درس اول

احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

در سال‌های قبل با مفاهیم زیر از احتمال آشنا شدید.

یادآوری

۱ــ پدیدهٔ تصادفی : پدیده یا آزمایشی است که نتیجهٔ آن را نتوان قبل از انجام به‌طور قطعی پیش‌بینی کرد.

۲ــ فضای نمونه‌ای : مجموعهٔ تمام نتایج ممکن یک پدیدهٔ تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده می‌نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهیم.

۳ــ پیشامد تصادفی : هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

۴ــ پیشامدها و اعمال روی آنها

فرض کنیم A و B پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند.

الف) اجتماع دو پیشامد : پیشامد $A\cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

ب) اشتراک دو پیشامد : پیشامد $A\cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

پ) تفاضل دو پیشامد : پیشامد $A-B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد.

ت) متمم یک پیشامد : پیشامد A' (یا A^c) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

۵ــ پیشامدهای ناسازگار : دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه A و B با هم رخ ندهند؛ یعنی $A\cap B=\varnothing$

۶ــ رابطهٔ محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

۷ــ رابطهٔ محاسبهٔ احتمال اجتماع یا اشتراک دو پیشامد A و B :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

احتمال شرطی

فرض کنیم در یک قرعه‌کشی اعداد ۱ تا ۲۰ به بیست نفر اختصاص داده شده‌اند و قرار است یک شماره به تصادف انتخاب و به عنوان برنده اعلام شود. اگر شمارهٔ ۸ به‌دست شما افتاده باشد، با چه احتمالی شما برنده خواهید شد؟ $\frac{1}{20}$

اگر بدانید که یک شمارهٔ یک رقمی انتخاب خواهد شد، با چه احتمالی برنده خواهید شد؟ $\frac{1}{10}$

گاهی اوقات وقوع یک پیشامد بر احتمال وقوع پیشامدی دیگر تأثیر می‌گذارد. مثلاً احتمال برنده شدن شما با دانستن اینکه شمارهٔ انتخابی، یک رقمی است، متفاوت خواهد بود از حالتی که این موضوع را ندانیم. در واقع احتمال اول را احتمال برنده شدن شما و احتمال دوم را احتمال برنده شدن شما به شرطی که شمارهٔ انتخاب شده یک رقمی باشد، می‌خوانیم.

منظور از «احتمال A به شرط B» که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است.

می‌دانیم که:

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

حال با توجه به اینکه در $P(A|B)$ پیش فرض رخ دادن پیشامد B در نظر گرفته شده است، در صورت و مخرج کسر بالا خواهیم داشت[1]:

۱ـ حالت‌های مطلوب، همهٔ حالت‌هایی است که A رخ دهد، در حالی که B رخ داده است؛ یعنی همهٔ حالت‌هایی که هم A و هم B رخ دهد، یا به عبارتی این تعداد برابر است با $n(A\cap B)$.

۲ـ همهٔ حالت‌های ممکن در اینجا برابر همهٔ حالت‌هایی است که در آنها B رخ داده باشد. به عبارتی این تعداد برابر با $n(B)$ است.

بنابراین داریم: $P(A|B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(B)}$

$\Longrightarrow P(A|B)=\dfrac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} \Longrightarrow$

که با تقسیم صورت و مخرج این عبارت به $n(S)$ این رابطه به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$(۱)\quad P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

توجه: شرط محاسبهٔ احتمال پیشامد A به شرط وقوع پیشامد B آن است که $P(B)\neq ۰$. بنابراین اگر $P(B)=۰$، آنگاه $P(A|B)$ قابل تعریف نیست.

کار در کلاس

در یک مسابقهٔ اتومبیل‌رانی احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود و به خط پایان نیز برسد، برابر ۰/۷ است و احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود، برابر ۰/۸ است. اگر بدانیم یک اتومبیل دچار نقص فنی نشده است، با چه احتمالی به خط پایان رسیده است؟

حل:

A: پیشامد دچار نقص فنی نشدن اتومبیل

B: احتمال رسیدن به خط پایان

$\Rightarrow P(A)=۰/۸ \quad P(A\cap B)=۰/۷$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{۰/۷}{۰/۸}=\frac{۷}{۸}=۰/۸۷۵$$

۱ـ آنچه در اینجا گفته شد صرفاً نوعی توضیح منطقی و شهودی برای رابطهٔ $P(A|B)$ است و به عنوان اثبات دقیق ریاضی مدنظر نیست.

