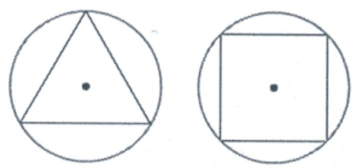
درس اوّل

فرایندهای حدی

فعالیت

در دایره‌های زیر به شعاع r یک مثلث متساوی‌الاضلاع و یک مربع به گونه‌ای رسم شده‌اند که رأس‌های آنها روی دایره واقع‌اند. چنین چند ضلعی‌هایی را محاطی می‌نامیم. واضح است که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع و مساحت مربع از مساحت دایره کمتر است.

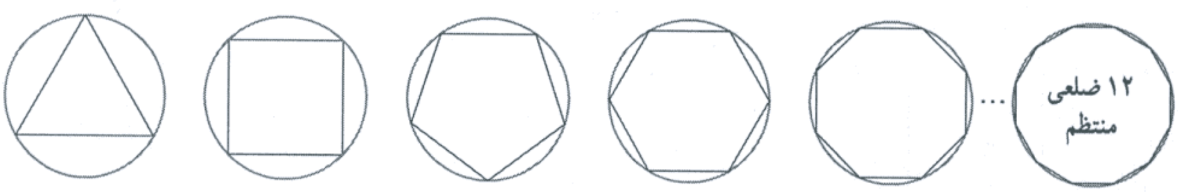


حدس می‌زنید مساحت کدام‌یک به مساحت دایره نزدیک‌تر است؟ مربع هرچه تعداد اضلاع چند ضلعی‌های منتظم محاطی بیشتر شوند، چه‌اتفاقی می‌افتد؟ مساحت آن چند ضلعی به مساحت دایره نزدیک‌تر می‌شود

در جدول زیر مساحت تعدادی از n ضلعی‌های منتظم محاطی به شعاع r (با دقت یک رقم اعشار) داده شده است.

برای نزدیک‌تر شدن مساحت چند ضلعی‌های منتظم محاطی به مساحت دایره چه می‌توان کرد؟ که تعداد اضلاع را زیاد کنیم آیا به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم مساحت چند ضلعی‌های منتظم را به مساحت دایره نزدیک کنیم؟ بله

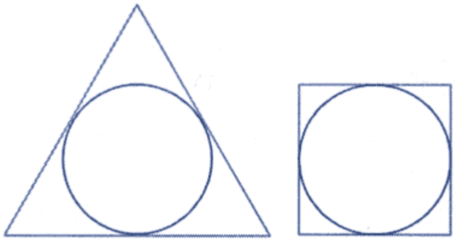
زیاد شدن تعداد اضلاع	→	۱۲	...	۷	۶	۵	۴	۳	چند ضلعی منتظم محاطی
نزدیک‌تر شدن مساحت چند ضلعی‌ها به مساحت	→	۳r^2	...	۲/۸r^2	۲/۶r^2	۲/۳۸r^2	۲r^2	۱/۳r^2	مساحت تقریبی



مساحت چند ضلعی‌های منتظم محاط در دایره را به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک‌تر کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع چند ضلعی را به مقدار کافی بزرگ اختیار کنیم. (به بیان دیگر با افزایش تعداد اضلاع، مساحت چند ضلعی‌ها به مساحت دایره نزدیک می‌شود).

