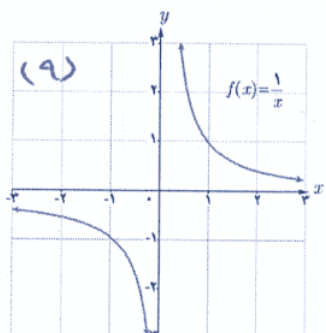
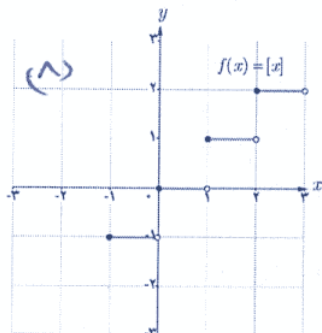
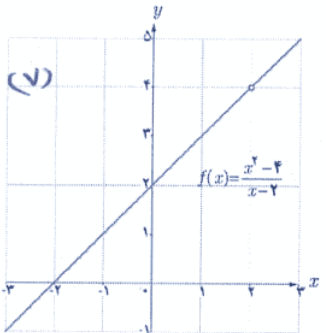
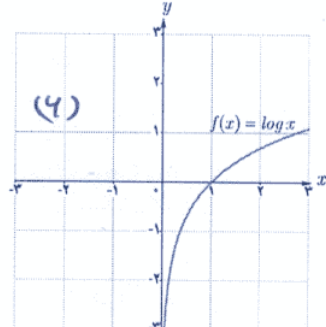
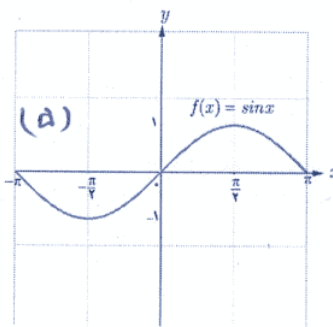
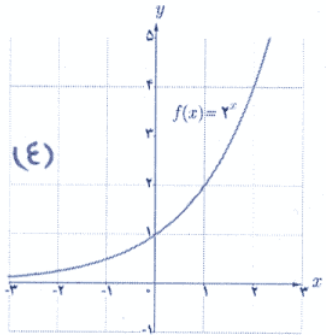
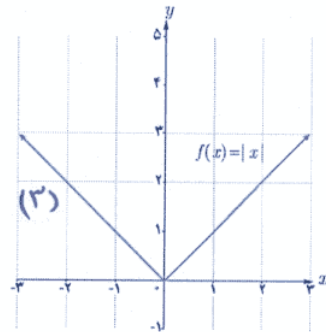
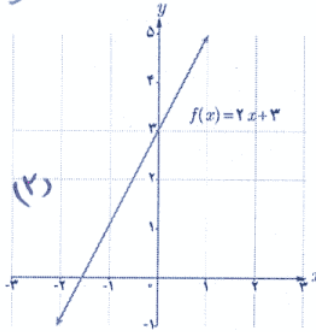
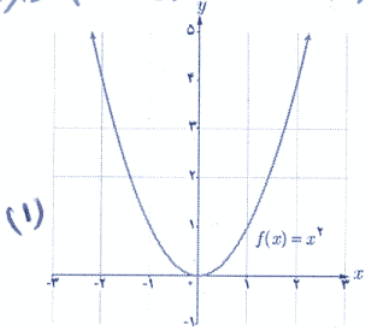


یکی از مفاهیم مهم در مبحث حد توابع، مفهوم پیوستگی است که در این درس با آن آشنا می‌شوید.