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوّم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

مثال : اعداد ۱ تا ۹ را روی نُه کارت می‌نویسیم و سه کارت را به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه هر سه عدد زوج باشند به شرط اینکه مجموع آنها زوج باشد.

حل : برای اینکه مجموع سه عدد زوج باشند یا هر سه باید زوج باشند و یا اینکه دو عدد فرد و یکی زوج باشند. اما اعداد زوج چهار تا و اعداد فرد پنج تا هستند.

A: پیشامد اینکه هر سه عدد زوج باشند.

B: پیشامد اینکه مجموع اعداد سه کارت زوج باشند.

لذا تعداد حالت‌هایی که هر سه عدد زوج باشند برابر است با $\binom{۴}{۳}=۴$ و تعداد حالت‌هایی که دو عدد فرد و یکی زوج باشند، برابر است با $\binom{۵}{۲}\times\binom{۴}{۱}=۴۰$. بنابراین ۴۴ حالت هست که مجموع سه عدد زوج باشند و در ۴ حالت آن هر سه عدد زوج‌اند. پس :

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۴}{۴۴}=\frac{۱}{۱۱}$$

مثال : فرض کنید احتمال اینکه یک تیم فوتبال اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، $\frac{۱}{۶}$ باشد. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر $\frac{۱}{۴}$ و در صورتی که اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، این احتمال به $\frac{۱}{۳}$ افزایش خواهد یافت. با چه احتمالی حداقل یکی از دو اتفاقِ «قهرمان شدن» یا «بردن اصلی‌ترین رقیب» برای این تیم اتفاق خواهد افتاد؟

A: پیشامد قهرمان شدن

B: پیشامد برد اصلی‌ترین رقیب

$P(A|B)=\frac{۱}{۳}$ و $P(B)=\frac{۱}{۶}$ و $P(A)=\frac{۱}{۴}$ و

حل : هدف محاسبهٔ $P(A\cup B)$ است و برای آن داریم :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

حال با توجه به رابطهٔ (۱) داریم :

$$P(A\cap B)=P(A|B)\times P(B)=\frac{۱}{۱۸}$$

و با جای‌گذاری مقادیر داریم :

$$P(A\cup B)=\frac{۱۳}{۳۶}$$

پیشامدهای مستقل

در مثال‌های قبل دیدیم که برخی پیشامدها بر احتمال وقوع پیشامدهای دیگر تأثیر می‌گذارند، ولی برخی پیشامدها بر احتمال وقوع یکدیگر تأثیری ندارند.

پیشامد A از پیشامد B مستقل است، هرگاه وقوع B بر احتمال وقوع A تأثیر نگذارد.

به عبارتی در این صورت وقوع B، احتمال وقوع A را کم یا زیاد نمی‌کند. در واقع احتمال وقوع **A با شرط رخ دادن B و بدون این شرط یکسان** است. یعنی پیشامد A از B مستقل است، هرگاه $P(A|B)=P(A)$ $\quad (P(B)\neq 0)$. اما از آنجا که داریم $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ، پس :

$P(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

مستقل بودن A از B معادل است با اینکه $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ $\quad *$

از این رابطه به وضوح نتیجه می‌شود که اگر A نسبت به B مستقل باشد، B نیز نسبت به A مستقل است. لذا می‌توان گفت :

دو پیشامد A و B از هم مستقل‌اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.

بنابراین دو پیشامد A و B مستقل نیستند اگر و تنها اگر

$$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$$

حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا استقلال یا عدم استقلال دو پیشامد را همیشه می‌توان به‌طور شهودی تشخیص داد یا اینکه چه وقت باید از رابطهٔ * برای تشخیص استقلال دو پیشامد استفاده کرد.

(۱) با توجه به رابطهٔ محاسبهٔ احتمال، یعنی : $P(A)-\dfrac{n(A)}{n(S)}$

اگر پیشامدی مانند B با وقوع پیشامد A هیچ ارتباطی نداشته باشد، می‌توان به سادگی نشان داد که وقوع پیشامد B، احتمال وقوع پیشامد A را تغییر نمی‌دهد؛ بنابراین دو پیشامد مذکور از هم مستقل‌اند.