کار در کلاس

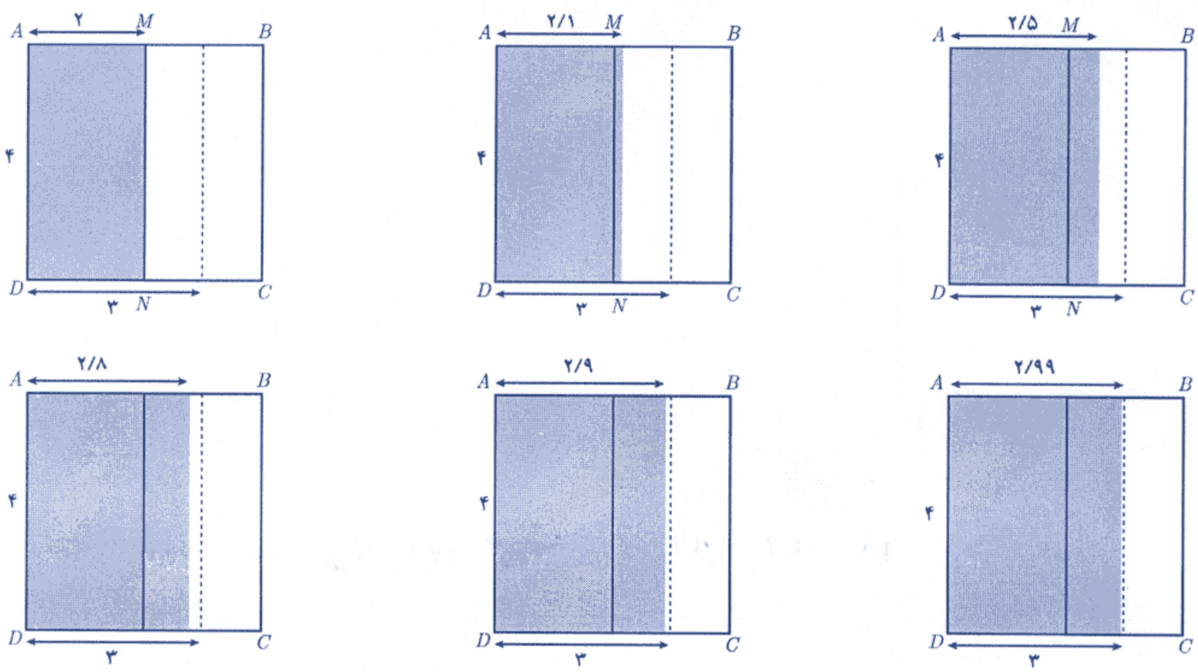
فرض کنید در فعالیت قبل برای دایره به شعاع r از چند ضلعی‌های منتظم محیطی (چند ضلعی که همهٔ اضلاع آن بر یک دایره مماس باشند) استفاده کنیم. نتیجه مشابه آنچه را در فعالیت قبل به‌دست آمد، دربارهٔ این چند ضلعی‌ها بیان کنید (محاسبه مساحت‌ها لازم نیست).



فعالیت

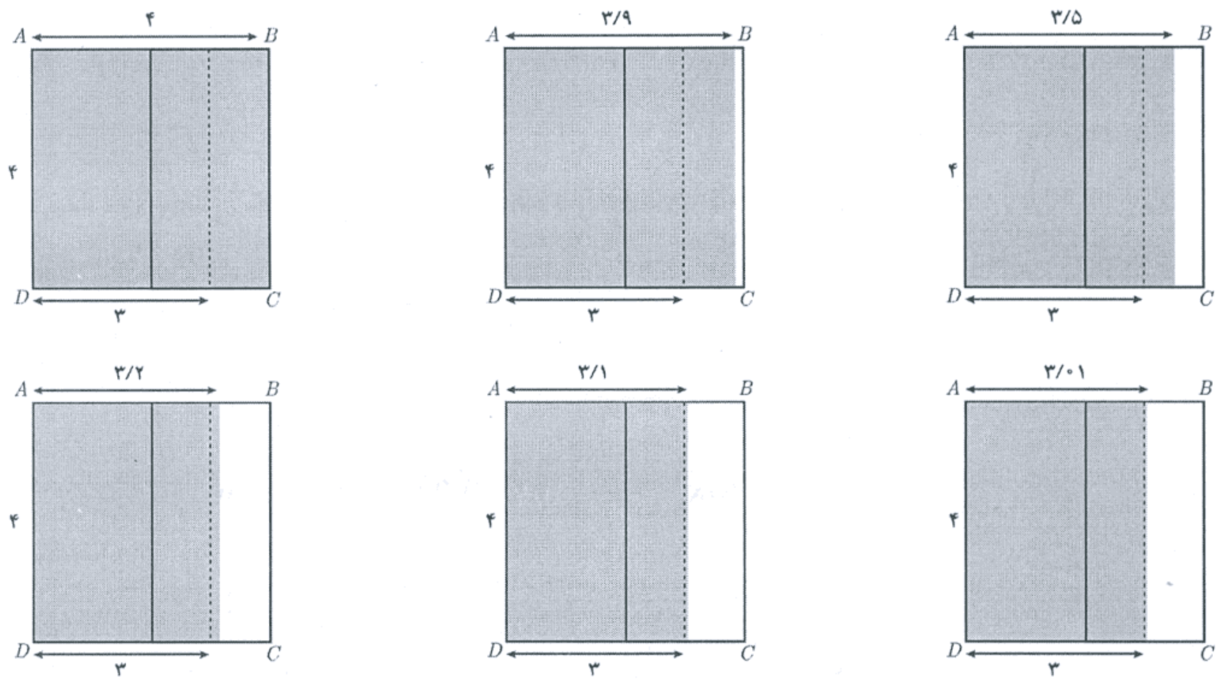
مربع $ABCD$ به ضلع ۴ واحد را در نظر می‌گیریم. پاره‌خط MN وسط AB را به وسط DC وصل می‌کند. مساحت مستطیل $AMND$ چقدر است؟ ۸ به موازات MN پاره‌خط‌هایی رسم می‌کنیم که مانند شکل، نقاط انتهایی آنها روی AB و CD است. مساحت مستطیل‌های جدید پدید آمده، در جدول داده شده است. جاهای خالی را پر کنید (طول مستطیل‌ها برابر ۴ واحد است).

