درس دوم

تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

بسیاری از اندازه‌گیری‌ها در علوم مختلف، طیف وسیعی از اعداد را در برمی‌گیرد که برای سادگی محاسبات، می‌توان آنها را توان‌هایی از یک عدد خاص در نظر گرفت و اندازه‌های بسیار بزرگ را در ابعاد بسیار کوچک‌تری نشان داد یا اندازه‌های بسیار کوچک را در ابعاد مناسب نمایش داد. کاربرد این ساده‌سازی محاسبات در علوم مختلف مانند فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، زمین‌شناسی، جمعیت‌شناسی، مهندسی و ... مشهود است.

خواندنی

روش لگاریتم‌گیری در سال ۱۶۱۴ از سوی جان‌نپر (۱۶۱۷ـ۱۵۵۰)، ریاضی‌دان اسکاتلندی در کتابی با عنوان «توصیفی بر قانون شگفت‌انگیز لگاریتم» ارائه شد.

در فیزیک مفهومی به‌نام شدت صوت وجود دارد که درک انسان را از بلندی صوت بیان می‌کند. تراز شدت یک صوت عبارت است از لگاریتم (در پایهٔ ده) نسبت شدت آن صوت به شدت صوت مبنا. تراز شدت صوت را با β نشان می‌دهند و یکای آن را به افتخار بل فیزیکدان امریکایی مخترع تلفن، بل (B) و دسی‌بل (dB) نام‌گذاری کرده‌اند. هر بل برابر ده دسی‌بل است. (I_0 شدت صوت مبناست که برابر آستانهٔ شنوایی گوش سالم است).

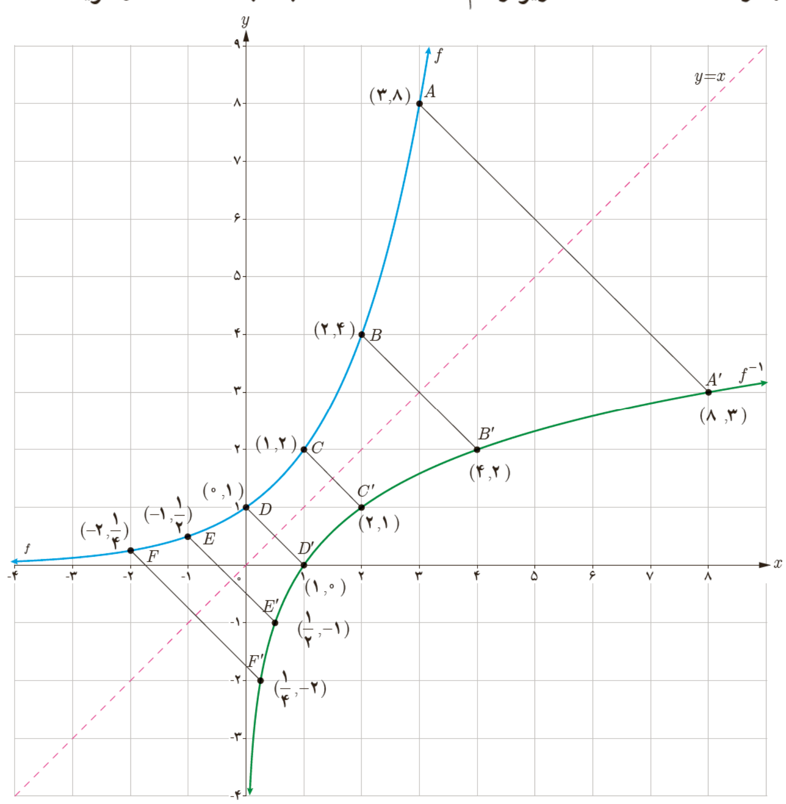
$\beta = \log_{I_0} I$

صدا	تراز شدت صوت dB
شدت صوت مبنا	۰
نفس کشیدن	۱۰
برگ درختان در نسیم	۲۰
صحبت کردن از فاصلهٔ یک متری	۴۰
همهمه در فروشگاه	۶۰
سروصدای خودروها در خیابان شلوغ	۷۰
آستانهٔ دردناکی (برای بسامد ۱۰۰۰ Hz)	۱۲۰
مسلسل	۱۳۰
غرش هواپیمای جت در حین بلند شدن	۱۴۰
راکت فضایی، در موقع بلند شدن	۱۷۰

تابع لگاریتمی

فعالیت

در درس اول با تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x)=۲^x$ و نمودار آن آشنا شدیم. همان‌طور که مشاهده کردیم، این تابع یک به یک است؛ بنابراین وارون آن نیز یک تابع است. نمودار تابع f و وارون آن، تابع f^{-1} در دستگاه مختصات زیر رسم شده است که نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند.



۱ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} در نمودار قبل را به‌دست آورید.

دامنهٔ تابع f مجموعهٔ اعداد حقیقی ($D_f = \mathbb{R}$) است . و برد آن مجموعهٔ اعدادحقیقی نامنفی($R_f = (0,+\infty)$) است.

دامنهٔ تابع f^{-1} مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی ($D_{f^{-1}} = (0,+\infty)$) است . و برد آن مجموعهٔ اعدادحقیقی ($R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$) است.