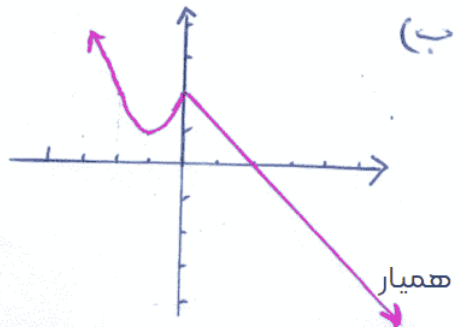
فعالیت

نمودارهای شش شکل زیر رسم شده‌اند. **مسیحی است نمودارها شماره گذاری یا نام گذاری شود**

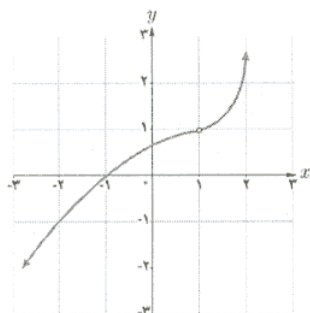


الف) کدام یک از نمودارهای فوق را می‌توان بدون آنکه قلم را از روی کاغذ برداشت، رسم کرد؟ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹
 ب) مثال دیگری مشابه توابع بالا ارائه کنید.

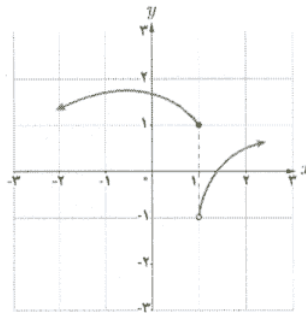
ردیف‌های اول و دوم نمونه‌ای از توابع پیوسته هستند.



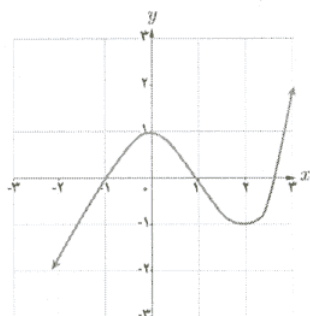
مثال: تابع‌های داده شده با نمودارهای الف و ب پیوسته نیستند، ولی توابع با نمودارهای پ و ت پیوسته‌اند.



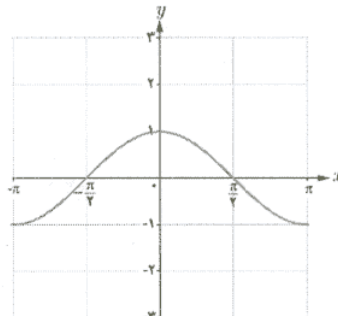
(الف)



(ب)



(پ)

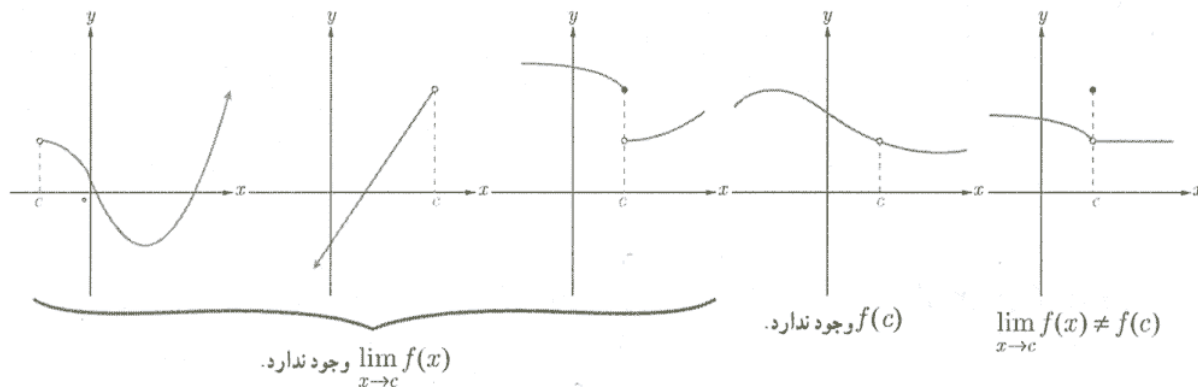


(ت)

اکنون به بررسی دقیق‌تر مفهوم پیوستگی می‌پردازیم. به این منظور پیوستگی تابع در یک نقطه را تعریف می‌کنیم.

