$, $y = ۳^{x}$ و $y = (\frac{۵}{۲})^{x}$, $y = (\frac{۲}{۵})^{x}$

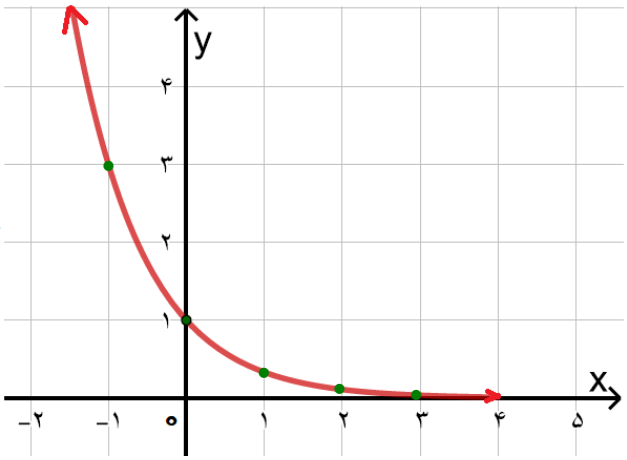
نمودار توابع با ضابطه‌های $y = a^{x}$ و $y = a^{-x}$ $(a>۰ \text{ و } a\neq ۱)$ نسبت به محور yها قرینه‌اند.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

کار در کلاس

نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{۱}{۳})^x$ را رسم کنید.

x	$y=(\frac{۱}{۳})^x$
-۱	۳
۰	۱
۱	$\frac{۱}{۳}$
۲	$\frac{۱}{۹}$



فعالیت

با توجه به مطالبی که در این درس آموخته اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

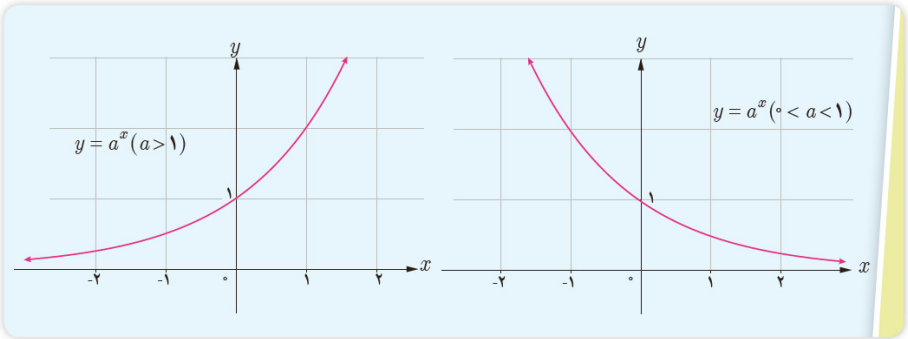
۱ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=a^x$ ($a>۱$) مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آن $(۰,+\infty)$ است.

۲ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=a^x$ ($۰<a<۱$) $\mathbb{R}$ و برد آن بازهٔ $(۰,+\infty)$ است.

۳ نمودار توابع فوق محور yها را در نقطهٔ $(۰,۱)$ قطع می‌کند و محور xها را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند.

۴ این دو تابع، یک به یک هستند زیرا خطوط موازی محور xها، نمودار آنها را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

نمودار توابع نمایی در حالت کلی مشابه نمودارهای زیر است.



تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

معادلات نمایی

معادله‌ای را که در آن متغیر در توان قرار گرفته باشد، معادلهٔ نمایی می‌نامند.
برای حل معادلات نمایی از خاصیت یک به یک بودن تابع نمایی استفاده می‌کنیم.
اگر a یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و داشته باشیم $a^x=a^y$ آنگاه $x=y$ و برعکس.

مثال : معادله‌های نمایی مقابل را حل کنید.

الف) $۳^{۲x-۳}=۸۱ \rightarrow ۳^{۲x-۳}=۳^۴ \rightarrow ۲x-۳=۴ \rightarrow x=\frac{۷}{۲}$

ب) $۴^{۲x-۱}=۸^{x+۱} \rightarrow (۲^۲)^{۲x-۱}=(۲^۳)^{x+۱} \rightarrow ۴x-۲=۳x+۳ \rightarrow x=۵$

پ) $۵^{۳n-۱}=۱۲۵^{۲n+۱} \rightarrow ۵^{۳n-۱}=۵^{۶n+۳} \rightarrow ۳n-۱=۶n+۳ \rightarrow n=-\frac{۴}{۳}$

تمرین

۱ کدام یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

الف) $y=۲x^۲-۳x+۱$ ب) $y=x^۳$ پ) $y=(۰/۱)^x$

ت) $y=(\frac{۳}{۲})^x$ ث) $y-۳x=۲$ ج) $y=\sqrt{x-۱}$

قسمت های (پ) و (ت) تابع نمایی هستند.