مثال : یک سکه و یک تاس را پرتاب می‌کنیم. این احتمال را که سکه پشت و تاس عددی زوج بیاید، محاسبه کنید.

حل : فرض کنیم

A: پیشامد رو شدن عددی زوج در پرتاب تاس

B: پیشامد پشت آمدن سکه

طبق آنچه گفته شد به سادگی دیده می‌شود که وقوع پیشامد B بر $P(A)$ تأثیر نمی‌گذارد. بنابراین پیشامدهای A و B از هم مستقل‌اند و داریم :

$$P(A\cap B)=P(A)\,.\,P(B)=\frac{۳}{۶}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

مثال : خانواده‌ای دارای دو فرزند است. مطلوب است احتمال اینکه هر دو فرزند آنها پسر باشند.

حل : جنسیت فرزندان پیشامدهایی از هم مستقل‌اند، بنابراین می‌توان به‌صورت زیر عمل کرد.

A : پیشامد پسر بودن فرزند اول

B : پیشامد پسر بودن فرزند دوم

احتمال پسر بودن هر دو $= P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$

مثال : فرض کنید در یک سال احتمال قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران در آسیا برابر ۰/۵ و احتمال قهرمانی تیم ملی والیبال ایران در آسیا برابر ۰/۸ باشد. با چه احتمالی حداقل یکی از این تیم‌ها قهرمان خواهد شد؟

حل :

A: پیشامد قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران $\rightarrow P(A)=۰/۵$

B: پیشامد قهرمانی تیم ملی والیبال ایران $\rightarrow P(B)=۰/۸$

به وضوح دیده می‌شود که A و B از هم مستقل‌اند، پس $P(A\cap B)=P(A)\,.\,P(B)=۰/۴$

اما با توجه به نحوهٔ انتخاب A و B، پیشامد قهرمانی حداقل یکی از آنها به صورت $A\cup B$ است و داریم :

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۵+۰/۸-۰/۴=۰/۹$

در مثال‌های قبل استقلالِ دو پیشامد به سادگی تشخیص داده شد و از آن در حل مسئله استفاده شد. اما آیا همیشه تشخیص مستقل یا وابسته بودن دو پیشامد به همین آسانی است؟

(۲) اگر در ظاهر A و B پیشامدهایی باشند که وقوعشان با هم در ارتباط است، نمی‌توان به‌طور قطع گفت که A و B مستقل نیستند.

برای توضیح بیشتر به دو مثال بعد توجه کنید.

مثال : دو تاس را به ترتیب پرتاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه :

الف) مجموع عددهای رو شده برابر ۵ شود.

ب) مجموع عددهای رو شده برابر ۷ شود.

پ) مجموع عددهای رو شده برابر ۱۰ شود.

حل : با توجه به اصل ضرب می‌دانیم که در پرتاب دو تاس ۳۶ حالت وجود دارد. $(n(S)=۳۶)$

الف) تمام حالت‌هایی که مجموع عددهای رو شده ۵ شود به صورت زیر است :

$\{(۱,۴)$ و $(۴,۱)$ و $(۲,۳)$ و $(۳,۲)\}$

تهیه کننده :
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

بنابراین احتمال اینکه مجموع عددهای رو شده برابر ۵ شود، برابر است با : $\frac{۱}{۹}=\frac{۴}{۳۶}$.

ب) تمام حالت‌هایی که مجموع عددهای رو شده برابر ۷ شود، به‌صورت زیر است :

{(۴,۳) و (۳,۴) و (۲,۵) و (۵,۲) و (۲,۵) و (۶,۱) و (۱,۶)}

بنابراین احتمال اینکه مجموع عددهای رو شده برابر ۷ شود، برابر است با : $\frac{۱}{۶}=\frac{۶}{۳۶}$.

پ) تمام حالت‌هایی که مجموع عددهای رو شده برابر ۱۰ می‌شود، به صورت زیر است :

{(۵,۵) و (۶,۴) و (۴,۶)}

بنابراین احتمال اینکه مجموع دو تاس برابر ۱۰ شود برابر است با : $\frac{۱}{۱۲}=\frac{۳}{۳۶}$.

اگر پیشامد B را رو شدن عدد ۲ در پرتاب تاس اول در نظر بگیریم، بررسی می‌کنیم که این پیشامد نسبت به هر یک از پیشامدهای مطرح شده در قسمت‌های (الف) و (ب) و (پ) از مثال قبل مستقل است یا نه.

مثال : دو تاس را به ترتیب پرتاب می‌کنیم.

الف) آیا پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۵ شود و پیشامد اینکه در پرتاب اولین تاس عدد ۲ ظاهر شود، مستقل از یکدیگرند؟

پیشامد A پیشامد B

ب) آیا پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۷ شود و پیشامد اینکه در پرتاب اولین تاس عدد ۲ ظاهر شود، مستقل از یکدیگرند؟

پیشامد A پیشامد B

پ) آیا پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۱۰ شود و پیشامد اینکه در پرتاب اولین تاس عدد ۲ ظاهر شود، مستقل از یکدیگرند؟

پیشامد A پیشامد B

حل : در این مثال از آنجا که پیش‌فرض رو شدن عدد ۲ در پرتاب تاس اول مفروض است، تمام حالات ممکن به‌صورت زیر خواهد بود و ۶ عضو دارد.

$B=$ {(۲,۱) و (۲,۲) و (۲,۳) و (۲,۴) و (۲,۵) و (۲,۶)}

حال در هر حالت می‌خواهیم صحت رابطهٔ $P(A|B)=P(A)$ را بررسی کنیم. برای هر سه قسمت، $P(A)$ را در اولین مثال این درس محاسبه کردیم. کافی است $P(A|B)$ را در هر سه قسمت به‌دست آوریم.

الف) در این صورت تنها حالتی که مجموع ۵ است، حالت (۲,۳) است. پس احتمال اینکه مجموع ۵ ظاهر شود، برابر $\frac{۱}{۶}$ است. بنابراین وقوع پیشامد B احتمال وقوع پیشامد A را از $\frac{۱}{۹}$ به $\frac{۱}{۶}$ **افزایش می‌دهد**. لذا در این حالت A و B مستقل نیستند.

ب) در این صورت تنها حالتی که مجموع ۷ است، حالت (۲,۵) است. پس احتمال اینکه مجموع ۷ ظاهر شود، برابر $\frac{۱}{۶}$ است. بنابراین

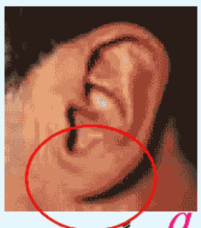
تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

وقوع پیشامد B احتمال وقوع پیشامد A را **تغییر نداده است**. بنابراین در این حالت A و B مستقل از یکدیگرند.

پ) در صورتی که عدد رو شده در تاس اول ۲ باشد، در هیچ حالتی مجموع دو تاس ۱۰ نمی‌شود. بنابراین در این حالت احتمال اینکه مجموع دو تاس برابر ۱۰ شود، صفر است. لذا در این حالت وقوع پیشامد B احتمال وقوع پیشامد A را از $\frac{1}{12}$ **به صفر کاهش داده است**.

پس در این حالت A و B مستقل نیستند.

خواندنی



نرمهٔ گوش پیوسته

نرمهٔ گوش آزاد

عوامل ژنتیک در شکل‌گیری صفات انسان نقش دارند و از والدین به فرزندان منتقل می‌شوند.
آیا تاکنون دقت کرده‌اید که نرمهٔ گوش انسان می‌تواند دو حالت داشته باشد، یکی پیوسته و یکی آزاد؟ با توجه به این موضوع سؤالاتی از این قبیل می‌توانند مطرح باشند :
اگر مردی نرمهٔ گوش آزاد و همسرش نرمهٔ گوش پیوسته داشته باشد، آیا می‌توان پیش‌بینی کرد که فرزند آنها چه نوع نرمهٔ گوشی خواهد داشت؟
در ادامه به کمک علم احتمال به مسئلهٔ بالا می‌پردازیم.

مثال : در علم ژنتیک برای ایجاد برخی صفات در فرزندان دو عامل را مؤثر می‌دانند که یکی از پدر و یکی از مادر به ارث می‌رسد. فرض کنیم این دو عامل را که در تعیین شکل نرمهٔ گوش فرزند مؤثرند با A و a نمایش دهیم که در آن :

A : عامل به وجود آمدن نرمهٔ گوش آزاد

a : عامل به وجود آمدن نرمهٔ گوش پیوسته

بنابراین هر فرد به یکی از حالت‌های AA یا aa یا Aa می‌تواند باشد که با احتمال $\frac{1}{2}$ هر یک از آنها را به فرزند خود می‌تواند انتقال دهد و تأثیر آن بر نرمهٔ گوش فرزند به صورت زیر است :

ــ اگر عامل‌های فرزند به صورت AA باشد، این فرد دارای نرمهٔ گوش آزاد است.

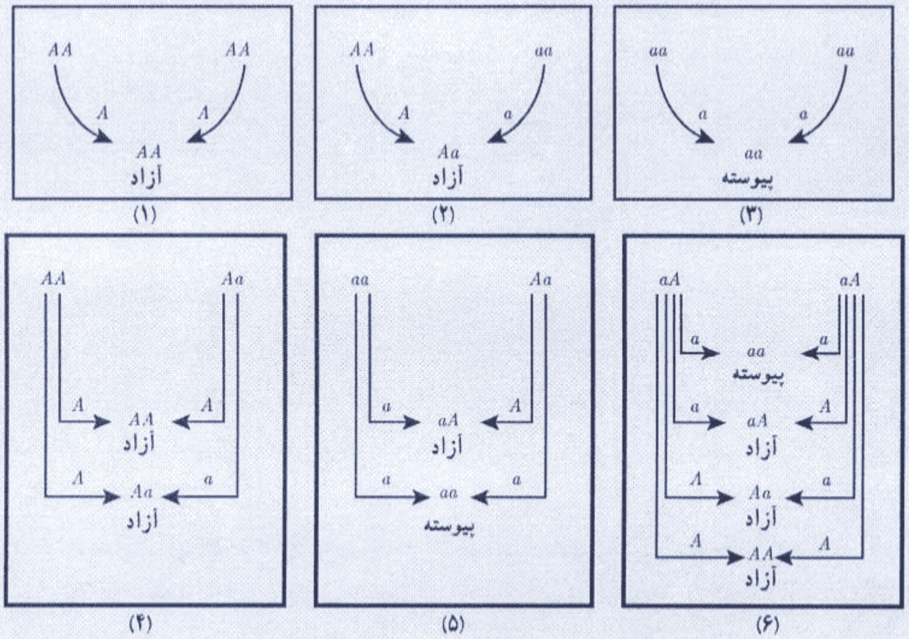
ــ اگر عامل‌های فرزند به صورت aa باشد، این فرد دارای نرمهٔ گوش پیوسته است.

ــ اگر عامل‌های فرزند به صورت Aa باشد، این فرد دارای نرمهٔ گوش آزاد است، به همین دلیل عامل A را غالب و عامل a را مغلوب می‌نامند. به‌طور خلاصه داریم :

عامل‌های شخص	AA	aA یا Aa	aa
نوع نرمهٔ گوش شخص	آزاد	آزاد	پیوسته

ــ به حالت‌های AA و aa خالص و به حالت Aa ناخالص می‌گوییم.

در شکل‌های صفحهٔ بعد حالت‌های مختلف انتقال عوامل از پدر و مادر به فرزند نمایش داده شده‌اند.



فرض کنیم احتمال هر یک از دو عاملِ هر فرد به فرزندش $\frac{1}{2}$ باشد. اگر از میان افراد یک جامعهٔ آماری که نرمهٔ گوش آزاد دارند، ۵۰ درصدشان خالص و ۵۰ درصدشان ناخالص باشند، هر یک از احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

اگر علی نرمهٔ گوش آزاد و همسرش نرمهٔ گوش پیوسته داشته باشد، و آنها یک فرزند با نرمهٔ گوش پیوسته داشته باشند، با چه احتمالی نرمهٔ گوش فرزند دوم آنها پیوسته خواهد بود؟

حل: از آنجا که پدر، نرمهٔ گوش آزاد دارد، عامل‌های او به صورت AA یا Aa است. اما اگر عامل‌های پدر به صورت AA باشد، نرمهٔ گوش فرزندان آنها به صورت آزاد خواهد بود. بنابراین عامل‌های پدر به صورت Aa است. از طرفی از آنجا که مادر نرمهٔ گوش پیوسته دارد، لذا عامل‌های او به صورت aa خواهد بود. بنابراین با توجه به شکل ۵ به احتمال $\frac{1}{2}$ فرزند دوم آنها نرمهٔ گوش پیوسته خواهد داشت.