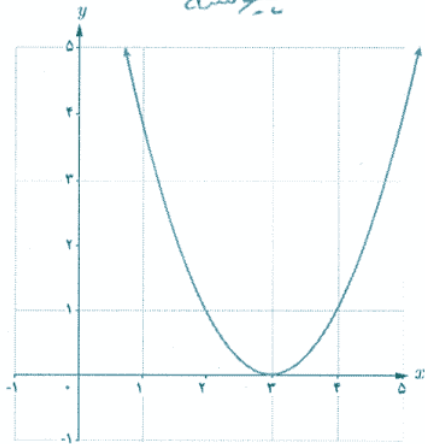
$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \quad (c \in \mathbb{R}) \text{ هرگاه } x=c \text{ را پیوسته نامیم؛ هرگاه}$$

به عبارت دیگر برای آنکه تابع f در c پیوسته باشد، باید $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ و $f(c)$ هر دو موجود و با هم برابر باشند. در غیر این صورت تابع را در c ناپیوسته می‌نامیم. در نمودارهای زیر ناپیوسته بودن یک تابع در نقطه c در شرایط مختلف نمایش داده شده است. شما هم مثال‌های دیگری ارائه کنید.



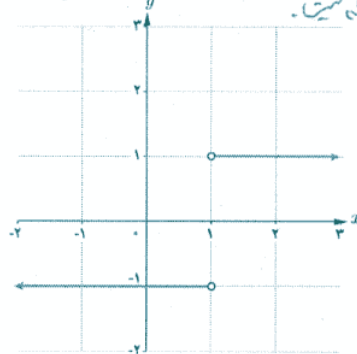
کدام یک از توابع زیر با ضابطه‌های داده شده در $x=1$ ناپیوسته‌اند؟

الف $f(x) = (x-3)^2$
پیوسته



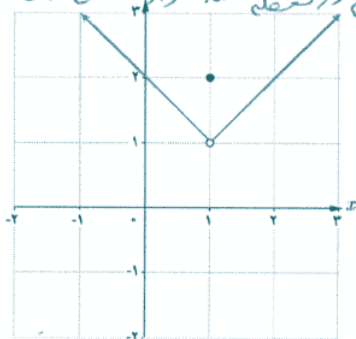
ب $g(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$

ناپیوسته
حد چپ و راست برابر نیست



پ $h(x) = \begin{cases} x & x > 1 \\ 2 & x = 1 \\ -x+2 & x < 1 \end{cases}$

ناپیوسته
مقدار تابع در نقطه $x=1$ برابر با حد تابع در آن نقطه نیست



فعالیت

تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ با نمودار زیر را در نظر بگیرید.

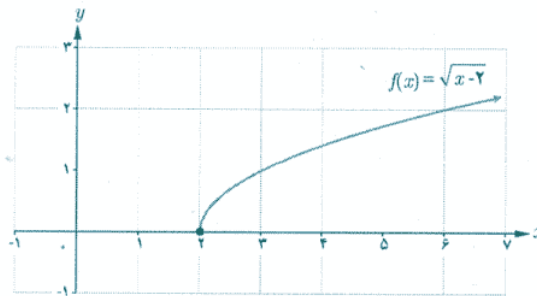
$\lim_{n \rightarrow 3} f(n)$ وجود ندارد

الف کدام یک از حدهای $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ موجودند؟

ب آیا $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ موجود است؟

پ آیا تابع f در $x=2$ پیوسته است؟

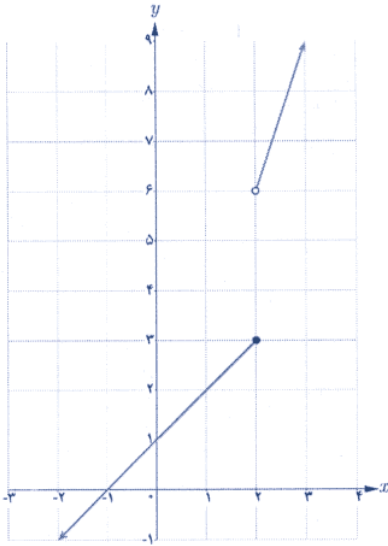
در این فعالیت $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$ گوئیم f از طرف راست در نقطه 2 پیوسته است.