عرض مستطیل‌ها با مقادیر کمتر از ۳، به ۳ نزدیک می‌شود.	۲/۹۹	۲/۹	۲/۸	۲/۷	۲/۵	۲/۱	۲	عرض مستطیل‌ها
مساحت به عدد ۱۲... نزدیک می‌شود.	۱۱/۹۶	۱۱/۶	۱۱/۲	۱۰/۸	۱۰	۸/۴	۸	مساحت مستطیل رنگی



مشابه همین کار را با شروع از پاره‌خط BC انجام می‌دهیم. پاره‌خط‌هایی که به موازات BC رسم می‌شوند، همانند شکل زیر، مستطیل‌های جدیدی را می‌سازند. جدول را کامل کنید.

عرض مستطیل‌ها با مقادیر بیشتر از ۳، به ۳ نزدیک می‌شود.	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲	۳/۵	۳/۹	۴	عرض مستطیل‌ها
مساحت به عدد ..۱۲.. نزدیک می‌شود.	۱۲,۰۴	۱۲,۴	۱۲/۸	۱۴	۱۵/۶	۱۶	مساحت مستطیل رنگی



اگر طول مستطیل‌ها را ۴ و عرض آنها را x در نظر بگیریم، مساحت مستطیل‌ها را می‌توان به‌صورت تابع $f(x)=4x$ نمایش داد. با این تفاوت که در حالت اول x، با مقادیر کمتر از عدد ۳، به سمت عدد ۳ نزدیک می‌شود و در حالت دوم x، با مقادیر بیشتر از عدد ۳ به سمت عدد ۳ نزدیک می‌شود. این دو وضعیت را به ترتیب با نمادهای $x \to 3^-$ و $x \to 3^+$ نمایش می‌دهیم. خلاصهٔ دو جدول قبل در جدول زیر ارائه شده است:

x از سمت راست به ۳ نزدیک می‌شود ← | → x از سمت چپ به ۳ نزدیک می‌شود

۴	۳/۹	۳/۵	۳/۲	۳/۱	۳/۰۱	→۳←	۲/۹۹	۲/۹	۲/۸	۲/۵	۲/۱	۲	x
۱۶	۱۵/۶	۱۴	۱۲,۸	۱۲,۴	۱۲,۰۴	→۱۲←	۱۱,۹۶	۱۱,۶	۱۱,۲	۱۰	۸/۴	۸	$f(x)$