تمرین

۱ در پرتاب یک تاس فرض کنید پیشامد A ظاهر شدن عدد زوج، پیشامد B ظاهر شدن عددی با مضرب ۳ و پیشامد C ظاهر شدن عددی بزرگ‌تر از ۲ باشد. مستقل یا غیرمستقل بودن هر دو پیشامد را بررسی کنید.

۲ یک سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم. احتمال رو آمدن سکه در پرتاب سوم را به‌دست آورید، به شرط اینکه در دو پرتاب اول و دوم پشت ظاهر شده باشد.

۳ فرض کنید A و B دو پیشامد ناتهی و مستقل از یکدیگرند.

الف) نشان دهید A' و B مستقل اند.

ب) با توجه به (الف) نشان دهید A' و B' نیز مستقل‌اند.

۴ احمد به احتمال ۰/۷ در تیم کوهنوردی مدرسه‌شان و به احتمال ۰/۸ در تیم ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) در هر دو تیم مورد نظر انتخاب شود.

ب) در هیچ‌کدام از دو تیم انتخاب نشود.

پ) فقط در تیم ملی فوتبال انتخاب شود.

ت) فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

ث) حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

۵ احتمال اینکه رؤیا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند، برابر ۰/۶۲۵ باشد، رؤیا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟

۶ دو تاس با هم پرتاب شده‌اند. احتمال آنکه هر دو عدد رو شده زوج باشند، به شرط اینکه بدانیم مجموع اعداد رو شده برابر ۸ است را به دست آورید.

۷ ترکیبی از ۴ مادهٔ شیمیایی داریم که دو تا از آنها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ A، $\frac{۱}{۵}$ و احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B، $\frac{۱}{۷}$ است. اگر مادهٔ A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B، $\frac{۱}{۴}$ خواهد شد. با چه احتمالی حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

تمرین ۱ : $A=$ظاهر شدن عدد زوج $B=$ظاهر شدن عددی با مضرب ۳ $C=$ظاهر شدن عددی بزرگتر از ۲

$A=\{۲,۴,۶\} \Rightarrow P(A)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$ $B=\{۳,۶\} \Rightarrow P(B)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$ $C=\{۳,۴,۵,۶\} \Rightarrow P(C)=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$

* ظاهر شدن عدد زوج به شرط ظاهر شدن مضرب ۳

$P(A|B)=\frac{۱}{۲} \Leftarrow B=\{۳,۶\}$ چون $P(A|B)=P(A)$ پس پیشامد A و B مستقل هستند.

** ظاهر شدن عدد زوج به شرط ظاهر شدن عددی بزرگتر از ۲

$P(A|C)=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲} \Leftarrow C=\{۳,۴,۵,۶\}$ چون $P(A|C)=P(A)$ پس پیشامد A و C مستقل هستند.

*** ظاهر شدن عددی با مضرب ۳ به شرط ظاهر شدن عددی بزرگتر از ۲

$P(B|C)=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲} \Leftarrow C=\{۳,۴,۵,۶\}$ چون $P(B|C)\neq P(B)$ پس پیشامد B و C مستقل نیستند.

تمرین ۲ : $S=\{$(پ،پ،پ)، (پ،ر،پ) ، (ر،پ،پ) ، (پ،پ،ر) ، (ر،ر،پ) ، (ر،پ،ر) ، (پ،ر،ر) ، (ر،ر،ر)$\}$

$A=\{$(ر،پ،پ) ، (ر،ر،پ) ، (ر،پ،ر) ، (ر،ر،ر)$\}$ $\Rightarrow P(A)=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$ $A=$ظاهر شدن رو در پرتاب سوم سکه

$B=\{$(پ،پ،پ) ، (ر،پ،پ)$\}$ $\Rightarrow P(A|B)=\frac{۱}{۲}$ $B=$ظاهر شدن پشت در دو پرتاب اول و دوم

تمرین ۳ : چون پیشامدهای A و B مستقل هستند $\Leftarrow$ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