تابع f را در $x=c$ از طرف راست پیوسته می‌نامیم؛ هرگاه $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$ در این صورت می‌گوئیم f در $x=c$ پیوستگی راست دارد.



حل فصل ۶ ریاضی (۲) پایه یازدهم
به کوشش گروه ریاضی استان خوزستان



تابع با ضابطه $g(x) = \begin{cases} 3x & x > 2 \\ x+1 & x \leq 2 \end{cases}$ و نمودار آن را در نظر بگیرید.

الف) کدام یک از حدهای $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ موجودند؟ هر دو موجودند
 ب) آیا $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ موجود است؟ خیر
 پ) آیا تابع f در $x=2$ پیوسته است؟ خیر
 برای تابع $g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = g(2)$ ، گوئیم g از طرف چپ در نقطه ۲ پیوسته است.

تابع f را در $x=c$ از طرف چپ پیوسته می‌نامیم، هرگاه $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$.
 در این صورت گوئیم f در $x=c$ پیوستگی چپ دارد.

با توجه به تعریف معلوم است که f در $x=c$ پیوسته است، هرگاه f در c هم پیوستگی راست و هم پیوستگی چپ داشته باشد.
 مثال: الف) تابع $f(x)=[x]$ در $x=2$ پیوستگی راست دارد. تابع $f(x)=[x]$ در $x=2$ پیوسته نیست.

ب) تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ 2x+3 & x > 0 \end{cases}$ در نقطه ۰ پیوستگی چپ دارد. تابع f در $x=0$ پیوسته نیست.

پ) تابع $g(x) = \begin{cases} -x+3 & x < 1 \\ 2x & x \geq 1 \end{cases}$ در $x=1$ پیوسته است.

پیوستگی روی یک بازه

تابع f روی بازه (a, b) پیوسته است؛ هرگاه، در هر نقطه این بازه پیوسته باشد.
 تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است؛ هرگاه f در بازه (a, b) پیوسته باشد و در نقطه a پیوسته راست و در نقطه b پیوسته چپ باشد.

پیوستگی روی بازه‌های $[a, b]$ و (a, b) را به طور مشابه تعریف کنید.
 تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته است هرگاه f در بازه (a, b) پیوسته باشد و در نقطه a پیوستگی راست داشته باشد.
 تابع f روی بازه $(a, b]$ پیوسته است هرگاه f در بازه (a, b) پیوسته باشد و در نقطه b پیوستگی چپ داشته باشد.

اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد، می‌گوییم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ پیوسته است.

کار در کلاس

$$h(x) = \sqrt{-9x}$$

(ب) روی بازه $(-\infty, 0]$ پیوسته باشد.

$$g(x) = \sqrt{x+2}$$

(ب) روی بازه $[-2, +\infty)$ پیوسته باشد.

$$f(x) = x^x$$

سه تابع متفاوت مثال بزنید که: (الف) روی بازه $(-\infty, \infty)$ پیوسته باشد.

مثال: (الف) اگر f یک تابع چندجمله‌ای باشد، آنگاه f روی بازه $(-\infty, \infty)$ پیوسته است؛ زیرا $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ ($c \in \mathbb{R}$)

(ب) توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ روی بازه‌های $(-\infty, \infty)$ پیوسته‌اند.

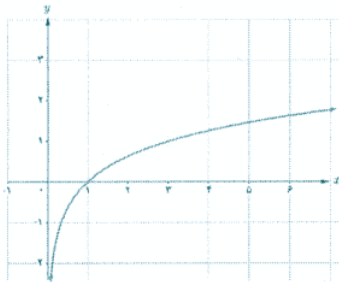
(پ) تابع $f(x) = \log_2 x$ روی بازه $(0, \infty)$ پیوسته است.

(ت) اگر تابعی روی بازه‌ای پیوسته باشد، روی هر زیر بازه دلخواه از آن نیز پیوسته است.

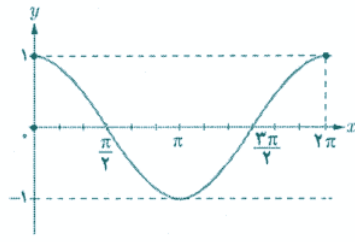
(ث) توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ روی بازه‌های $[0, 2\pi]$ پیوسته‌اند.

(ج) تابع $f(x) = \log_2 x$ روی بازه $[1, 2]$ پیوسته است.

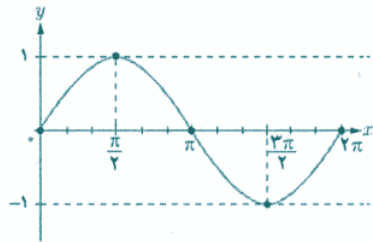
بجز بود
به جای مثال
من نوشت نکته



$f(x) = \log_2 x$

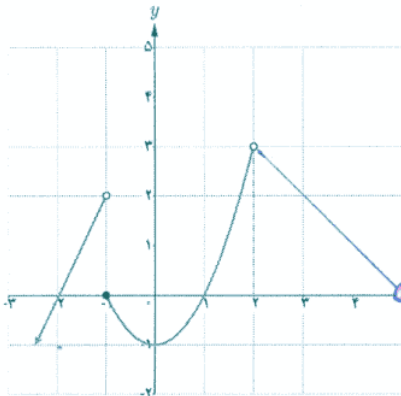


$f(x) = \cos x$



$f(x) = \sin x$

کار در کلاس



$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 < x < 5 \end{cases}$$

$D_f = (-\infty, 2) \cup (2, 5)$

1) تابع f با ضابطه مقابل را در نظر می‌گیریم: (الف) نمودار f را کامل کنید.

(ب) دامنه و برد f را به دست آورید.

(پ) پیوستگی تابع را روی بازه‌های $[-2, 0]$ و $(2, 5)$ بررسی کنید.

2) درباره تابع f کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

(الف) f روی بازه $(-\infty, -1)$ پیوسته است. **درست**

(ب) f روی بازه $(-\infty, -1]$ پیوسته است. **نادرست**

(ت) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ **نادرست**

(ث) f روی بازه $[2, 5]$ پیوسته است. **نادرست**

(ج) f روی بازه $(-2, 0)$ پیوسته است. **نادرست**

(د) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 0$ **درست**

۳ با توجه به تابع f :

(الف) دو بازه بسته مثال بزنید که تابع در یکی از آنها پیوسته و در دیگری ناپیوسته باشد.
 (ب) a و b ای را مثال بزنید که تابع روی (a, b) پیوسته باشد؛ اما روی $[a, b]$ پیوسته نباشد.

$[2, 4]$
 $[1, 2]$ ناپیوسته

$[3, 4]$
 $[5, 7.5]$ پیوسته

$[2, 3]$
 $[2, 4]$

تمرین

۱ با توجه به توابع f و g و h با ضابطه‌های داده شده، به سؤالات پاسخ دهید.

$$f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = 2x + 1 \quad x \neq 2, \quad h(x) = \begin{cases} 2 + x & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

(الف) مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید:

(ب) حدود زیر را در صورت وجود به دست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \quad \lim_{x \rightarrow 2} h(x) =$$

(پ) کدام تابع در $x=2$ پیوسته است؟

۲ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x-3 & x < 2 \\ -2 & x = 2 \\ -x+2 & x > 2 \end{cases}$ را رسم کنید. f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

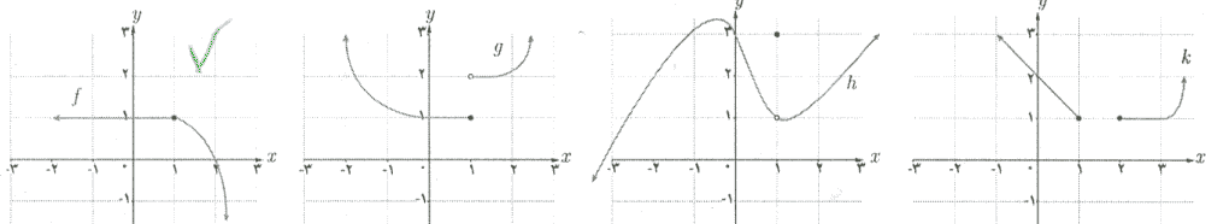
۳ توابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$ و $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ را در نظر می‌گیریم. پیوستگی این تابع‌ها را در $x=3$ بررسی کنید.

۴ با توجه به نمودار تابع $f(x)=[x]$ ، تابع در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۵ پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} -2x+2 & x \leq 0 \\ x^2+2 & x > 0 \end{cases}$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

۶ تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطه $x=1$ مساوی -1 باشد؛ ولی تابع در 1 پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید.

۷ کدام یک از توابع زیر در $x=1$ پیوسته است؟



۸ در مواقعی تجویز دارو برای کودکان بر اساس جرم کودک انجام می‌گیرد. روش‌های مختلفی برای برآورد کردن جرم یک

کودک (برحسب کیلوگرم) در شرایط اضطراری (که جرم نمی‌تواند اندازه‌گیری شود) وجود دارد. یکی از این روش‌ها استفاده از تابع

$$f(t) = \begin{cases} 6t+4 & 0 \leq t < 1 \\ 2t+10 & 1 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

است که در آن t سن کودک برحسب سال است. به طور مثال جرم یک کودک ۶ ماهه به کمک این تابع

چنین محاسبه می‌شود:

$$\text{سال } 6 \rightarrow \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right) + 4 = 7$$

(ب) آیا f در بازه $[0, 10]$ پیوسته است؟

(الف) $f(2)$ و $f(5)$ را بیابید.

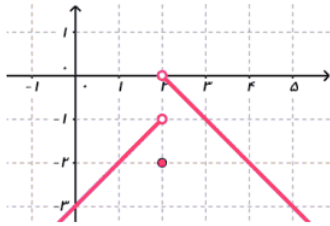
حل فصل ۶ ریاضی (۲) پایه یازدهم
 به کوشش گروه ریاضی استان خوزستان

تمرین فصل ۶ - صفحه ۱۴۲

$$f(x) = 2x + 1 \quad g(x) = 2x + 1 \quad (x \neq 2) \quad h(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases} \quad \text{تمرین ۱:}$$

الف) $f(2) = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$ - $g(2)$ وجود ندارد - $h(2) = 3$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ - $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 5$ - $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 5$

پ) فقط تابع $f(x)$ در $x = 2$ پیوسته است زیرا: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$



$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & x < 2 \\ -2 & x = 2 \\ -x + 2 & x > 2 \end{cases}$$

تمرین ۲:

این تابع در تمام نقاط دامنه اش به غیر از نقطه $x = 2$ پیوسته است زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2 + 2 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 - 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}, \quad g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} \quad \text{تمرین ۳:}$$

تابع $g(x)$ در نقطه $x = 3$ ناپیوسته است زیرا $g(3)$ تعریف نشده است.

تابع $f(x)$ در $x = 3$ پیوسته است زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6, \quad f(3) = 6 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{تمرین ۴:} \quad \text{تابع } f(x) = [x] \text{ در تمام نقاط } x_0 \notin \mathbb{Z} \text{ پیوسته است زیرا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \text{و در تمام نقاط } x_0 \in \mathbb{Z} \text{ ناپیوسته است. زیرا:}$$

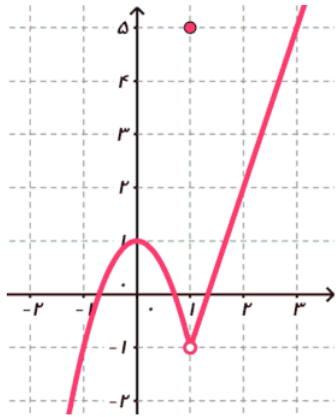
$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & x \leq 0 \\ x^2 + 2 & x > 0 \end{cases}$$

تمرین ۵:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2) = (0)^2 + 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x + 2) = -2(0) + 2 = 2 \\ f(0) &= -2(0) + 2 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad \text{تابع } f(x) \text{ در نقطه } x = 0 \text{ پیوسته است زیرا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{تابع } f(x) \text{ در تمام نقاط دامنه اش پیوسته است زیرا:}$$

تمرین ۶:



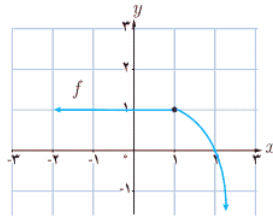
$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & x > 1 \\ 5 & x = 1 \\ -2x^2 + 1 & x < 1 \end{cases}$$

تابع $x=1$ در $x=1$ حد دارد زیرا:

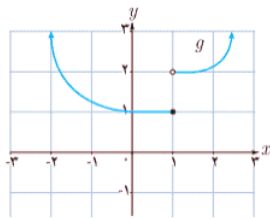
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x - 4) = 3(1) - 4 = 3 - 4 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2x^2 + 1) = -2(1)^2 + 1 = -2 + 1 = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$$

اما این تابع در نقطه $x=1$ ناپیوسته است زیرا: $f(1)=5$ پس $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$

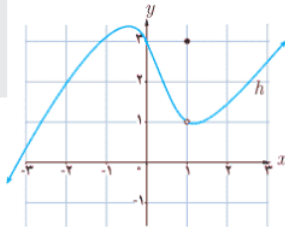
تمرین ۷:



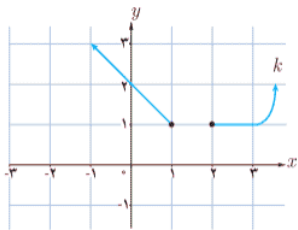
تابع $f(x)$ در $x=1$ پیوسته است زیرا: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$



تابع $g(x)$ در $x=1$ ناپیوسته است زیرا: $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$



تابع $h(x)$ در $x=1$ ناپیوسته است زیرا: $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) \neq h(1)$



تابع $k(x)$ در $x=1$ ناپیوسته است زیرا: $\lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} k(x)$ و وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 1} k(x)$

تمرین ۸:

$$f(t) = \begin{cases} 6t + 4 & 0 \leq t < 1 \\ 2t + 10 & 1 \leq t < 10 \end{cases}$$

(الف) $f(5) = 2(5) + 10 = 10 + 10 = 20$, $f(2) = 2(2) + 10 = 4 + 10 = 14$

(ب) تابع f در بازه $[0, 10]$ پیوسته است زیرا: به ازای هر $x \in (0, 10)$ تابع f پیوسته است و در نقطه $x=0$ پیوستگی راست دارد و در نقطه $x=10$ پیوستگی چپ دارد.

حل فصل ۶ ریاضی (۲) پایه یازدهم
به کوشش گروه ریاضی استان خوزستان