درس دوم

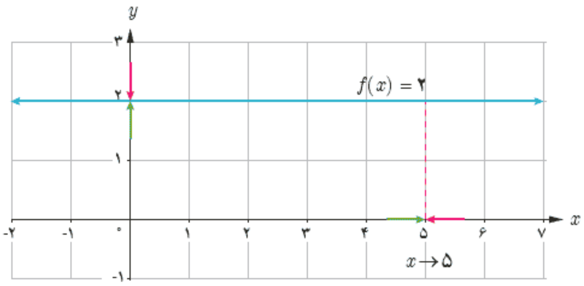
محاسبه حد توابع

یکی از عواملی که به مطالعهٔ دقیق‌تر یک تابع می‌تواند کمک کند، محاسبهٔ حد آن تابع است. برای محاسبهٔ حد یک تابع قواعد و دستورهایی وجود دارد. در این درس برخی از این قواعد به کمک شهود و با ذکر مثال توضیح داده می‌شوند.

۱ــ حد تابع ثابت

حد تابع ثابت در هر نقطه برابر مقدار تابع ثابت است.

به‌طور مثال : $\lim\limits_{x\to ۵} f(x) = ۲$

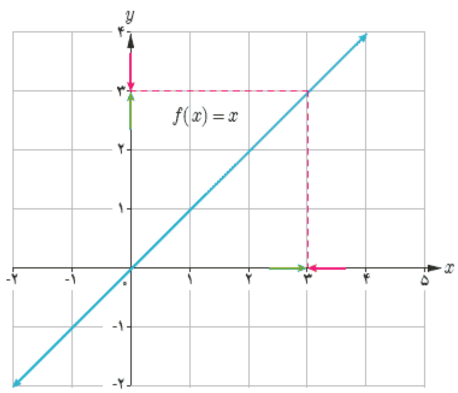


به‌طور کلی اگر c و a دو عدد حقیقی باشند : $\lim\limits_{x\to a} c = c$

۲ــ حد تابع همانی

اگر $f(x)=x$، آنگاه $\lim\limits_{x\to a} x = a$ $(a\in \mathbb{R})$

به‌طور مثال : $\lim\limits_{x\to ۳} x = ۳$



کار در کلاس

حدهای زیر را حساب کنید :

$\lim\limits_{x\to ۰} x =$ ۰ .... $\lim\limits_{x\to ۷} ۵ =$ ۵ .... $\lim\limits_{x\to ۷} x =$ ۷ ....

$\lim\limits_{x\to -۷} x =$ ۷- .... $\lim\limits_{x\to ۴} (-۲) =$ ۲- .... $\lim\limits_{x\to ۵} ۰ =$ ۰ ....

تاکنون برای محاسبهٔ حدّ یک تابع بیشتر از جدول‌ها و نمودارها بهره بردیم. در اینجا به کمک چند قانون، حد توابع را محاسبه می‌کنیم.

۳ـ حد مجموع

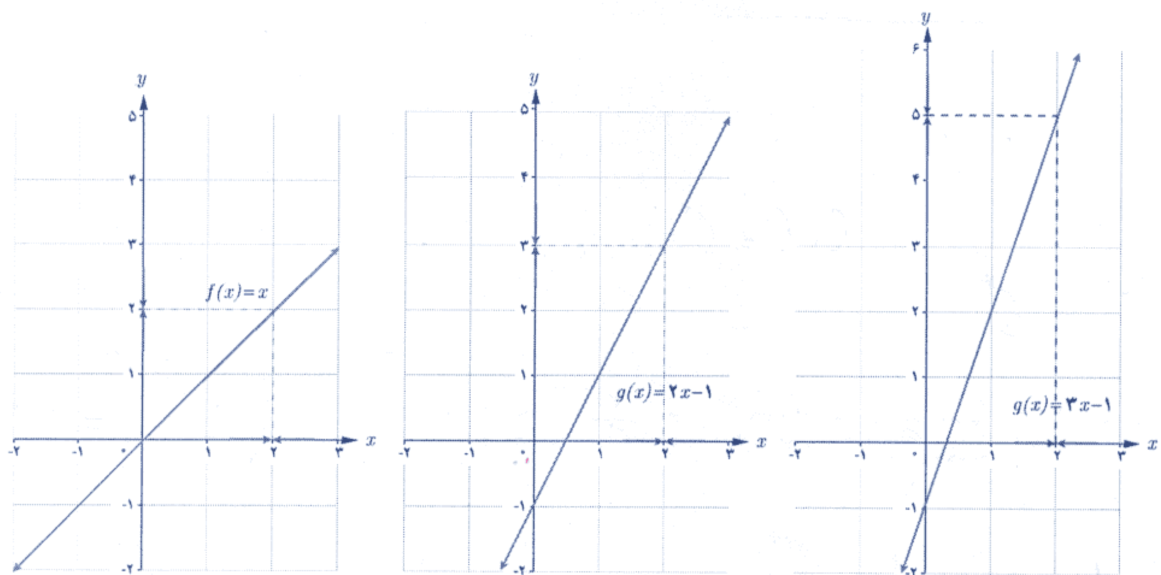
اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=l+m$$