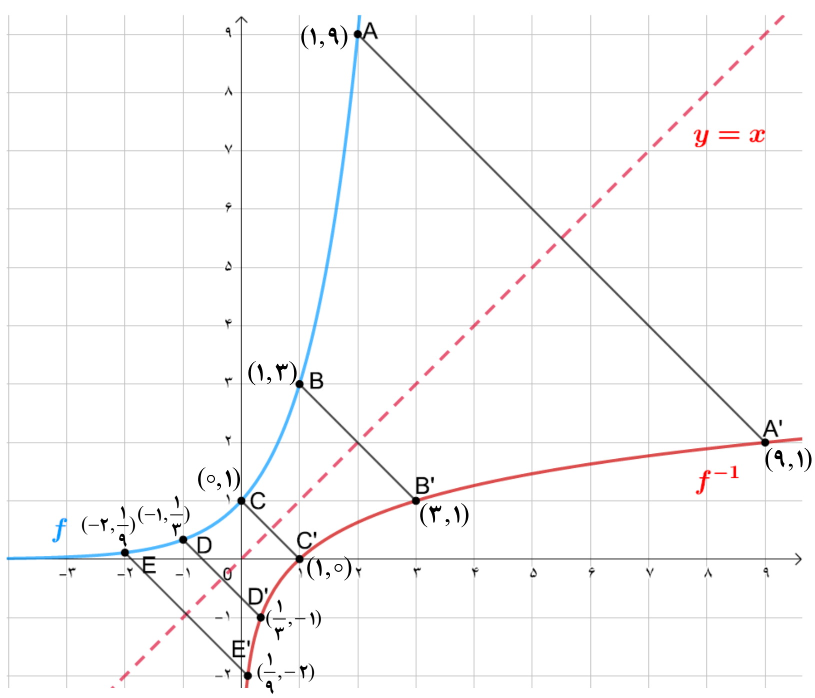
۲ با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

$f(2) = 4$	$f(0) = 1$	$f(-1) = \frac{1}{2}$	$f(-2) = \frac{1}{4}$
$f^{-1}(4) = 2$	$f^{-1}(1) = 0$	$f^{-1}(\frac{1}{2}) = -1$	$f^{-1}(\frac{1}{4}) = -2$

فعالیت

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = 3^x$ در دستگاه مختصات زیر رسم شده است.

۱ با توجه به نقاط نمودار f، نمودار f^{-1} را رسم کنید.



تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

۲ با توجه به نقاط f و $f^{-۱}$ در نمودار قبل، جاهای خالی را تکمیل کنید.

$f(۲)=۹$	$f(۱)=۳$	$f(۰)=۱$	$f(-۲)=\frac{۱}{۹}$
$f^{-۱}(۹)=۲$	$f^{-۱}(۳)=۱$	$f^{-۱}(۱)=۰$	$f^{-۱}(\frac{۱}{۹})=-۲$

۳ دامنه و برد دو تابع f و $f^{-۱}$ را به‌دست آورید.

دامنهٔ تابع f مجموعهٔ اعداد حقیقی ($D_f=\mathbb{R}$) است . و برد آن مجموعهٔ اعدادحقیقی نامنفی($R_f=(۰,+\infty)$) است.

دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی($D_{f^{-۱}}=(۰,+\infty)$) است . و برد آن مجموعهٔ اعدادحقیقی ($R_{f^{-۱}}=\mathbb{R}$) است.

با توجه به مطالب فوق، وارون تابع با ضابطهٔ $f(x)=۳^x$ را به‌صورت $f^{-۱}(x)=\log_۳ x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتمِ x در مبنای ۳ می‌نامیم
به عبارت دیگر توابع نمایی و لگاریتمی وارون یکدیگرند.

۴ با توجه به نمودار توابع نمایی و لگاریتمی، دامنه و برد آنها را به‌طور کلی بنویسید.

اگر $(a\in\mathbb{R}\,,\ a>۰\,,\ a\neq ۱)$ $f(x)=a^x$ آنگاه $D_f=\mathbb{R}$ و $R_f=(۰,+\infty)$

اگر $(a\in\mathbb{R}\,,\ a>۰\,,\ a\neq ۱)$ $f^{-۱}(x)=\log_a x$ آنگاه $D_{f^{-۱}}=(۰,+\infty)$ و $R_{f^{-۱}}=\mathbb{R}$

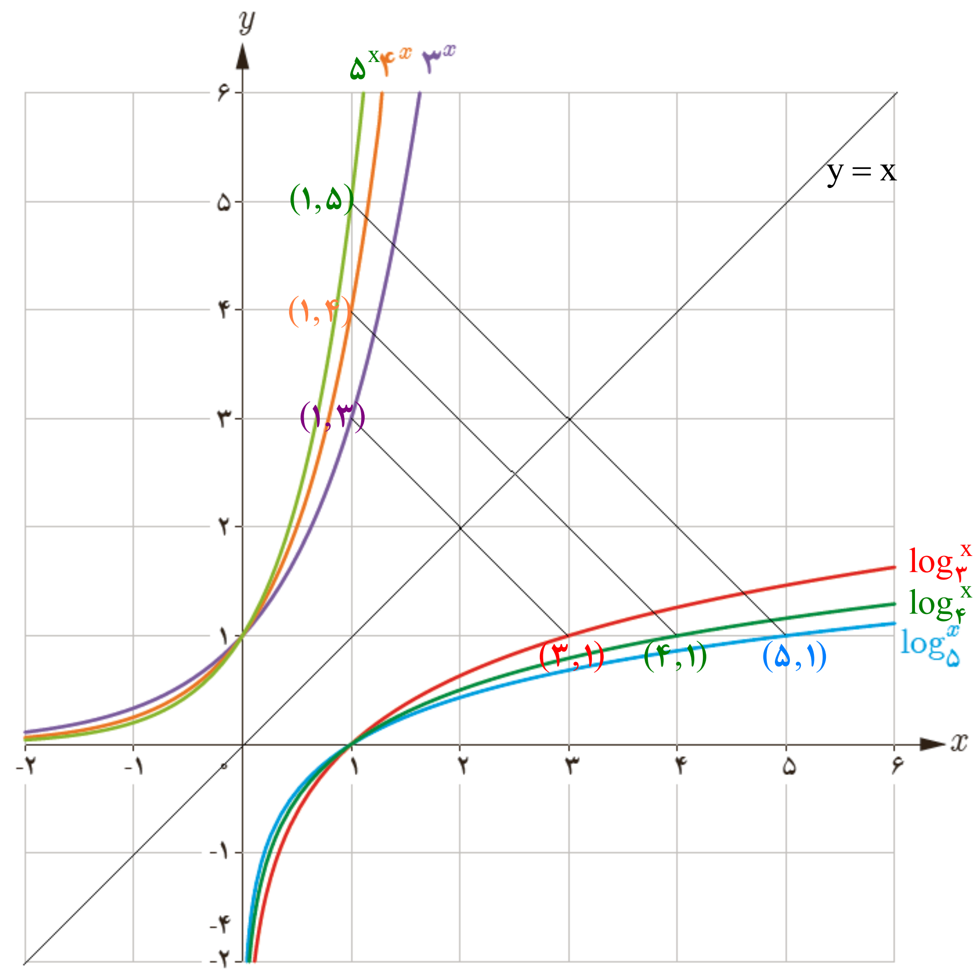
وارون تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ را به‌صورت $f^{-۱}(x)=\log_a x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای a می‌نامیم. به عبارت دیگر برای هر عدد حقیقی مثبت a $(a\neq ۱)$ داریم :

