درس سوم

نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی

در درس اول و دوم با نمودار توابع نمایی و لگاریتمی آشنا شدیم. نمودار این توابع را می‌توان با استفاده از قوانینی که قبلاً فرا گرفته‌ایم، انتقال دهیم.

با توجه به آنچه که در مبحث انتقال توابع گفته شد، فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت

نمودار هر تابع را به ضابطهٔ آن نظیر کنید.

الف) $k(x) = -\log_{۲} x$ → (۶)

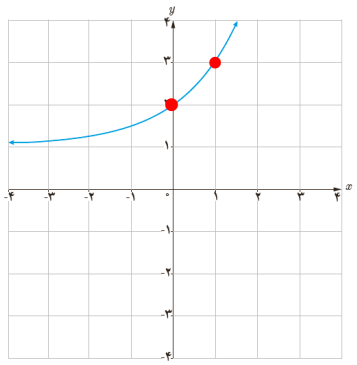
ب) $l(x) = ۲ + \log x$ → (۴)

پ) $h(x) = -(\frac{۱}{۲})^{x}$ → (۳)

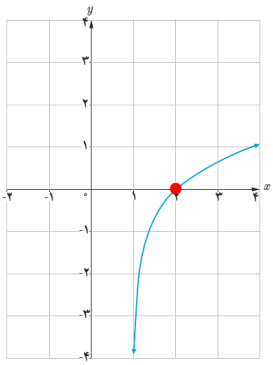
ت) $g(x) = \log(x-۱)$ → (۲)

ث) $j(x) = ۳^{(x-۱)}$ → (۵)

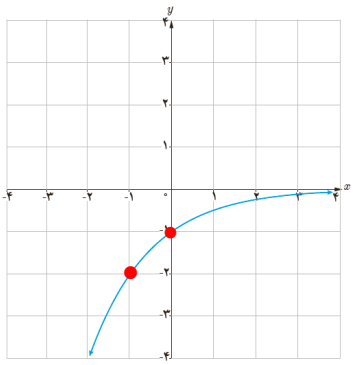
ج) $f(x) = ۲^{x}+۱$ → (۱)



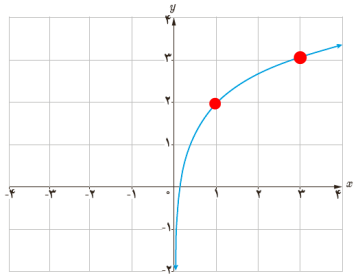
(۱)



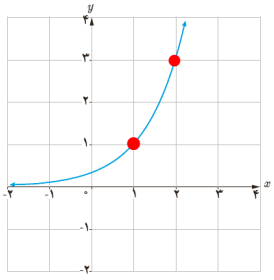
(۲)



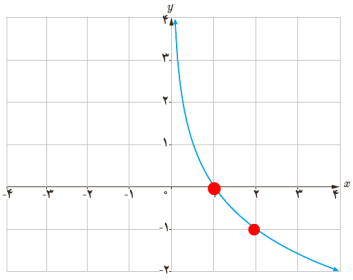
(۳)



(۴)



(۵)



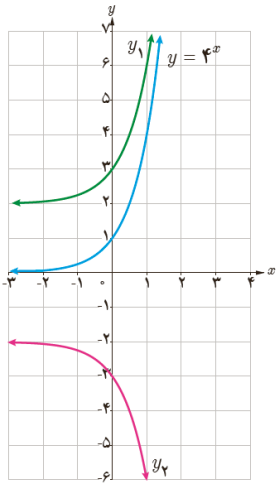
(۶)

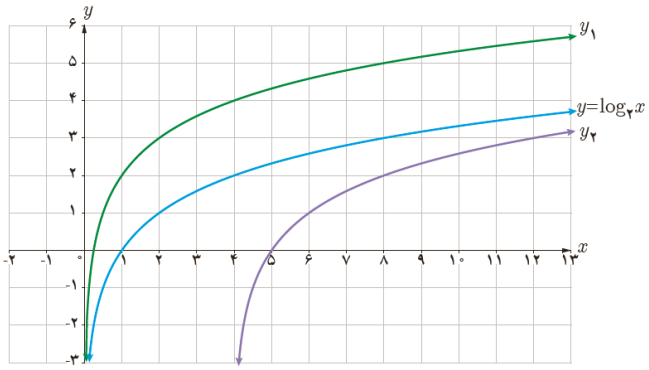
در هر قسمت می توان نقاط کلیدی (●) را در معادله ها امتحان کرد.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

کار در کلاس

در شکل‌های زیر، نمودار یک تابع نمایی و یک تابع لگاریتمی و انتقال یافته‌های آنها رسم شده است. ضابطهٔ توابع انتقال یافته را بنویسید.