به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد مجموع دو تابع در آن نقطه برابر مجموع حدهای آنها در همان نقطه است.

کار در کلاس

اگر $f(x)=x$ و $g(x)=۲x-۱$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۲}(f(x)+g(x))$ را به کمک قانون بالا محاسبه کنید. جاهای خالی را پر کنید و به کمک نمودارها قانون حد مجموع را نیز توضیح دهید.



$\lim\limits_{x\to ۲}f(x)=$ ۲ $\quad\quad \lim\limits_{x\to ۲}g(x)=$ ۳ $\quad\quad \lim\limits_{x\to ۲}(f(x)+g(x))=$ ۲ + ۳ = ۵

۴ـ حد تفاضل

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ آنگاه:

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)=l-m$$

به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد تفاضل دو تابع در آن نقطه برابر تفاضل حدهای آنها در همان نقطه است.

حل فصل ۶ ریاضی (۲) پایه یازدهم
به کوشش گروه ریاضی استان خوزستان

به‌طور مثال در «کار در کلاس» قبل داریم :

$$\lim_{x\to 2}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to 2}f(x)-\lim_{x\to 2}g(x)=2-3=-1$$

۵ــ حد حاصل ضرب

اگر $\lim_{x\to a}f(x)=l$ و $\lim_{x\to a}g(x)=m$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}(f(x).g(x))=\lim_{x\to a}f(x).\lim_{x\to a}g(x)=lm$$

به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد حاصل ضرب دو تابع در آن نقطه برابر حاصل‌ضرب حد آنها در همان نقطه است.

اگر c یک عدد ثابت و $\lim_{x\to a}f(x)=l$ آنگاه

$$\lim_{x\to a}(cf(x))=c\lim_{x\to a}f(x)=cl \qquad (a\in\mathbb{R})$$

کار در کلاس

الف) اگر $\lim_{x\to a}f(x)=l$ ، به کمک قانون حد حاصل ضرب هریک از حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to a}(f(x))^2=\lim_{x\to a}(f(x).f(x))= l\times l = l^2$$

$$\lim_{x\to a}(f(x))^3= l^3$$

ب) برای محاسبهٔ حد $\lim_{x\to 20}(\frac{2}{5}x-3)$ چگونه از قوانین ۲، ۴ و ۵ استفاده می‌کنید؟ توضیح دهید.

$$\lim_{x\to 20}(\tfrac{2}{5}x-3)=\lim_{x\to 20}\tfrac{2}{5}x-\lim_{x\to 20}3=\tfrac{2}{5}\lim_{x\to 20}x-\lim 3=\tfrac{2}{5}(20)-3=8-3=5$$

حد تفاضل — قانون ۵ — قانون ۲

در حالت کلی اگر $\lim_{x\to a}f(x)=l$ و $n\in\mathbb{N}$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}(f(x))^n=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^n=l^n$$

۶ــ حد تقسیم

اگر $\lim_{x\to a}f(x)=l$ و $\lim_{x\to a}g(x)=m$ که $m\neq 0$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{l}{m} \qquad (m\neq 0)$$

به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد تقسیم دو تابع در آن نقطه برابر تقسیم حدهای آنها در همان نقطه است؛ به شرط آنکه حد تابع مخرج در آن نقطه صفر نشود.