$$f(x)=a^x \Leftrightarrow f^{-۱}(x)=\log_a x$$

کار در کلاس

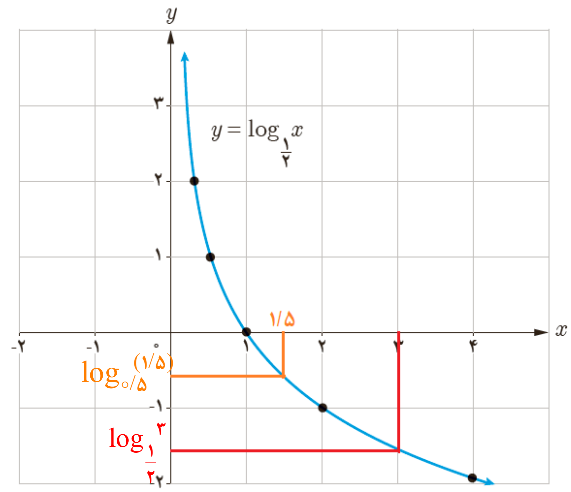
در شکل زیر ، نمودار شش تابع رسم شده است که دو به دو وارون یکدیگرند.

برای توابعی که ضابطهٔ آنها نوشته شده، ضابطهٔ وارون آنها را روی نمودار مربوطه بنویسید و دامنه و برد هر تابع را مشخص کنید.



کار در کلاس

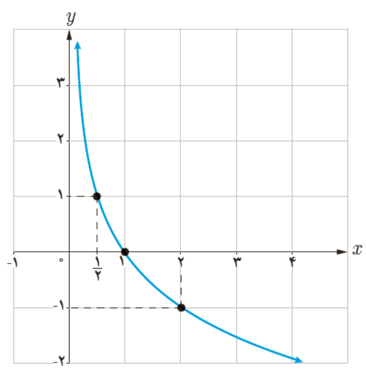
نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\log_{\frac{۱}{۲}} x$ را در نظر بگیرید. اعداد زیر بین کدام اعداد صحیح قرار دارند؟



الف) $\log_{\frac{۱}{۲}} ۳$ .... $-۲<\log_{\frac{۱}{۲}}^{۳}<-۱$ ......

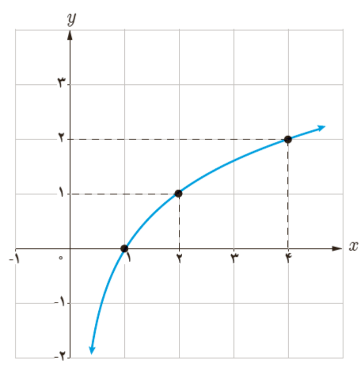
ب) $\log_{۰/۵}(۱/۵)$ ...... $-۱<\log_{۰/۵}^{(۱/۵)}<۰$ ......

نمودار چند تابع لگاریتمی در زیر رسم شده است. ضابطهٔ مربوط به هر کدام را بنویسید.



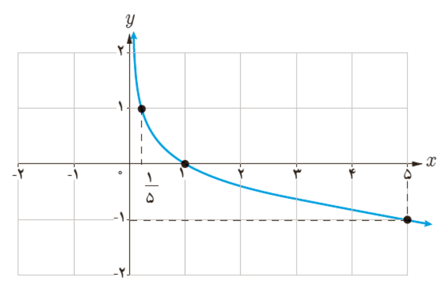
(۱)

.... $y=\log_{\frac{۱}{۲}}^{x}$ ....



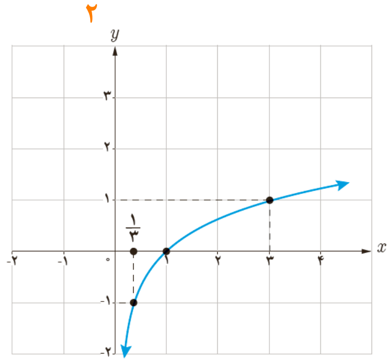
(۲)

.... $y=\log_{۲}^{x}$ ....



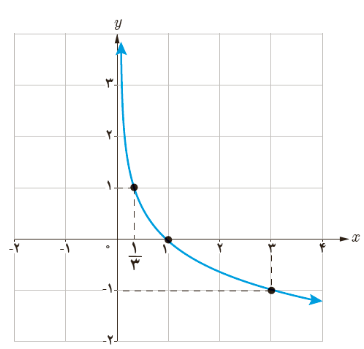
(۳)

.... $y=\log_{\frac{۱}{۵}}^{x}$ ....