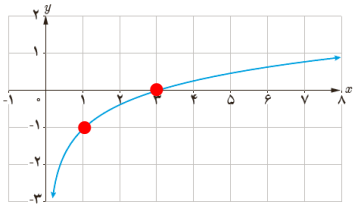
$$y = ۴^x \rightarrow \begin{cases} y_۱ = ۲ + ۴^x \\ y_۲ = -(۲ + ۴^x) \end{cases}$$

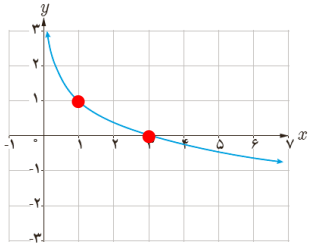
$$y = \log_۲ x \rightarrow \begin{cases} y_۱ = ۲ + \log_۲ x \\ y_۲ = \log(x - ۴) \end{cases}$$

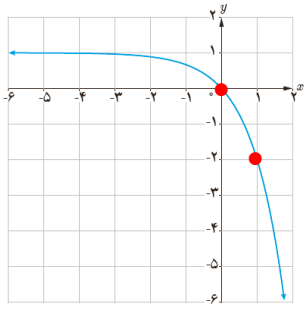
کار در کلاس

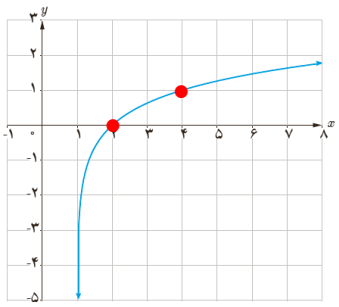
کدام یک از ضابطه‌ها به کدام یک از نمودارها تعلق دارند؟

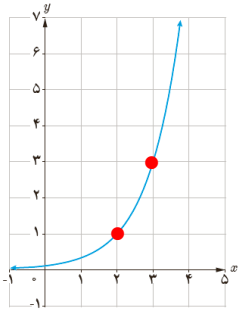
۱) $y = \log_۳ (x - ۱)$ → (ت)
۲) $y = ۳^x + ۱$ → (ج)
۳) $y = ۱ - ۳^x$ → (پ)
۴) $y = \log_۳ x - ۱$ → (الف)
۵) $y = ۱ - \log_۳ x$ → (ب)
۶) $y = ۳^{(x-۲)}$ → (ث)

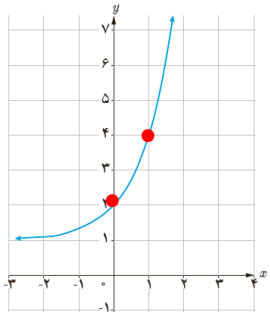

(الف)


(ب)


(پ)


(ت)


(ث)

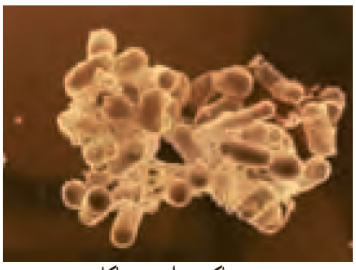

(ج)

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی :

در حالت کلی یک تابع به‌صورت $h(x)=ka^x$ $(a\neq ۱, a>۰)$ مانند یک تابع نمایی رفتار می‌کند که در بسیاری از مسائل اقتصادی، طبیعی و مهندسی و... ظاهر می‌شود.



توده باکتری اشریشیاکلی

مثال : اشریشیاکلی (Escherichia coli) یا به‌طور اختصار E.coli نوعی باکتری است که به‌طور طبیعی در دستگاه گوارش زندگی می‌کند و تکثیر آن به‌صورت نمایی است. عوامل مختلفی مانند زیاد شدن آن باعث بیماری می‌شود. نوع خاصی از این بیماری با ۱۰۰ باکتری شروع می‌شود و هر باکتری در مدت نیم ساعت به دو قسمت تقسیم می‌شود. اندازه هر توده باکتری بعد از t ساعت از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$p(t)=۱۰۰\times ۲^{۲t} \qquad (۰\leq t\leq ۱۶)$$

با فرض اینکه هیچ کدام از باکتری‌ها از بین نروند، تعداد باکتری‌ها در یک توده پس از ۳ ساعت برابر است با :

$$p(۳)=۱۰۰\times ۲^{۶}=۶۴۰۰$$

تابع لگاریتمی :

ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین‌لرزه است که میزان انرژی آزادشده در زلزله را نشان می‌دهد. اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شدهٔ آن زلزله برابر E در واحد اِرگ (Erg) است که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$\log E=۱۱/۸+۱/۵M$$

انرژی یک زلزلهٔ ۸ ریشتری تقریباً برابر با انرژی انفجار یک میلیارد تن مادهٔ انفجاری TNT است.

مثال : روز پنجم دی ماه ۱۳۸۲ زلزله‌ای به شدت ۶/۶ ریشتر، شهر بم و مناطق اطراف آن را در شرق استان کرمان لرزاند. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله چقدر بوده است؟

$$\log E=۱۱/۸+۱/۵M\rightarrow$$

$$\log E=۱۱/۸+۱/۵\ (۶/۶)$$

$$\rightarrow \log E=۲۱/۷ \rightarrow E=۱۰^{۲۱/۷}\ Erg$$

کار در کلاس

زلزله ۳۱ خرداد سال ۱۳۶۹ رودبار ــ منجیل به بزرگی ۷/۴ ریشتر در ساعت سی دقیقهٔ بامداد رخ داد. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله را محاسبه کنید.

$$\log E=۱۱/۸+۱/۵M$$

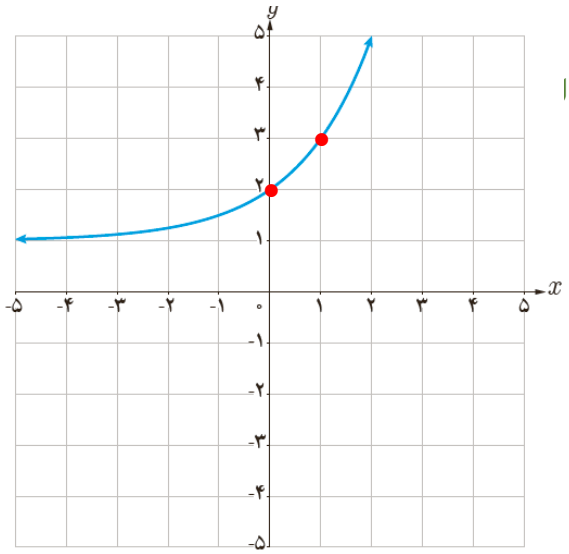
$$\rightarrow \log E=۱۱/۸+۱/۵(۷/۴)$$

$$\rightarrow \log E=۲۲/۹ \rightarrow E=۱۰^{۲۲/۹}\ Erg$$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

تمرین

۱ در دستگاه مختصات روبه‌رو نمودار تابع با ضابطهٔ $y=a+۲^{(x-b)}$ رسم شده است.
a و b را به‌دست آورید.



راه اول : نقاط کلید در این نمودار را مشخص می کنیم که عباتند از

$(۰,۲)$ و $(۱,۳)$ در نتیجه با جایگذاری در ضابطهٔ تابع داریم :

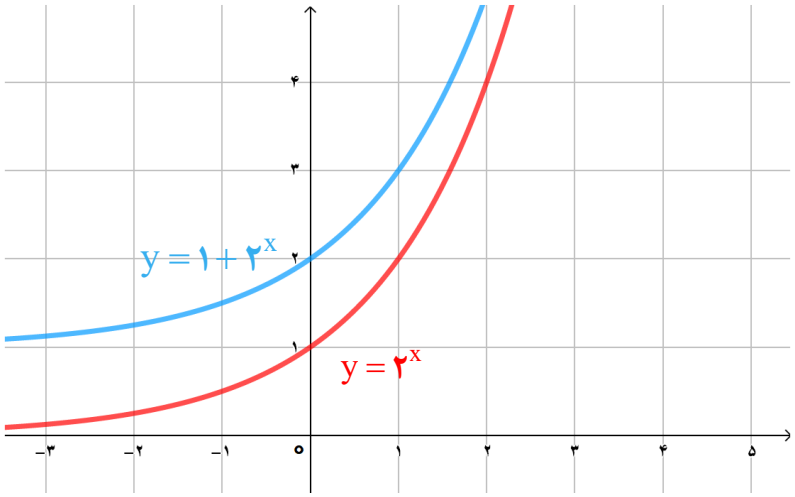
$$\begin{cases} ۲=a+۲^{(۰-b)} \rightarrow ۲=a+۲^{-b} \\ ۳=a+۲^{(۱-b)} \rightarrow ۳=a+۲^{(۱-b)} \end{cases}$$

$$\rightarrow ۱=۲^{(۱-b)}-۲^{-b} \rightarrow ۱=۲\times ۲^{-b}-۲^{-b} \rightarrow ۱=۲^{-b}(۲-۱)$$

$$\rightarrow ۲^{-b}=۱ \rightarrow \frac{۱}{۲^{b}}=۱ \rightarrow ۲^{b}=۱ \rightarrow b=۰$$

$$\rightarrow ۲=a+۲^{۰} \rightarrow a=۱$$

راه دوم : نمودار $y=۲^{x}$ را در نظر می گیریم اگر این نمودار با توجه به انتقال به اندازهٔ ۱ واحد به سمت بالا روی محور عرض ها انتقال دهیم نمودار داده شده به دست می آید. بنا براین با مقایسه معلوم می شود که :



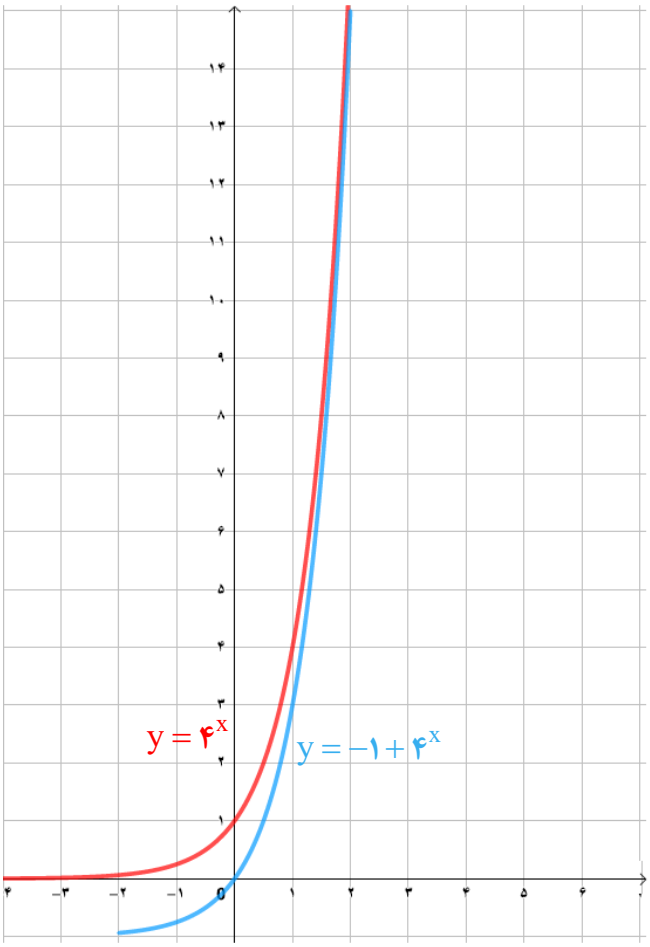
$$\left.\begin{matrix} y=۱+۲^{x} \\ y=a+۲^{(x-b)} \end{matrix}\right\} \rightarrow a=۱\ ,\ b=۰$$

۲ فرض می‌کنیم $g(x)=۴^{x}+۲$. الف) $g(-۱)$ را به‌دست آورید. ب) اگر $g(x)=۶۶$، مقدار x چقدر است؟

$$g(-۱)=۴^{(-۱)}+۲ \rightarrow g(-۱)=\frac{۱}{۴}+۲=\frac{۹}{۴}$$

$$۶۶=۴^{x}+۲ \rightarrow ۶۴=۴^{x} \rightarrow ۴^{۳}=۴^{x} \rightarrow x=۳$$

۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۴^x - ۱$ را در بازهٔ $[-۲, ۲]$ رسم کنید.

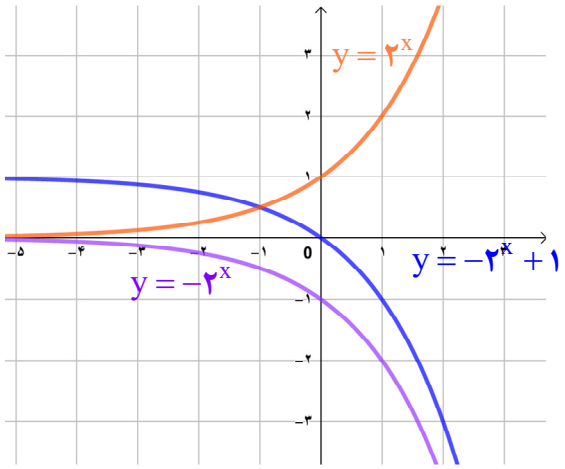


برای رسم از انتقال استفاده می کنیم کافی است نمودار $y = ۴^x$ را یک واحد روی محور عرض ها به سمت پایین انتقال دهیم. و بعد در بازه $[-۲, ۲]$ آن را رسم کنیم به این ترتیب داریم :

۴ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

به کمک انتقال و تقارن نسبت به محور طولها رسم می شود.

الف) $y = -۲^x + ۱$



ب) $y = -\log_۲(x - ۱)$