$f(x)$ به ۱۲ نزدیک می‌شود ← | → $f(x)$ به ۱۲ نزدیک می‌شود

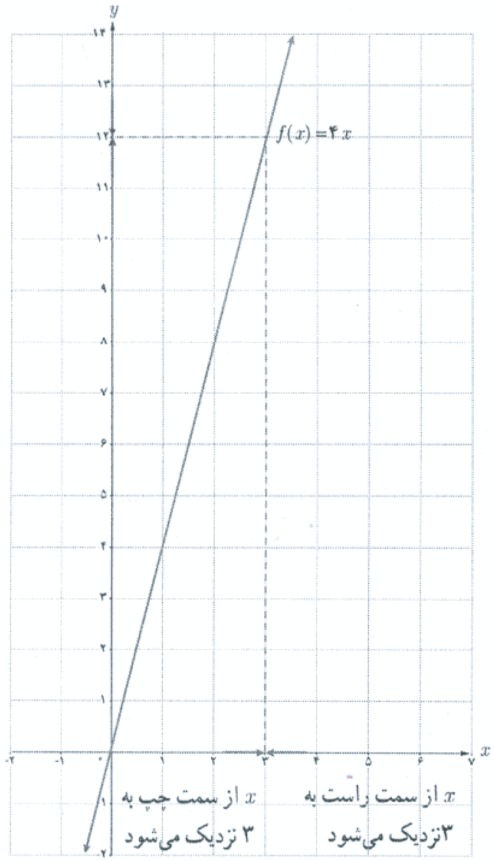
وقتی $x\to3^+$ گوییم x از راست به ۳ نزدیک می‌شود و وقتی $x\to3^-$ می‌گوییم x از چپ به ۳ نزدیک می‌شود. در حقیقت رفتار تابع در نزدیکی نقطه ۳ بررسی شده است.

دیدیم که وقتی $x\to3^-$ مساحت مستطیل‌ها یا همان مقادیر $f(x)$ به مقدار دلخواه به ۱۲ نزدیک می‌شود. در این حالت می‌گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x از چپ به ۳ نزدیک می‌شود، برابر ۱۲ است و می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=12$

به طریق مشابه وقتی $x\to3^+$ باز هم مساحت مستطیل‌ها به مقدار دلخواه به ۱۲ نزدیک می‌شود. در این حالت هم می‌گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x از سمت راست به ۳ نزدیک می‌شود، برابر ۱۲ است و می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=12$

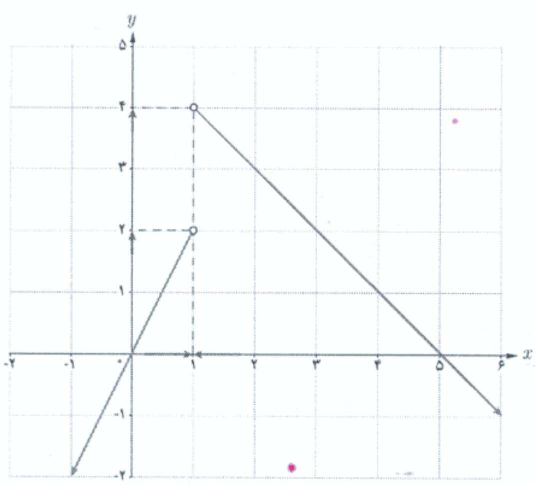
اگر حد راست و حد چپ یک تابع در یک نقطه، موجود و برابر باشند، تابع در آن نقطه حد دارد. در این فعالیت حد راست و حد چپ تابع وقتی x به ۳ نزدیک می‌شود، موجود و برابر ۱۲ است. به‌طور خلاصه می‌نویسیم :

$\lim\limits_{x\to3} f(x)=12$



مثال : نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}2x & x<1\\ -x+5 & x>1\end{cases}$ رسم شده است.

جدول صفحهٔ بعد را کامل کنید و با استفاده از آن و به کمک نمودار $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ را محاسبه کنید.