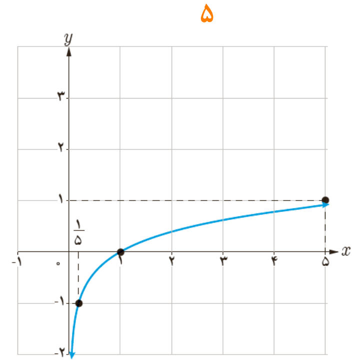
(۴)

.... $y=\log_{۳}^{x}$ ....



(۵)

.... $y=\log_{\frac{۱}{۳}}^{x}$ ....



(۶)

.... $y=\log_{۵}^{x}$ ....

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

فعالیت

با توجه به مطالبی که تا به‌حال خوانده‌اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

۱ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\log_a x$ $(a>1)$، مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت و برد آن **اعداد حقیقی** است.

۲ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\log_a x$ $(0<a<1)$، بازه $(0,+\infty)$ و برد آن **اعداد حقیقی** است.

۳ نمودار توابع فوق، محور xها را در نقطهٔ $x=1$ قطع می‌کند و محور yها را قطع نمی‌کند.

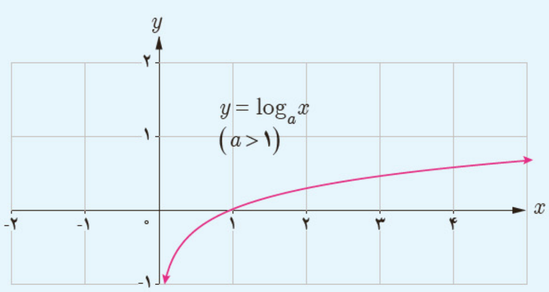
۴ این دو تابع، یک‌به‌یک **هستند**؛ زیرا خطوط موازی محور xها، نمودار آنها را حداکثر در **یک** نقطه قطع می‌کند.

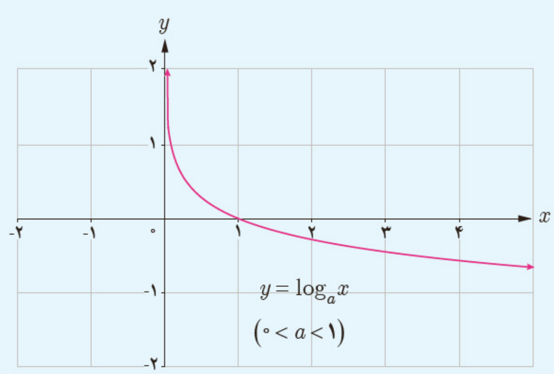
۵ وارون تابع نمایی، تابع **لگاریتمی** است و وارون تابع لگاریتمی، تابع **نمایی** است.

اگر a عدد حقیقی مثبت $(a\neq 1)$ باشد، داریم: $a^0=1$، بنابراین همواره:

$$\log_a 1 = 0$$

نمودار تابع لگاریتمی در حالت کلی، مشابه نمودارهای زیر است.

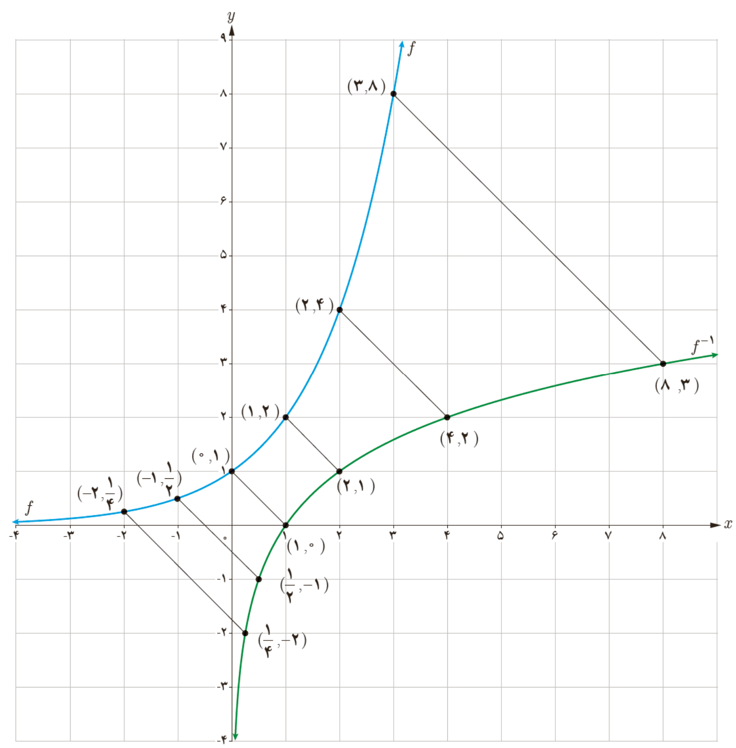




لگاریتم یک عدد

فعالیت

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=۲^{x}$ و $f^{-۱}(x)=\log_{۲}x$ را در نظر بگیرید.



با توجه به نقاط این دو نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

نمایی	$۲^{۳}=۸$	$۲^{۲}=۴$	$۲^{۱}=۲$	$۲^{۰}=۱$	$۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}$	$۲^{-۲}=\frac{۱}{۴}$
لگاریتمی	$\log_{۲}۸=۳$	$\log_{۲}۴=۲$	$\log_{۲}۲=۱$	$\log_{۲}۱=۰$	$\log_{۲}\frac{۱}{۲}=-۱$	$\log_{۲}\frac{۱}{۴}=-۲$