ب) $f(۱)=۳(۱)^۲+۲(۱)-۷=۳+۲-۷=-۲$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱} f(x)=f(۱)$

فعالیت

۱ برای تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۳x^۲+۲x-۷$ ،

الف) با تکمیل جاهای خالی $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}(۳x^۲+۲x-۷)$$

$$=\lim_{x\to ۱}(۳x^۲)+\lim_{x\to ۱}(۲x)-\lim_{x\to ۱}۷$$

$$=۳\lim_{x\to ۱}x^۲+۲\lim_{x\to ۱}x-۷=۳(۱)^۲+۲(۱)-۷=۳+۲-۷=-۲$$

اشتباه چاپی باید منفی باشد

ب) $f(۱)$ را محاسبه کنید و درستی تساوی $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=f(۱)$ را بررسی کنید.

پ) دربارهٔ تابع با ضابطهٔ $g(x)=\frac{۱}{۸}x^۴-x^۳+۵x-\frac{۱}{۲}$ ، درستی تساوی $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=g(۲)$ را بررسی کنید.

> به طور کلی حد یک تابع چندجمله‌ای در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است.

۲ الف) مطلوب است : $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۲x-۱}{x^۲-۴x+۱}$. جاهای خالی را کامل کنید.

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۲x-۱}{x^۲-۴x+۱}=\frac{\lim\limits_{x\to ۳}(۲x-۱)}{\lim\limits_{x\to ۳}(x^۲-۴x+۱)}=\frac{۲(۳)-۱}{(۳)^۲-۴(۳)+۱}=\frac{۵}{-۲}=-۲/۵$$

ب) حدهای مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۴+۲x^۳+۱}{۵x^۲+\frac{۲}{۳}}=\frac{\lim\limits_{x\to ۱}(x^۴+۲x^۳+۱)}{\lim\limits_{x\to ۱}(۵x^۲+\frac{۲}{۳})}=\frac{(۱)^۴+۲(۱)^۳+۱}{۵(۱)^۲+\frac{۲}{۳}}=\frac{۴}{\frac{۱۷}{۳}}=\frac{۱۲}{۱۷}$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{\frac{۳}{۵}x^۲-۲x+۱}=\frac{\lim\limits_{x\to ۱}(x^۲-۱)}{\lim\limits_{x\to ۱}(\frac{۳}{۵}x^۲-۲x+۱)}=\frac{(۱)^۲-۱}{\frac{۳}{۵}(۱)^۲-۲(۱)+۱}=\frac{۰}{\frac{-۲}{۵}}=۰$$

> به‌طور کلی اگر $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ یک تابع گویا باشد که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای هستند، برای محاسبهٔ حد $f(x)$ در نقطه‌ای مانند a کافی است که حد $P(x)$ را بر حد $Q(x)$ در آن نقطه تقسیم کنیم؛ به شرط آنکه $\lim\limits_{x\to a}Q(x)\neq ۰$

> اگر در محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای‌اند، داشته باشیم : $P(a)=Q(a)=۰$ دیگر با قانون اخیر نمی‌توان حد را محاسبه کرد. در این حالت به روش زیر عمل می کنیم :
>
> چون $P(a)=Q(a)=۰$ بنابراین $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیرند. ابتدا عبارت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را با تقسیم $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ ساده می‌کنیم و سپس امکان استفاده از قانون تقسیم حدها را بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۱) پ) $g(۲)=\frac{۱}{۸}(۲)^۴-(۲)^۳+۵(۲)-\frac{۱}{۲}=۲-۸+۱۰-\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۲}$

$$\lim_{x\to ۲}g(x)=\lim_{x\to ۲}(\frac{۱}{۸}x^۴-x^۳+۵x-\frac{۱}{۲})=\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{۸}x^۴-\lim_{x\to ۲}x^۳+\lim_{x\to ۲}۵x-\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{۲}$$

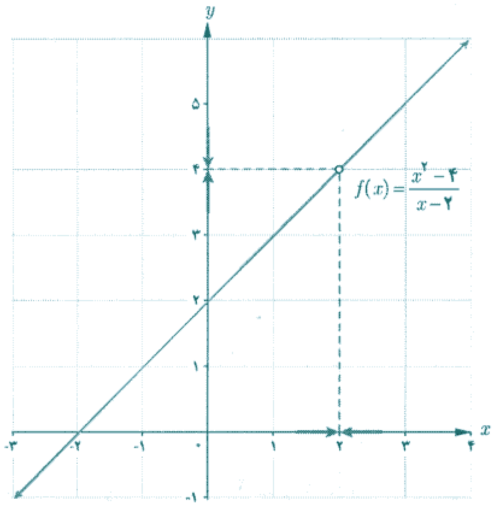
$$=\frac{۱}{۸}(\lim_{x\to ۲}x)^۴-(\lim_{x\to ۲}x)^۳+۵\lim_{x\to ۲}x-\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}(۲)^۴-(۲)^۳+۵(۲)-\frac{۱}{۲}=\frac{۷}{۲}$$