الف) می خواهیم ثابت کنیم: $P(A'\cap B)=P(A')\times P(B)$

$$P(A')\times P(B)=(۱-P(A))\times P(B)=P(B)-P(A)\times P(B)=P(B)-P(A\cap B)=P(B-A)=P(B\cap A')=P(A'\cap B)$$

ب) می خواهیم ثابت کنیم: $P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')$

$$P(A')\times P(B')=\left(۱-P(A)\right)\times\left(۱-P(B)\right)=۱\underbrace{-P(B)-P(A)+P(A\cap B)}$$

$$=۱-\left(P(B)+P(A)-P(A\cap B)\right)=۱-P(A\cup B)=P(A\cup B)'=P(A'\cap B')$$

تمرین ۴ : $A=$انتخاب در تیم کوهنوردی $B=$انتخاب در تیم ملی فوتبال نوجوانان

الف) باید $P(A\cap B)$ را بدست آوریم و چون پیشامدهای A و B مستقل هستند، پس:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \Rightarrow P(A\cap B)=۰/۷\times ۰/۸=۰/۵۶$$

ب) باید $P(A'\cap B')$ را بدست آوریم و چون پیشامدهای A' و B' مستقل هستند، پس:

$$P(A')=۱-P(A) \Rightarrow P(A')=۱-۰/۷=۰/۳ \qquad P(B')=۱-P(B) \Rightarrow P(B')=۱-۰/۸=۰/۲$$

$$P(A'\cap B')=P(A')\times P(B') \Rightarrow P(A'\cap B')=۰/۳\times ۰/۲=۰/۰۶$$

پ) باید $P(B-A)$ را بدست آوریم. پس:

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow P(B-A)=۰/۸-۰/۵۶=۰/۲۴$$

ت) باید $P(A-B)+P(B-A)$ را بدست آوریم. پس:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A-B)=۰/۷-۰/۵۶=۰/۱۴$$

$$P(A-B)+P(B-A)=۰/۱۴+۰/۲۴=۰/۳۸$$

ث) باید $P(A\cup B)$ را بدست آوریم پس:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B)=۰/۷+۰/۸-۰/۵۶=۰/۹۴$$

تمرین ۵ : $A=$ احتمال قبول شدن رویا در درس ریاضی $B=$ احتمال قبول شدن دوستش در درس ریاضی $P(A\cup B)=۰/۶۲۵$ $P(A)=؟$

$$P(A)=۲P(B) \Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۲}P(A)$$

چون پیشامدهای A و B مستقل هستند، پس:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times\frac{۱}{۲}P(A)=\frac{۱}{۲}\big(P(A)\big)^۲$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow ۰/۶۲۵=P(A)+\frac{۱}{۲}P(A)-\frac{۱}{۲}\big(P(A)\big)^۲ \overset{\times ۲}{\Rightarrow}$$

$$۱/۲۵=۲P(A)+P(A)-\big(P(A)\big)^۲ \Rightarrow \big(P(A)\big)^۲-۳P(A)+۱/۲۵=۰ \overset{t=P(A)}{\Rightarrow}$$

$$t^۲-۳t+۱/۲۵=۰ \Rightarrow (t-۲/۵)(t-۰/۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} \cancel{t=۲/۵} \\ t=۰/۵ \Rightarrow P(A)=۰/۵ \end{cases}$$

تمرین ۶ : $A=$ هر دو عدد رو شده زوج $B=$ مجموع اعداد روشده برابر ۸

$$A=\{(۲,۶),(۶,۲),(۵,۳),(۳,۵),(۴,۴)\} \qquad (A\cap B)=\{(۲,۶),(۶,۲),(۴,۴)\} \qquad P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)} \Rightarrow P(A|B)=\frac{۳}{۵}$$

تمرین ۷

$$P(A)=\frac{۱}{۵} \qquad P(B)=\frac{۱}{۷} \qquad P(B|A)=\frac{۱}{۴} \qquad P(A\cup B)=؟$$

تهیه کننده:

گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان

khuzmath1394@chmail.ir

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{۱}{۴}=\frac{n(A\cap B)}{\frac{۱}{۵}} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۵}=\frac{۱}{۲۰}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B)=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۷}-\frac{۱}{۲۰}=\frac{۲۸+۲۰-۷}{۱۴۰}=\frac{۴۱}{۱۴۰}$$