به‌طور کلی اگر $a^{y}=x$ آن‌گاه $\log_{a}x=y$ و به عکس. $(x>۰\ ,\ a\neq ۱\ ,\ a>۰)$

$$b^{a}=c \Leftrightarrow \log_{b}c=a \qquad (c>۰\ ,\ b>۰\ ,\ b\neq ۱)$$

کار در کلاس

جدول زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$\log_{۸}۱=۰ \rightarrow ۸^{۰}=۱$	$۱۰^{۳}=۱۰۰۰ \rightarrow \log_{۱۰}۱۰۰۰=۳$
$\log_{۲}(\frac{۱}{۱۶})=-۴ \rightarrow ۲^{-۴}=\frac{۱}{۱۶}$	$۹^{\frac{۱}{۲}}=۳ \rightarrow \log_{۹}۳=\frac{۱}{۲}$
$\log_{۵}۱۲۵=۳ \rightarrow ۵^{۳}=۱۲۵$	$۴^{۳}=۶۴ \rightarrow \log_{۴}۶۴=۳$
$\log_{\frac{۱}{۳}}۲۷=-۳ \rightarrow (\frac{۱}{۳})^{-۳}=۲۷$	$۲^{۵}=۳۲ \rightarrow \log_{۲}۳۲=۵$
$\log_{\frac{۱}{۵}}۱۲۵=-۳ \rightarrow (\frac{۱}{۵})^{-۳}=۱۲۵$	$۲^{-۳}=\frac{۱}{۸} \rightarrow \log_{۲}\frac{۱}{۸}=-۳$
$\log_{\frac{۱}{۲}}۱۶=-۴ \rightarrow (\frac{۱}{۲})^{-۴}=۱۶$	$۳^{-۴}=\frac{۱}{۸۱} \rightarrow \log_{۳}\frac{۱}{۸۱}=-۴$

تذکر

لگاریتم در مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامیم. در این حالت معمولاً مبنا نوشته نمی‌شود، یعنی به جای $\log_{۱۰} a$ می‌نویسیم $\log a$.

خواندنی

ابداع لگاریتم یکی از مهم‌ترین ابداعات ریاضی است و کاربرد آن در ساده کردن محاسبات است. با لگاریتم، عمل ضرب به جمع و عمل تقسیم به تفریق تبدیل می‌شود.

ویژگی‌های لگاریتم

فعالیت

۱ اگر a عدد حقیقی مثبت $(a\neq ۱)$ باشد، همواره داریم :

$$\log_a ۱ = ۰ \quad و \quad \log_a a = ۱ \quad و \quad \log_a (\frac{۱}{a}) = -۱$$

۲ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c $(c \neq ۱)$ داریم :

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

اثبات : فرض کنیم $m = \log_c a$ و $n = \log_c b$، پس طبق تعریف $a = c^m$ و $b = c^n$، از
این‌رو $ab = c^m . c^n = c^{m+n}$ بنابراین طبق تعریف لگاریتم داریم: $\log_c ab = m+n$ و در نتیجه :
$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$

مثال : فرض کنید $\log ۲ \simeq ۰/۳$ و $\log ۳ \simeq ۰/۴۸$ ، مقدار $\log ۶$ را حساب کنید.

$$\log ۶ = \log(۳ \times ۲) = \log ۳ + \log ۲ \simeq ۰/۴۸ + ۰/۳ = ۰/۷۸$$

۳ اگر a و b اعدادی حقیقی و مثبت و $a \neq ۱$ و n یک عدد طبیعی باشد، داریم :

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

اثبات :

$$\log_a b^n = \log_a \overbrace{b \dots b}^{n \text{ بار}} = \underbrace{\log_a b + \dots + \log_a b}_{n \text{ بار}} = n \log_a b$$

۴ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c $(c \neq ۱)$ داریم :

$$\log_c (\frac{a}{b}) = \log_c a - \log_c b$$

اثبات : فرض می‌کنیم $\frac{a}{b} = d$. بنابراین :

$$a = bd \rightarrow \log_c a = \log_c b + \log_c d \rightarrow \log_c d = \log_c a - \log_c b$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

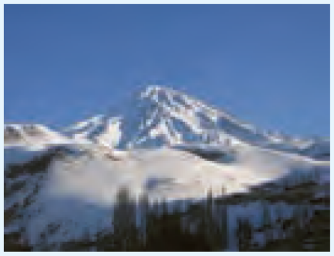
مثال : اگر $\log ۲ \simeq ۰/۳$ ، مقدار $\log ۵$ را محاسبه کنید.

$$\log ۵ = \log \frac{۱۰}{۲} = \log ۱۰ - \log ۲ = ۱ - \log ۲ \simeq ۱ - ۰/۳ = ۰/۷$$

خواندنی

لاپلاس دانشمند بزرگ فرانسوی دربارهٔ لگاریتم گفته است :

«لگاریتم ابزاری است قابل ستایش که به کمک آن کار چند ماه به چند روز کاهش می‌یابد، عمر اخترشناسان را دو برابر می‌کند و از خطاهای کوچک می‌گذرد و از عبارات طولانی و جدا نشدنی ریاضی بیزار است».



خواندنی

همزمان با افزایش ارتفاع، فشار هوای اتمسفر(جو زمین) کاهش می‌یابد. رابطه محاسبه فشار براساس ارتفاع به‌صورت $a = ۱۵۵۰۰\left(۵ - \log_{۱۰}^{p}\right)$ است ، که در آن a ارتفاع برحسب متر و p نیز فشار برحسب پاسکال است. فشار هوا را در بالای قلهٔ دماوند به ارتفاع ۵۶۱۰ متر محاسبه کنید.

کار در کلاس

اگر $\log ۲ \simeq ۰/۳$ و $\log ۳ \simeq ۰/۴۸$، مقادیر تقریبی اعداد زیر را به‌دست آورید.