۲ کدام یک از نقاط زیر، روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۳^x$ قرار دارند؟

الف) $(۱,۰)$ بنا بر این نقطهٔ $(۰,۱)$ روی نمودار این تابع قرار ندارد. $y=۳^x \Rightarrow ۰ \neq ۳^۱ \Rightarrow$

ب) $(۳,۱)$ بنا بر این نقطهٔ $(۳,۱)$ روی نمودار این تابع قرار ندارد. $y=۳^x \Rightarrow ۱ \neq ۳^۳ \Rightarrow$

پ) $(۰,۱)$ بنا بر این نقطهٔ $(۰,۱)$ روی نمودار این تابع قرار دارد. $y=۳^x \Rightarrow ۱=۳^۰ \Rightarrow$

ت) $(\sqrt{۳},\frac{۱}{۳})$ بنا بر این نقطهٔ $(\sqrt{۳},\frac{۱}{۳})$ روی نمودار این تابع قرار ندارد. $y=۳^x \Rightarrow \frac{۱}{۳} \neq ۳^{\sqrt{۳}} \Rightarrow$

ث) $(۱,۳)$ بنا بر این نقطهٔ $(۳,۱)$ روی نمودار این تابع قرار دارد. $y=۳^x \Rightarrow ۳=۳^۱ \Rightarrow$

ج) $(-۱,\frac{۱}{۳})$ بنا بر این نقطهٔ $(-۱,\frac{۱}{۳})$ روی نمودار این تابع قرار دارد. $y=۳^x \Rightarrow \frac{۱}{۳}=۳^{-۱} \Rightarrow$

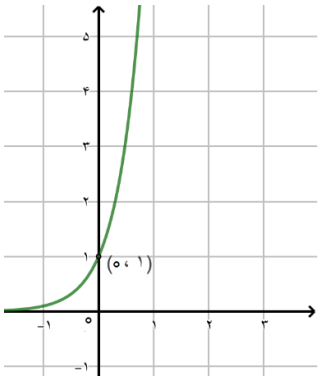
تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

۳ کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, \sqrt{۵})$ روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۵^x$ قرار دارد.

الف) صحیح است . $(\frac{۱}{۲}, \sqrt{۵}) \Rightarrow \sqrt{۵} = ۵^{\frac{۱}{۲}}$

ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۱۰^x$ با محور yها، نقطهٔ $(۰,۱۰)$است.



راه اول: نمودار $y = ۱۰^x$ را رسم می کنیم با توجه به نمودار گزاره غلط است زیرا از نقطهٔ $(۰,۱)$ عبور می کند.

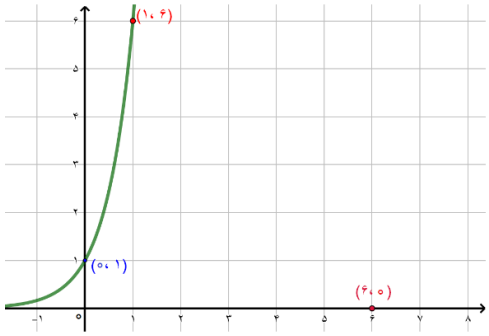
راه دوم : محل برخورد با تابع با ضابطهٔ $y = ۱۰^x$ نقطهٔ $(۰,۱)$ است .

$$x = ۰ \Rightarrow y = (۱۰)^{۰} \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow (۰,۱)$$

پ) دامنهٔ توابع با ضابطه‌های $y = ۲^x$ و $y = x^۲$ مساوی‌اند.

دامنهٔ هردو تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی است . بنا بر این گزاره صحیح است.

ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۶^x$ با محور xها، نقطهٔ $(۶,۰)$ است.

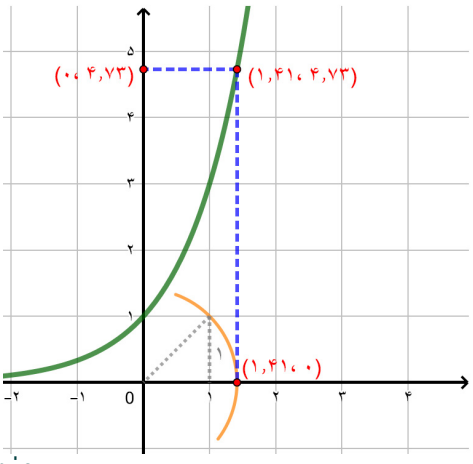


نمودار تابع $y = ۶^x$ را رسم می کنیم. با توجه به شکل نقطهٔ $(۶,۰)$ روی نمودار نیست . بنا براین گزاره صحیح نیست.

نکته : این نمودار محور x ها را قطع نمی کند.

۴ الف) نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۳^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی عدد $۳^{\sqrt{۲}}$ را با توجه به نمودار به‌دست آورید.

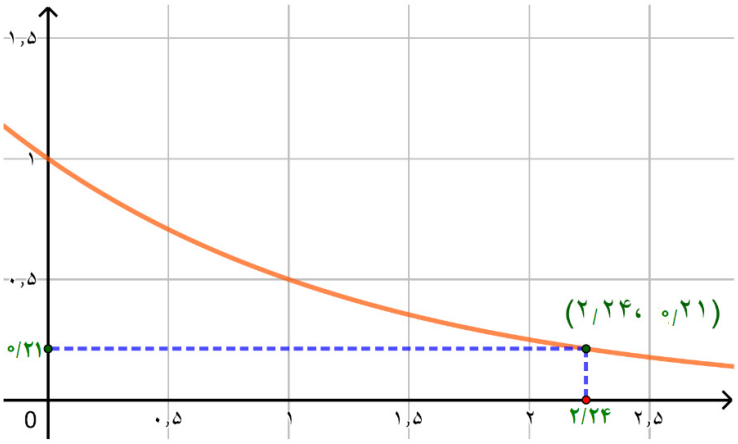
x	۰	۱	$\sqrt{۲} \simeq ۱/۴۱$	۲
y	۱	۳	$۳^{\sqrt{۲}} \simeq ۴/۷۳$	۹



ابتدا $\sqrt{۲}$ را به کمک رسم روی محور x ها مشخص می کنیم با توجه به نمودار رسم شده مقدار تقریبی $۳^{\sqrt{۲}}$ برابر است با ۴/۷۳ .

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

ب) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{۱}{۲})^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی $(\frac{۱}{۲})^{\sqrt{۵}}$ را با توجه به نمودار به‌دست آورید.



مقدار تقریبی $\sqrt{۵}\simeq ۲/۲۴$ را روی محور x ها مشخص می کنیم با توجه به نمودار مقدار تقریبی $(\frac{۱}{۲})^{\sqrt{۵}}$ برابر است با ۰/۲۱ .

۵ فرض کنیم $f(x)=۳^x$, $g(x)=(\frac{۱}{۱۶})^x$ و $h(x)=۱۰^x$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=۳^x \Rightarrow f(۳)=۳^۳=۲۷$

ب) $g(x)=(\frac{۱}{۱۶})^x \Rightarrow g(-۱)=(\frac{۱}{۱۶})^{-۱}=۱۶$

پ) $h(x)=۱۰^x \Rightarrow h(-۲)=۱۰^{-۲}=\frac{۱}{۱۰^۲}=\frac{۱}{۱۰۰}=۰/۰۱$

۶ معادلات نمایی زیر را حل کنید.

برای حل معادلات نمایی ابتدا هر دو طرف تساوی را هم پایه می کنیم.

الف) $۲^{۳n-۲}=\frac{۱}{۳۲^۲} \Rightarrow ۲^{۳n-۲}=(۲^۵)^{-۲} \Rightarrow ۲^{۳n-۲}=۲^{-۱۰} \Rightarrow ۳n-۲=-۱۰ \Rightarrow n=-\frac{۸}{۳}$

ب) $۹^{۳y-۳}=۲۷^{y+۱} \Rightarrow (۳^۲)^{۳y-۳}=(۳^۳)^{y+۱} \Rightarrow ۳^{۶y-۶}=۳^{۳y+۳} \Rightarrow ۶y-۶=۳y+۳ \Rightarrow ۳y=۹ \Rightarrow y=۳$

پ) $۴^{۳x+۲}=\frac{۱}{۶۴^۳} \Rightarrow ۴^{۳x+۲}=(۴^۳)^{-۳} \Rightarrow ۴^{۳x+۲}=۴^{-۹} \Rightarrow ۳x+۲=-۹ \Rightarrow ۳x=-۱۱ \Rightarrow x=\frac{-۱۱}{۳}$

ت) $۹^x=۳^{x^۲-۴x} \Rightarrow (۳^۲)^x=۳^{x^۲-۴x} \Rightarrow ۳^{۲x}=۳^{x^۲-۴x} \Rightarrow ۲x=x^۲-۴x \Rightarrow x^۲-۶x=۰$

$\Rightarrow x(x-۶)=۰ \Rightarrow x=۰ \ , \ x=۶$

ث) $(\frac{۳}{۵})^{x+۱}=\frac{۲۵}{۹} \Rightarrow (\frac{۳}{۵})^{x+۱}=(\frac{۵}{۳})^۲ \Rightarrow (\frac{۳}{۵})^{x+۱}=(\frac{۳}{۵})^{-۲} \Rightarrow x+۱=-۲ \Rightarrow x=-۳$