حل فصل ۶ ریاضی (۲) پایه یازدهم
به کوشش گروه ریاضی استان خوزستان

x از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود ← | → x از سمت راست به ۱ نزدیک می‌شود

x	۰	۰/۲	۰/۵	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	$\to$۱$\leftarrow$		۱/۰۱	۱/۱	۱/۲	۱/۵	۱/۸	۲
$f(x)$	۰	۰/۴	۱	۱/۶	۱/۸	۱/۹۸	$\to$۲	۴$\leftarrow$	۳/۹۹	۳/۹	۳/۸	۳/۵	۳/۲	۳

$f(x)$ به ۲ نزدیک می‌شود ← | → $f(x)$ به ۴ نزدیک می‌شود

به عبارت دیگر حد تابع وقتی x از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود، برابر ۲ است؛ یعنی : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$ و حد تابع وقتی x از سمت راست به ۱ نزدیک می‌شود، برابر ۴ است یعنی : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=4$. در این مثال حد راست و حد چپ هر دو وجود دارند؛ ولی باهم برابر نیستند. تابع در نقطهٔ $x=1$ حد ندارد، ولی حدهای یک‌طرفه (حد راست و حد چپ) وجود دارند.

فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند $(a\,,x_\circ)$ تعریف شده باشد. حد چپ f در $x_\circ$ برابر عدد l است؛ هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت چپ به قدر کافی به $x_\circ$ نزدیک شود، در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to x_\circ^-} f(x)=l$

به طریق مشابه فرض کنیم f در بازه‌ای مانند $(x_\circ\,,b)$ تعریف شده باشد. حد راست f در $x_\circ$ برابر عدد l است؛ هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت راست به قدر کافی به $x_\circ$ نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to x_\circ^+} f(x)=l$

فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند $(a$ و $b)$ شامل نقطهٔ $x_\circ$ (به جز احتمالاً در خود $x_\circ$) تعریف شده باشد. حد تابع f در $x_\circ$ برابر عدد l است؛ هرگاه مقدار تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به l نزدیک کرد؛ به شرط آنکه x (از دو طرف راست و چپ) به قدر کافی به $x_\circ$ نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x)=l$$

$\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=l$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to x_\circ^+} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to x_\circ^-} f(x)=l$.

حل فصل ۶ ریاضی (۲) پایه یازدهم
به کوشش گروه ریاضی استان خوزستان

بسیاری از پدیده‌های طبیعی قابل ارائه در قالب یک تابع‌اند. در بسیاری از مواقع لازم است رفتار یک تابع را در نزدیکی یک نقطه بررسی کنیم. در فعالیت زیر رفتار سه تابع را در نزدیکی یک نقطه بررسی خواهیم کرد تا با مفهوم حد بهتر آشنا شویم.

فعالیت

نمودار توابع زیر رسم شده‌اند :

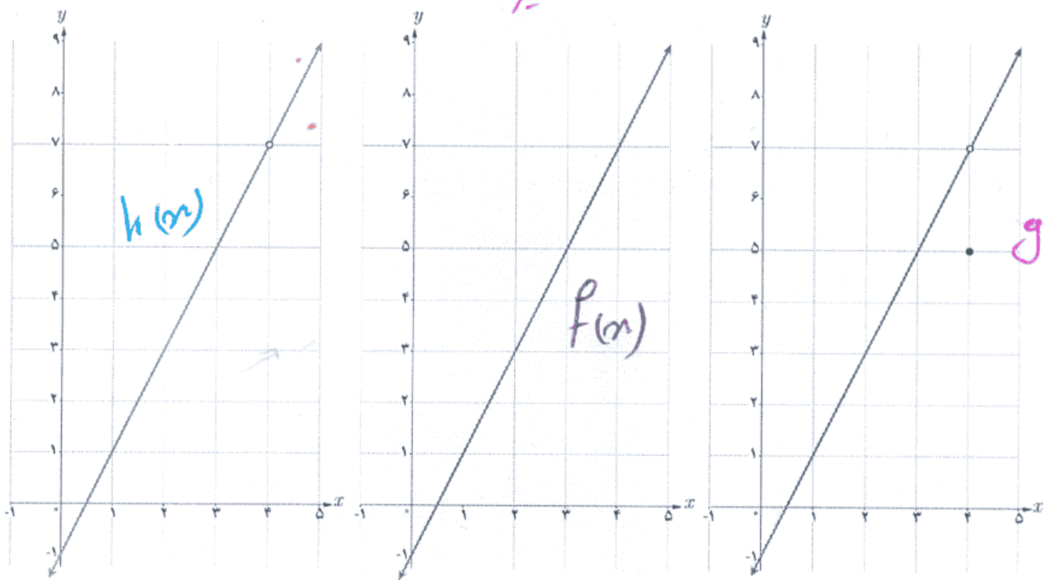
$f(x)=۲x-۱$

$g(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x\neq ۴ \\ ۵ & x=۴ \end{cases}$

$h(x)=۲x-۱ \quad (x\neq ۴)$

$D_f = R_f = \mathbb{R}$ $D_g=\mathbb{R}$ $R_g=\mathbb{R}-\{۷\}$ $D_h=\mathbb{R}-\{۴\}$ $R_h=\mathbb{R}-\{۷\}$

هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ آیا این سه تابع با یکدیگر برابرند؟ خیر دامنه و برد این سه تابع را معلوم کنید.



می‌خواهیم رفتار این سه تابع را در نزدیکی نقطهٔ ۴ بررسی کنیم. ابتدا جدول را کامل کنید.

x از سمت چپ به ۴ نزدیک می‌شود ← | → x از سمت راست به ۴ نزدیک می‌شود

x	۳	۳/۵	۳/۸	۳/۹	۳/۹۹	→ ۴ ←	۴/۰۱	۴/۱	۴/۲	۴/۵	۵
$f(x)$	۵	۶	۶/۶	۶/۸	۶/۹۸	→ ۷ ←	۷/۰۲	۷/۲	۷/۴	۸	۹
$g(x)$	۵	۶	۶/۶	۶/۸	۶/۹۸	→ ۵ ←	۷/۰۲	۷/۲	۷/۴	۸	۹
$h(x)$	۵	۶	۶/۶	۶/۸	۶/۹۸	→ ← تعریف نشده	۷/۰۲	۷/۲	۷/۴	۸	۹

مقادیر f ، g و h را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم به عدد ۷ نزدیک کنیم؛ به شرط آنکه مقادیر x به قدر کافی به عدد ۴ نزدیک شود.

حد هر سه تابع وقتی که $x\to ۴$ (بخوانید x به سمت ۴ میل می‌کند) برابر ۷ است. به عبارت دیگر :

$\lim_{x\to ۴} f(x) = ۷$ $\quad \lim_{x\to ۴} g(x) = ۷$ $\quad \lim_{x\to ۴} h(x) = ۷$

در فعالیت قبل مشاهده کردید که سه تابع f، g و h در نزدیکی نقطهٔ $x=۴$ رفتار یکسانی دارند. به عبارت دیگر حد آنها وقتی x به ۴ نزدیک می‌شود، برابر ۷ است. با این حال دربارهٔ مقادیر این سه تابع در نقطه ۴ داریم :

الف) $h(۴)$ وجود ندارد (h در ۴ تعریف نشده است).

ب) $g(۴)$ موجود است؛ ولی $\lim\limits_{x\to ۴} g(x) \neq g(۴)$.

پ) $f(۴)=۷$ و $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=۷$.

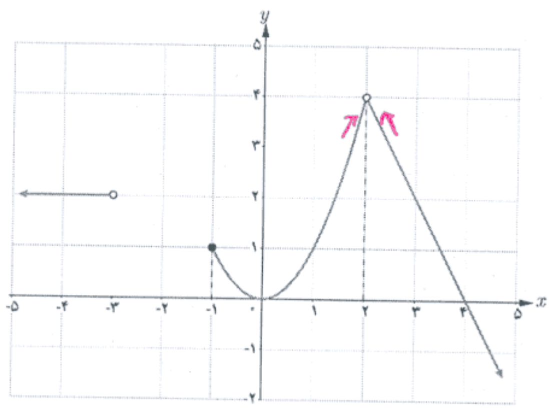
به‌طور کلی اگر دربارهٔ تابعی مانند f داشته باشیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ ، آنگاه دربارهٔ $f(a)$ یکی از حالت‌های زیر را داریم :

الف) $f(a)$ موجود نیست.

ب) $f(a)$ موجود است؛ ولی $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$.

پ) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

مثال ۱ : در شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} -۲x+۸ & x>۲ \\ x^۲ & -۱\leq x<۲ \\ ۲ & x<-۳ \end{cases}$ رسم شده‌است.



الف) $f(۲)$ تعریف نشده است؛ ولی $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۴$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)=۱$ ولی $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ وجود ندارد.

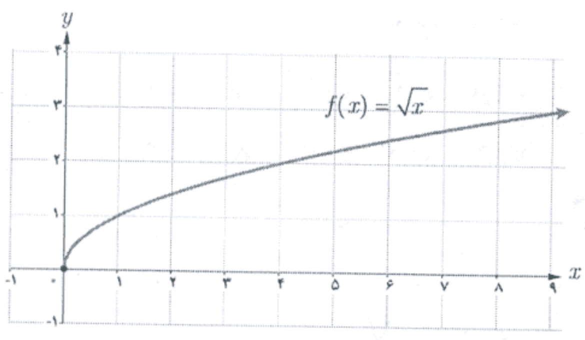
پ) $f(-۱)=۱$.

ت) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۰$ و $f(۰)=۰$.

ث) $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=۰$ و $f(۴)=۰$.

ج) $f(-۳)$ و $\lim\limits_{x\to -۳^+} f(x)$ وجود ندارند؛ ولی $\lim\limits_{x\to -۳^-} f(x)=۲$.

مثال ۲ : برای تابع $g(x)=\sqrt{x}$ داریم :



الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \sqrt{x}=۰$.

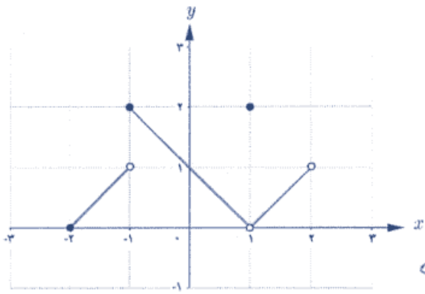
ب) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \sqrt{x}$ وجود ندارد؛ زیرا تابع برای $x<۰$ تعریف نشده است.

پ) $\lim\limits_{x\to ۰} \sqrt{x}$ وجود ندارد.

حل فصل ۶ ریاضی (۲) پایه یازدهم
به کوشش گروه ریاضی استان خوزستان

تمرین

۱) برای تابع f که نمودار آن داده شده، کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟



الف) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ نادرست

ب) $f(1)=2$ درست

پ) $f(2)=1$ نادرست

ت) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=0$ درست

ث) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$ نادرست

ج) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ درست

چ) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ وجود ندارد. درست

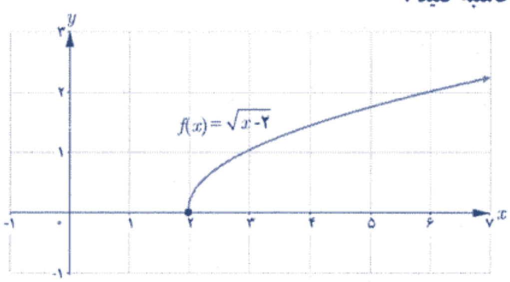
ح) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ وجود ندارد. درست

۲) مثالی از یک تابع، همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطهٔ ۲ مساوی ۱- باشد.

۳) تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطهٔ ۳ حد نداشته باشد. $f(3)=1$.

۴) تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطهٔ ۲ تعریف نشده باشد. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$.