۱) $\log ۱۲ = \log (۳ \times ۴) = \log ۳ + \log ۲^{۲} = \log ۳ + ۲\log ۲ \simeq ۰/۴۸ + ۰/۶ = ۱/۰۸$

۲) $\log ۰/۷۵ = \log \frac{۳}{۴} = \log ۳ - \log ۴ = \log ۳ - \log ۲^{۲} = \log ۳ - ۲\log ۲ \simeq ۰/۴۸ - ۰/۶ = ۰/۴۲$

۳) $\log \sqrt{۵} = \log \left(\frac{۱۰}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}\log\left(\frac{۱۰}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}(\log ۱۰ - \log ۲) \simeq \frac{۱}{۲}(۱ - ۰/۳) = ۰/۳۵$

۴) $\log \frac{۲۵}{۱۸} = \log \frac{۱۰۰}{۷۲} = \log ۱۰۰ - \log ۷۲ = \log ۱۰ - \log(۲^{۳} \times ۳^{۲}) = \log ۱۰۰ - (\log ۲^{۳} + \log ۳^{۲})$

$= \log ۱۰۰ - (۳\log ۲ + ۲\log ۳) \simeq ۲ - (۰/۹ + ۰/۹۶) = ۰/۱۴$

۵) $\log \sqrt[۳]{۶} = \log (۲ \times ۳)^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۳}(\log ۲ + \log ۳) \simeq \frac{۱}{۳}(۰/۳ + ۰/۴۸) = ۰/۲۶$

۶) $\log \frac{\sqrt{۲۷}}{\sqrt[۴]{۵}} = \log \sqrt{۲۷} - \log \sqrt[۴]{۵} = \log ۳^{\frac{۳}{۲}} + \log ۵^{\frac{۱}{۴}}) = \frac{۳}{۲}\log ۳ + \frac{۱}{۴}\log ۵ \simeq \frac{۳}{۲}(۰/۴۸) + \frac{۱}{۴}(۰/۷) = ۰/۸۹۵$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

معادلات لگاریتمی

یکی از مهم‌ترین کاربردهای لگاریتم، حل معادلات لگاریتمی است که معمولاً از مدل‌سازی یک مسئلهٔ واقعی به‌دست می‌آید. مانند محاسبهٔ شدت زلزله، مشخص کردن ضعیف‌ترین صدای قابل شنیدن یا آستانه شنوایی، پیش‌بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان مشخص و محاسبهٔ نیمه عمر عناصر رادیواکتیو. معادلات زیر نمونه‌هایی از معادلات لگاریتمی‌اند :

$$\log_4 x+1 = 3 \quad , \quad \log_3 x = \log_3 7 \quad , \quad \log_5 x+\log_5(x-1) = \log_5 12$$

منظور از حل معادلهٔ لگاریتمی، پیدا کردن مقادیری برای مجهول است که در معادله صدق کند.

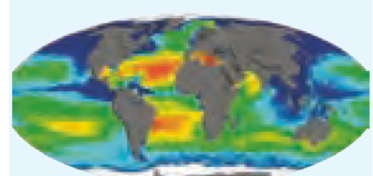
به‌طور کلی اگر a یک عدد حقیقی مثبت $(a\neq 1)$، باشد آن‌گاه با توجه به یک‌به‌یک بودن تابع لگاریتمی، از تساوی $\log_a x = \log_a y \ \ (x, y>0)$ می‌توان نتیجه گرفت $x=y$ و به عکس، اگر $x=y$ $(x , y>0)$ آن‌گاه $\log_a x = \log_a y$.

خواندنی

شوری آب اقیانوس‌ها با عرض جغرافیایی (فاصله از خط استوا) و عمق اقیانوس تغییر می‌کند. در مناطق استوایی میزان شوری آب در سطح اقیانوس‌ها به دلیل تبخیر سریع آب، بیشتر است. هرچه به قطب نزدیک‌تر می‌شویم، کاهش تبخیر و بارش باران باعث می‌شود شوری سطح آب کاهش یابد. تابع مربوطه عبارت است از :

$$S(x) = 31/5 + 1/1\log(x+1)$$

که در این رابطه x نشان‌دهندهٔ عمق به متر و $S(x)$ نشان‌دهندهٔ مقدار گرم نمک موجود در هرکیلوگرم آب اقیانوس است.



فعالیت

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱) $\log_3 x = 2 \rightarrow x = 3^2 = 9$

۲) $\log_5 (x+6) = \log_5 (2x-3) \ \rightarrow \ x+6 = 2x-3 \ \rightarrow \ x=9$

که $x = 9$ برای هر دو لگاریتم قابل قبول است.

۳) $\log_5 (x+6) + \log_5 (x+2) = 1 \rightarrow \log_5 [(x+6)(x+2)] = 1$

$$\rightarrow (x+6)(x+2) = 5 \rightarrow x^2+8x+12 = 5$$

$$\rightarrow x^2+8x+7 = 0 \rightarrow (x+7)(x+1) = 0 \rightarrow x=-7 \quad \text{یا} \quad x=-1$$

توجه کنید که $x=-7$ قابل قبول نیست؛ از این‌رو تنها جواب $x=-1$ قابل قبول است که در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

۴ $\log_{۴}(x+۲)=\log_{۴}۸ \rightarrow x+۲=۸ \rightarrow x=۶$

۵ $۳\log_{۲} x=-\log_{۲}۲۷ \rightarrow \log_{۲} x^{۳}=\log_{۲}\frac{۱}{۲۷} \rightarrow x^{۳}=\frac{۱}{۲۷} \rightarrow x=\frac{۱}{۳}$

۶ $\log(x+۱)-\log(x-۳)=۳ \rightarrow \log\frac{x+۱}{x-۳}=۳ \rightarrow \log\frac{x+۱}{x-۳}=\log ۱۰۰۰$

$$\rightarrow \frac{x+۱}{x-۳}=۱۰۰۰ \rightarrow x+۱=۱۰۰۰x-۳۰۰۰$$
$$\rightarrow ۳۰۰۱=۹۹۹x \rightarrow x\simeq ۳/۰۰۴$$