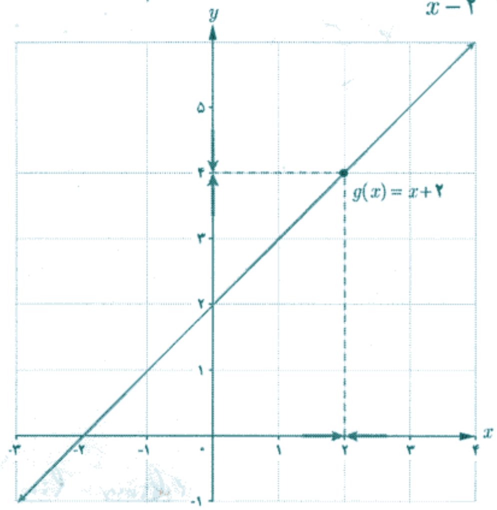
مثال : $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^۲-۴}{x-۲}$ را محاسبه کنید.

داریم : $\lim\limits_{x\to ۲}(x-۲)=\lim\limits_{x\to ۲}(x^۲-۴)=۰$،

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x+۲)(x-۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(x+۲)=۴$$

توجه داریم که وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود، $x\neq ۲$ پس $x-۲\neq ۰$ و صورت و مخرج کسر را می‌توانیم بر $x-۲$ تقسیم کنیم. در نمودارهای زیر توابع $f(x)=\dfrac{x^۲-۴}{x-۲}$ و $g(x)=x+۲$ رسم و حد آنها در $x=۲$ نمایش داده شده است.





دو تابع g و f برابر نیستند (چرا؟)؛ ولی حد آنها در $x=۲$ برابر است.

$D_f=\mathbb{R}-\{۲\}$

$D_g=\mathbb{R}$

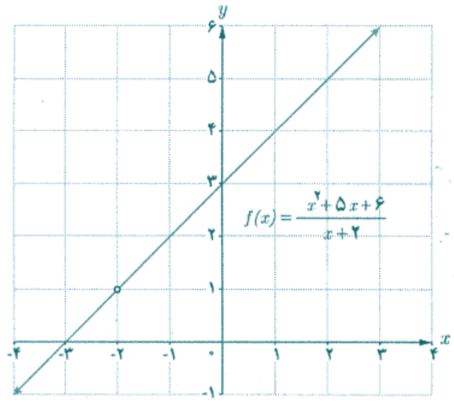
چون دامنه‌ی آنها برابر نیست

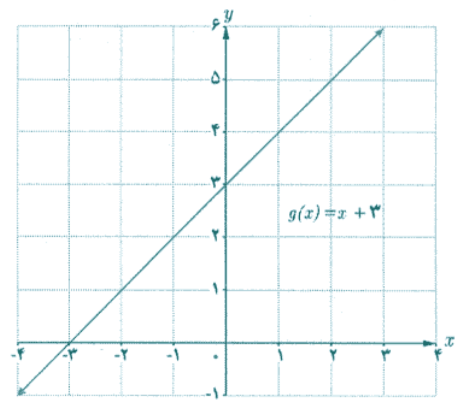
کار در کلاس

مانند مثال قبل حدها را محاسبه کنید؛ سپس به کمک نمودارها نیز محاسبهٔ حد را توضیح دهید.

الف) $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{x^۲+۵x+۶}{x+۲}$

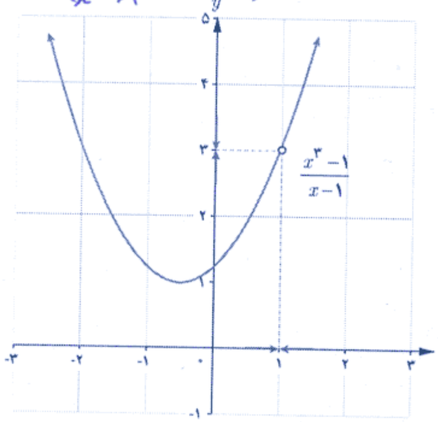
$=\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{(x+۲)(x+۳)}{(x+۲)}=\lim\limits_{x\to -۲}(x+۳)=-۲+۳=۱$

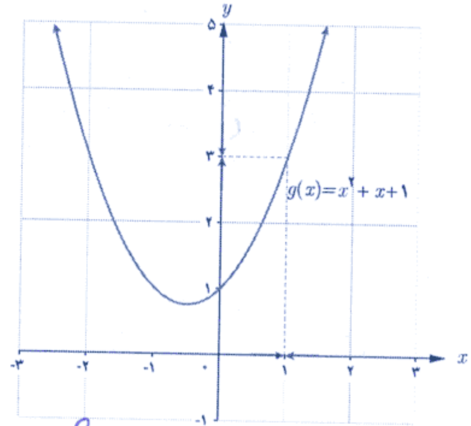




دو تابع f و g برابر نیستند. ولی حد آنها در $x=-۲$ برابر عدد ۱ است.

ب) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} x^2+x+1 = (1)^2+1+1 = 3$





دو تابع f و g برابر نیستند، ولی حد آنها در $x=1$ برابر عدد ۳ است.

۷ـ حد ریشه

اگر $\lim\limits_{x\to c}(ax+b)=l>0$ آنگاه:

$$\lim_{x\to c}\sqrt{ax+b}=\sqrt{\lim_{x\to c}ax+b}=\sqrt{l}$$

تذکر: تمام قوانینی که در این درس دربارهٔ حد مطرح شد، برای حد راست و حد چپ تابع نیز برقرار است.

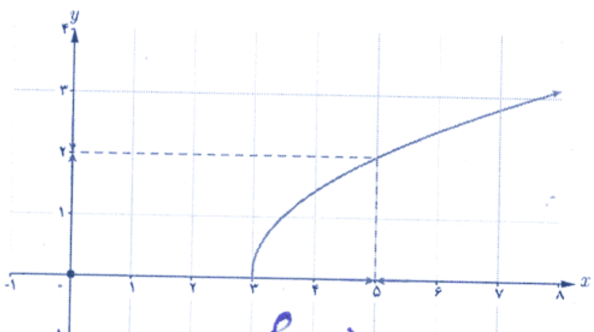
مثال: مطلوب است: $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{2x-6}$

حل: به کمک دستور فوق داریم:

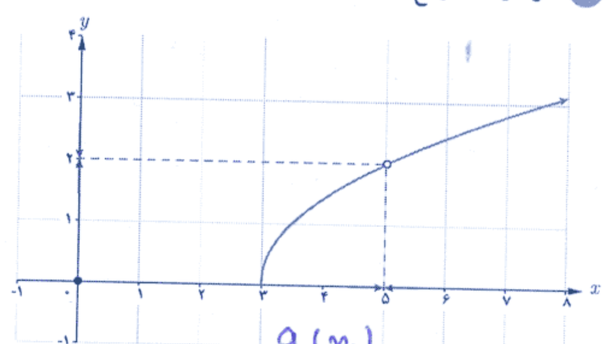
$$\lim_{x\to 5}(2x-6)=4>0 \Rightarrow \lim_{x\to 5}\sqrt{2x-6}=\sqrt{\lim_{x\to 5}(2x-6)}=\sqrt{4}=2$$

کار در کلاس

۱ نمودارهای توابع با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{2x-6}$ و $(x\neq 5)$ $g(x)=\sqrt{2x-6}$ رسم شده‌اند.



f(x)



g(x)

الف) هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟

ب) آیا $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 5} g(x)$ موجودند؟ بله

پ) کدام‌یک از حدهای زیر موجودند؟ آنها را محاسبه کنید.

$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{2x-6}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}(2x-6)}=\sqrt{0}=0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 3^-}\sqrt{2x-6}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 3^-}(2x-6)}=\sqrt{0}=0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{2x-6}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 3^+}(2x-6)}=\sqrt{0}=0$

۲ دربارهٔ تابع $h(x)=\dfrac{|x|}{x}$ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $h(x)=1$ نادرست

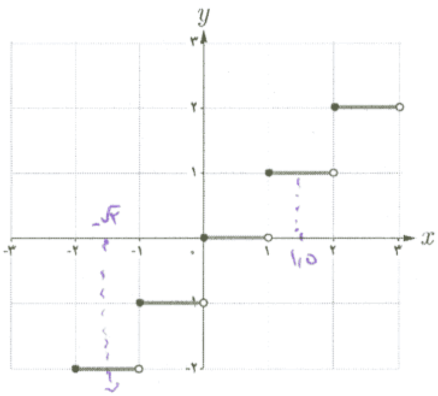
ب) $D_h=\mathbb{R}-\{0\}$ درست

پ) $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=1$ درست

ت) $h(0)=0$ نادرست

ث) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ وجود ندارد. درست

۳ با استفاده از نمودار تابع $f(x)=[x]$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.



الف) $\lim\limits_{x\to 2^+}[x]=2$

ب) $\lim\limits_{x\to 2^-}[x]=1$

پ) $\lim\limits_{x\to 2}[x]$ ⟸ وجود ندارد

ت) $\lim\limits_{x\to 1}[x]$ ⟸ وجود ندارد

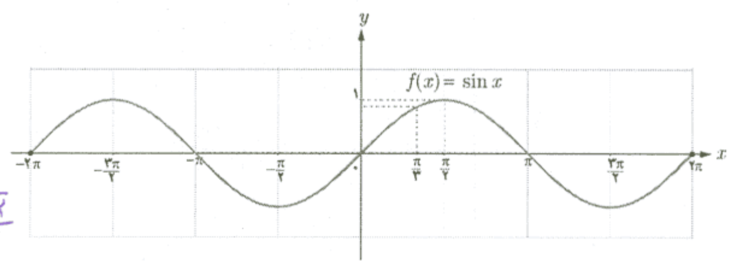
ث) $\lim\limits_{x\to 1/5}[x]=1$

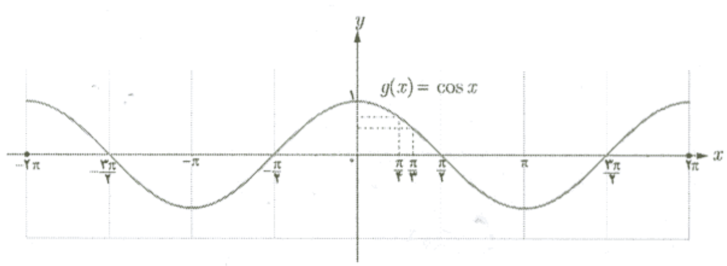
ج) $\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}}[x]=-2$

حدهای مثلثاتی

فعالیت

با استفاده از نمودار $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ حدهای زیر را بیابید.





الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\sin x=1$

ب) $\lim\limits_{x\to -\pi}\sin x=0$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}^-}\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ت) $\lim\limits_{x\to \pi^+}\sin x=0$

ث) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^-}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

چ) $\lim\limits_{x\to \frac{-\pi}{2}}\cos x=0$

ح) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}^+}\cos x=\dfrac{1}{2}$

حل فصل ۶ ریاضی (۲) پایه یازدهم

به کوشش گروه ریاضی استان خوزستان

به‌طور کلی داریم : $\lim\limits_{x\to\alpha}\sin x=\sin\alpha$ ، $\lim\limits_{x\to\alpha}\cos x=\cos\alpha$

مثال : به کمک دستورهایی که در این درس آموخته‌اید، حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{[x]}{x}$ ب) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{2+\sin x}$ پ) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{[x]-3}{x}$ ت) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}$

حل : الف) چون $\lim\limits_{x\to 2}[x]$ موجود نیست؛ پس $\lim\limits_{x\to 2}\frac{[x]}{x}$ موجود نیست.

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{2+\sin x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}{\lim\limits_{x\to 0}(2+\sin x)}=\frac{1}{2}$

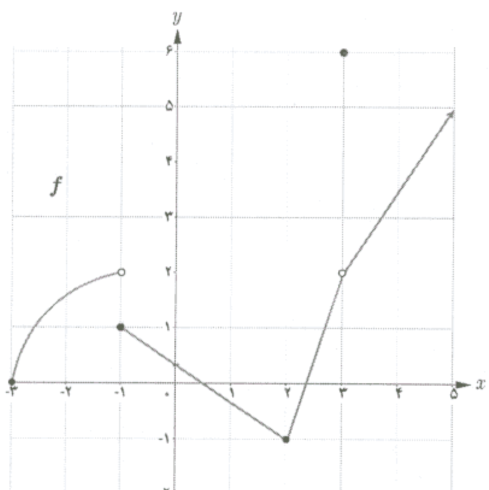
پ) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{[x]-3}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 1^+}(\overset{1}{[x]}-3)}{\lim\limits_{x\to 1^+}x}=\frac{-2}{1}=-2$

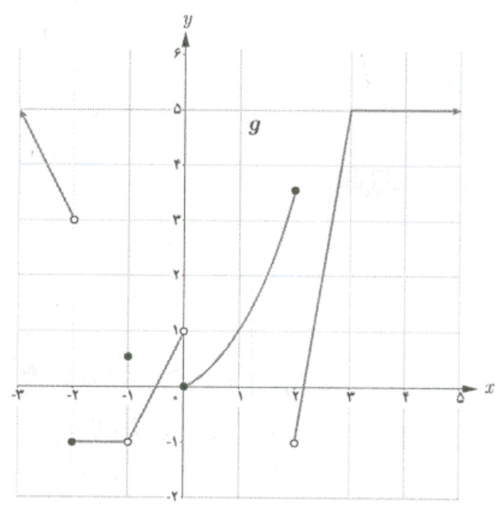
ت) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}=\frac{\lim\limits_{x\to \pi}(\sin x\cos x)}{\lim\limits_{x\to \pi}(1+\cos^2 x)}=\frac{0(-1)}{2}=0$

حل فصل ۶ ریاضی (۲) پایه یازدهم
به کوشش گروه ریاضی استان خوزستان

تمرین

۱ با استفاده از قوانین حد و نمودارهای f و g حدهای زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.





الف) $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ = ۲
ب) $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$ وجود ندارد
پ) $\lim\limits_{x\to 3}g(x)$ = ۵

ت) $\lim\limits_{x\to 3}(f(x)+g(x))$ = ۲+۵=۷
ث) $\lim\limits_{x\to -1}(f(x)+g(x))$ وجود ندارد
ج) $\lim\limits_{x\to 2}(2f(x)+5g(x))$ وجود ندارد

چ) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x))^4$ = $(\frac{1}{2})^4$ حدی
ح) $\lim\limits_{x\to 0}(g(x))^2$ = وجود ندارد
خ) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}$ وجود ندارد
د) $\lim\limits_{x\to 5}(f(x).g(x))$ = ۵×۵=۲۵

اشتباه تایپی

قبل

حداقل سه پرسش دیگر مانند موارد صفحهٔ ~~بعد~~ مطرح کنید و به آنها پاسخ دهید. دربارهٔ مسائل مطرح شده در کلاس گفت‌وگو کنید.

۲ دو تابع متفاوت مثال بزنید که در یک نقطه دارای حدهای برابر باشند.

۳ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 7}(-3)$ — ب) $\lim\limits_{x\to 0}(-2x-7)$ — پ) $\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-4x+5)$

ت) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}$ — ث) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x^2-x}$ — ج) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$

چ) $\lim\limits_{x\to -2}[x]$ — ح) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}$ — خ) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+7}$

د) $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x}$ — ذ) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+5}$ — ر) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-2}$

ز) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-2}{[x]+1}$ — ژ) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{3}}\cos x$ — س) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)$

ش) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x}{[x]}$ — ص) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}$ — ض) $\lim\limits_{x\to 0}(x+[x])$

۴ اگر $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=3$ و $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 2}h(x)=-1$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2}\big(f(x)+h(x)\big)$ — ب) $\lim\limits_{x\to 2}\big(h(x)\big)^5$

پ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ — ت) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{f(x)}$

ث) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3f(x)}{g(x)-5h(x)}$ — ج) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{h(x)}$

۵ نمودار دو تابع $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x-3}$ و $g(x)=1$ را رسم کنید. آیا $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ موجود است؟ (چرا؟) $\lim\limits_{x\to 3}g(x)$ چطور؟ در چه نقاطی حد دو تابع با هم برابرند؟

۶ در هر یک از حالت‌های زیر دربارهٔ حد تابع $f+g$ چه می‌توان گفت؟

الف) اگر توابع f و g هیچ‌کدام در نقطه‌ای مانند a حد نداشته باشند.

ب) اگر تابع f در a حد داشته باشد ولی تابع g در a حد نداشته باشد.

۷ اگر m یک عدد صحیح باشد، حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to m^+}[x]$ — ب) $\lim\limits_{x\to m^-}[x]$ — پ) $\lim\limits_{x\to m}[x]$

به‌طور کلی تابع $f(x)=[x]$ در چه نقاطی حد دارد؟

تمرین فصل ۶ – صفحه ۱۳۶

تمرین ۲: $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2$ در نقطه $x=1$ حد برابر دارند. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} g(x)=1$

تمرین ۳:

الف) $\lim\limits_{x\to 7}(-3)=-3$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}(-2x-7)=-2(0)-7=-7$

پ) $\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-4x+5)=3(-1)^2-4(-1)+5=3+4+5=12$

ت) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}=\dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{3}{3+3}=\dfrac{1}{2}$

ث) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x^2-x}=\dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(2x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{1}{2(0)-1}=-1$

ج) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}=\dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x^2-2x+4)=(-2)^2-2(-2)+4=4+4+4=12$

چ) $\lim\limits_{x\to -2}[x]$ وجود ندارد

ح) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=\sqrt{0}=0$

خ) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+7}=\sqrt{2+7}=3$

د) $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x}$ وجود ندارد

ذ) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+5}=\sqrt{2+5}=\sqrt{7}$

ر) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-2}$ وجود ندارد

ز) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-2}{[x]+1}=\dfrac{3-2}{3+1}=\dfrac{1}{4}$

ژ) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{3}}\cos(x)=\cos(-\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{1}{2}$

س) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\big(\sin(x)+\cos(x)\big)=\sin(\dfrac{\pi}{4})+\cos(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

ش) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x}{[x]}=\dfrac{-2}{-2}=1$

ص) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^2(x)}{1-\sin(x)}=\dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^2(x)}{1-\sin(x)}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\big(1-\sin(x)\big)\big(1+\sin(x)\big)}{1-\sin(x)}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\big(1+\sin(x)\big)=1+\sin(\dfrac{\pi}{2})=1+1=2$

ض) $\lim\limits_{x\to 0}(x+[x])$ وجود ندارد

تمرین ۴: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$ ، $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to 2} h(x)=-1$

الف) $\lim\limits_{x\to 2}\big(f(x)+h(x)\big)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)+\lim\limits_{x\to 2} h(x)=3+0=3$

ب) $\lim\limits_{x\to 2}\big(h(x)\big)^5=\left(\lim\limits_{x\to 2} h(x)\right)^5=(-1)^5=-1$

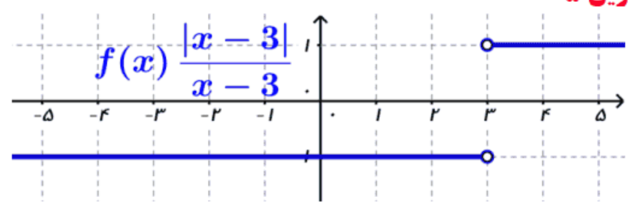
پ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ وجود ندارد

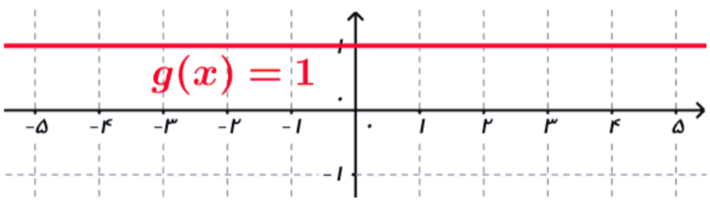
ت) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2} g(x)}{\lim\limits_{x\to 2} f(x)}=\dfrac{0}{3}=0$

پ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3f(x)}{g(x)-5h(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}\big(3f(x)\big)}{\lim\limits_{x\to 2}\big(g(x)-5h(x)\big)}=\dfrac{3\lim\limits_{x\to 2} f(x)}{\lim\limits_{x\to 2} g(x)-5\lim\limits_{x\to 2} h(x)}=\dfrac{3\times 3}{0-5(-1)}=\dfrac{9}{5}$

ت) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{h(x)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 2} h(x)}=\dfrac{1}{-1}=-1$

تمرین ۵:





$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = -۱$, $\lim_{x\to ۳^+} f(x) = ۱$ $\Rightarrow$ $\lim_{x\to ۳} f(x)$ وجود ندارد

$\lim_{x\to ۳} g(x) = ۱$

در تمام نقاط بازه $[۳,+\infty)$ دو تابع با هم برابرند.

تمرین ۶: الف) حد $f+g$ تابع وجود ندارد ب) حد $f+g$ تابع وجود ندارد

تمرین ۷:

الف) $\lim_{x\to m^+}[x] = m$ ب) $\lim_{x\to m^-}[x] = m-۱$ پ) $\lim_{x\to m}[x]$ وجود ندارد

در تمام نقاط $x \notin \mathbb{Z}$ تابع $f(x)=[x]$ حد دارد