۵) دربارهٔ تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x-2}$ موارد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید:



الف) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

ت) $f(2)$

۶) تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

آیا f در نقطه صفر حد دارد؟ آیا $f(0)$ موجود است؟

۷) توابع زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:

$f(x)=2x+1$ ، $g(x)=2x+1 \quad (x\neq 2)$ ، $h(x)=\begin{cases} 2x+1 & x\neq 2 \\ 3 & x=2 \end{cases}$

الف) مقادیر $f(2)$ ، $h(2)$ و $g(2)$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

ب) حدهای زیر را محاسبه کنید:

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

۸) آیا حد تابع زیر در $x=2$ موجود است؟

$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & x>2 \\ -2 & x=2 \\ x-3 & x<2 \end{cases}$$

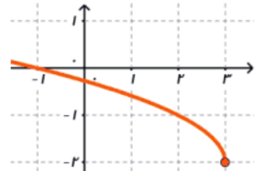
۹) نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x>0 \\ -2x-2 & x\leq 0 \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را ــ در صورت وجود ــ بیابید.

۱۰) اگر $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ ، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ موجود است؟

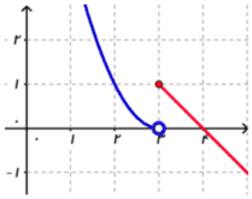
حل فصل ۶ ریاضی (۲) پایه یازدهم
به کوشش گروه ریاضی استان خوزستان

تمرین فصل ۶ – صفحه ۱۲۷

تمرین ۲: $f(x)=\sqrt{۳-x}-۲$

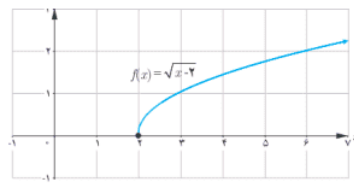


تمرین ۳ : $f(x)=\begin{cases}(x-۳)^۲ & x<۳\\ ۴-x & x\geq ۳\end{cases}$



تمرین ۴ : $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x<۲\\ ۶-x & x>۲\end{cases}$

تمرین ۵ :



$f(x)=\sqrt{x-۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ وجود ندارد

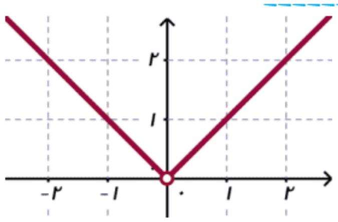
الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\circ$

ت) $f(۲)=\sqrt{۲-۲}=\circ$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد

تمرین ۶ : $f(x)=\begin{cases}x & x>\circ\\ -x & x<\circ\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to\circ^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\circ^+} f(x)=\circ \Rightarrow \lim\limits_{x\to\circ} f(x)=\circ$



تمرین ۷ : $h(x)=\begin{cases}۲x+۱ & x\neq ۲\\ ۳ & x=۲\end{cases}$ $\quad g(x)=۲x+۱ \quad (x\neq ۲) \quad f(x)=۲x+۱$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۵$ – $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=۵$ – $\lim\limits_{x\to ۲} h(x)=۵$

الف) $f(۲)=۲(۲)+۱=۴+۱=۵$ – $g(۲)$ وجود ندارد – $h(۲)=۳$

تمرین ۸ : $f(x)=\begin{cases}-x+۲ & x>۲\\ -۲ & x=۲\\ x-۳ & x<۲\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=-۲+۲=\circ \quad , \quad \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۲-۳=-۱ \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد

تمرین ۹ : $f(x)=\begin{cases}x^۲+۲ & x>\circ\\ -۲x-۲ & x\leq\circ\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to\circ^+} f(x)=(\circ)^۲+۲=۲ \quad , \quad \lim\limits_{x\to\circ^-} f(x)=-۲(\circ)-۲=-۲ \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\circ} f(x)$ وجود ندارد

تمرین ۱۰ : $f(x)=\frac{|x|}{x} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{x}{x} & x>\circ\\ \frac{-x}{x} & x<\circ\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}۱ & x>\circ\\ -۱ & x<\circ\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to\circ^+} f(x)=۱ \quad , \quad \lim\limits_{x\to\circ^-} f(x)=-۱ \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\circ} f(x)$ وجود ندارد