کار در کلاس

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱ $\log_{۵} x=۳ \rightarrow x=۵^{۳} \rightarrow x=۱۲۵$

۲ $\log_{۲}(۲x+۱)=۳ \rightarrow ۲x+۱=۲^{۳} \rightarrow ۲x+۱=۸ \rightarrow ۲x=۷ \rightarrow x=۳/۵$

۳ $\log_{۲}(x+۱)+\log_{۲}(x+۴)=۲ \rightarrow \log_{۲}(x+۱)(x+۴)=\log_{۲}۴ \rightarrow (x+۱)(x+۴)=۴$

$$\rightarrow x^{۲}+۵x+۴=۴ \rightarrow x^{۲}+۵x=۰ \rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=-۵ \end{cases}$$

توجه کنید که $x=-۵$ قابل قبول نیست؛از این رو تنها جواب قابل قبول $x=۰$ است .

۴ $\log_{۳}۲۴۳=۲x+۱ \rightarrow ۲۴۳=۳^{۲x+۱} \rightarrow ۳^{۵}=۳^{۲x+۱} \rightarrow ۲x+۱=۵ \rightarrow x=۲$

۵ $\log_{۳}(x-۱)=۴ \rightarrow x-۱=۳^{۴} \rightarrow x=۸۱+۱ \rightarrow x=۸۲$

۶ $\log(۲x)-\log(x-۳)=۱ \rightarrow \log(\frac{۲x}{x-۳})=\log ۱۰ \rightarrow \frac{۲x}{x-۳}=۱۰$

$$\rightarrow ۲x=۱۰x-۳۰ \rightarrow ۸x=۳۰ \rightarrow x=\frac{۳۰}{۸}=۳/۷۵$$

۷ $۲\log_{۴}(x-۱)=۳ \rightarrow \log_{۴}(x-۱)^{۲}=\log_{۴}۶۴ \rightarrow (x-۱)^{۲}=۶۴$

$$\rightarrow \begin{cases} x-۱=۸ \rightarrow x=۹ \\ x-۱=-۸ \rightarrow x=-۷ \end{cases}$$

توجه کنید که $x=-۷$ قابل قبول نیست.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

تمرین

۱ تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\log_c abd = \log_c a + \log_c b + \log_c d$ (a و b و c و d اعدادحقیقی مثبت‌اند و $c \neq ۱$)

$\log_c abd = \log_c (ab)d = \log_c (ab) + \log_c d = \log_c a + \log_c b + \log_c d$

ب) $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$ (a و b و c اعدادحقیقی مثبت‌اند و $c \neq ۱$ و b)

اگر $x = \log_b a$ آنگاه داریم : $b^x = a$ حالا از دو طرف این تساوی لگاریتم در مبنای c می گیرم :

$b^x = a \to \log_c b^x = \log_c a \to x \log_c b = \log_c a$

$\to x = \dfrac{\log_c a}{\log_c b} \xrightarrow{x=\log_b a} \log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

پ) $a^{\log_a b} = b$ (a و b اعدادحقیقی مثبت‌اند و $a \neq ۱$)

اگر $\log_a b = x$ آنگاه داریم :

$b = a^x \xrightarrow{x=\log_a b} b = a^{\log_a b}$

ت) $\log_b a \times \log_a b = ۱$

با توجه به رابطهٔ قسمت (ب) داریم :

$$\left.\begin{aligned} \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \\ \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \end{aligned}\right\} \to \log_b a \times \log_a b = \frac{\cancel{\log_c a}}{\cancel{\log_c b}} \times \frac{\cancel{\log_c b}}{\cancel{\log_c a}} = ۱ \to \log_b a \times \log_a b = ۱$$

۲ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_۷ \sqrt[۵]{۴۹} = \log_۷ (۴۹)^{\frac{۱}{۵}} = \log_۷ (۷^۲)^{\frac{۱}{۵}} = \log_۷ (۷)^{\frac{۲}{۵}} = \frac{۲}{۵} \log_۷ ۷ = \frac{۲}{۵}$

ب) $\log_۳ ۲۷^{\frac{۱}{۲}} = \log_۳ (۳^۳)^{\frac{۱}{۲}} = \log_۳ (۳)^{\frac{۳}{۲}} = \frac{۳}{۲} \log_۳ ۳ = \frac{۳}{۲}$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

پ) $-\log_{۵}۱۲۵ = -\log_{۵}(۵)^{۳} = -۳\log_{۵}۵ = -۳$

ت) $۳\log_{۱۰}\sqrt{۱۰۰۰} = ۳\log_{۱۰}\sqrt{۱۰^{۳}} = ۳\log_{۱۰}(۱۰)^{\frac{۳}{۲}} = ۳\times\frac{۳}{۲}\log_{۱۰}۱۰ = \frac{۹}{۲}$

۳ اگر $f(x) = ۳ - ۲\log_{۴}(\frac{x}{۲} - ۵)$ ، مقدار $f(۴۲)$ را به‌دست آورید.

$f(۴۲) = ۳ - ۲\log_{۴}(\frac{۴۲}{۲} - ۵) = ۳ - ۲\log_{۴}۱۶ = ۳ - ۲\log_{۴}(۴)^{۲} = ۳ - ۲\times۲\log_{۴}۴ = ۳ - ۴ = -۱$

$\rightarrow f(۴۲) = -۱$

۴ الف) اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_{a}x$ از نقطهٔ $(۲, ۲)$ عبور کند، مقدار a را به‌دست آورید.

$f(۲) = ۲ \rightarrow \log_{a}۲ = ۲ \rightarrow a^{۲} = ۲ \rightarrow a = \sqrt{۲}\ ,\ a = -\sqrt{۲}$

چون **a** باید مثبت و مخالف ۱ باشد پس $a = -\sqrt{۲}$ غیر قابل قبول است.

ب) اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_{a}x$ از نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, -۴)$ عبور کند، مقدار a چند است؟

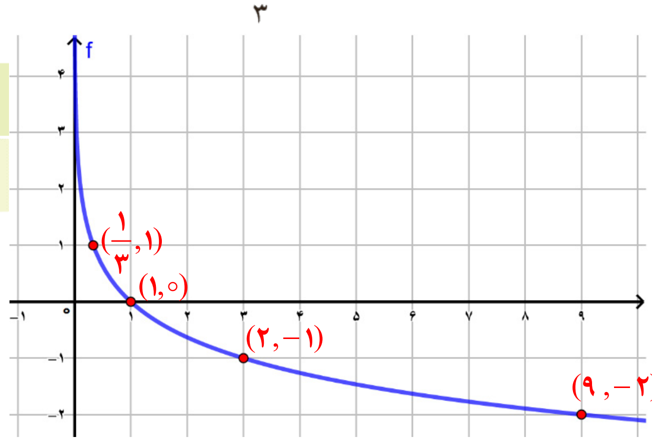
$f(\frac{۱}{۲}) = -۴ \rightarrow \log_{a}(\frac{۱}{۲}) = -۴ \rightarrow a^{-۴} = \frac{۱}{۲} \rightarrow \frac{۱}{a^{۴}} = \frac{۱}{۲} \rightarrow a^{۴} = ۲ \rightarrow a = \sqrt[۴]{۲}\ ,\ a = -\sqrt[۴]{۲}$

چون **a** باید مثبت و مخالف ۱ باشد پس $a = -\sqrt[۴]{۲}$ غیر قابل قبول است.

۵ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_{\frac{۱}{۳}}x$ را رسم کنید.

x	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹
y	۱	۰	-۱	-۲

به کمک جدول نقاط را در صفحه پیدا می کنیم و به هم وصل می کنیم.



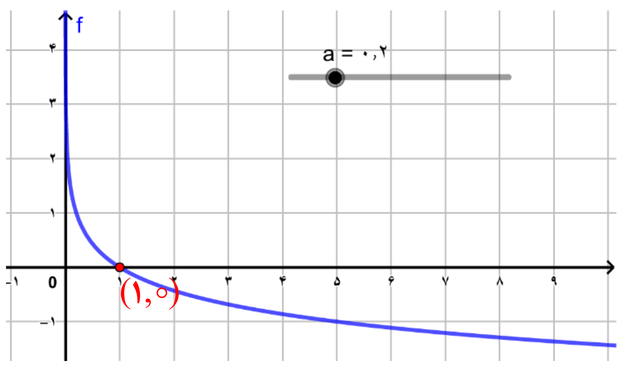
۶ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

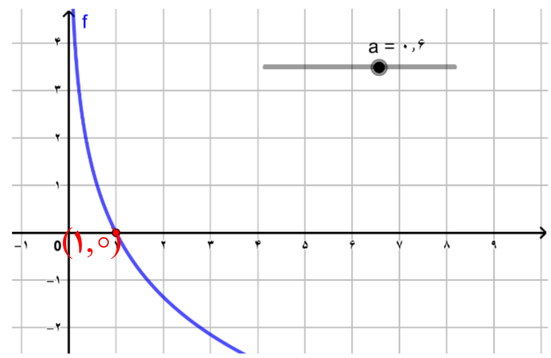
الف) اگر $y=\log_a x$ ، آنگاه $a^x=y$.

نادرست است زیرا به طور کلی اگر $a^y=x$ آن گاه $\log_a x=y$ و به عکس $(x>۰, a\neq ۱, a>۰)$

ب) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\log_a x$ $(۰<a<۱)$ از نقطهٔ $(۱,۰)$ عبور می‌کند.

راه اول : نمودار تابع را رسم می کنیم و بررسی می کنیم که نقطهٔ $(۱,۰)$ روی نمودار هست یا نه .





راه دوم : می توانیم به جای x عدد ۱ را قرار دهیم و سپس مقدار y را به دست آوریم .

$$x=۰\rightarrow \log_a ۱=۰\rightarrow y=۰$$

بنا براین نمودار تابع با ضابطهٔ $\log_a x=y$ $(۰<a<۱)$ از نقطهٔ $(۱,۰)$ عبور می کند.

پ) لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

درست است . با توجه به تعریف ص ۱۱۰ کتاب .

۷ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_۳(p^۲-۲)=\log_۳ p \rightarrow p^۲-۲=p\rightarrow p^۲-p-۲=۰\rightarrow (p-۲)(p+۱)=۰\rightarrow p=۲\ ,\ p=-۱$

توجه کنید که $p=-۱$ قابل قبول نیست .

ب) $\log_۵(x+۱)+\log_۵(x-۱)=۱$

$$\log_۵(x+۱)(x-۱)=۱\rightarrow (x+۱)(x-۱)=۵^۱\rightarrow x^۲-۱=۵\rightarrow x^۲=۶\rightarrow x=-\sqrt{۶}\ ,\ x=\sqrt{۶}$$

توجه کنید که $x=-\sqrt{۶}$ قابل قبول نیست .

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

پ) $3\log_4 a - \log_4 5 = \log_4 25 \to \log_4(\frac{a^3}{5}) = \log_4 25 \to \frac{a^3}{5} = 25 \to a^3 = 125 \to a^3 = 5^3 \to a = 5$

ت) $\log_{\frac{1}{10}}(x^2 - 21) = -2$

$x^2 - 21 = (\frac{1}{10})^{-2} \to x^2 - 21 = 10^2 \to x^2 - 21 = 100 \to x^2 = 121 \to x = -11 \,,\, x = 11$

توجه کنید که $x = -11$ قابل قبول نیست .

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی