

نام:

نام خانوادگی:
شماره:

کلاس:

به نام خداوند جان و خرد



مرکز علمی پژوهش استعدادی دانش‌پژوهان جوان
دبیرستان علامه حلی (۷) تهران

رشته:

تاریخ: ۱۴۰۲/۱۰/۴

درس: هندسه ۲

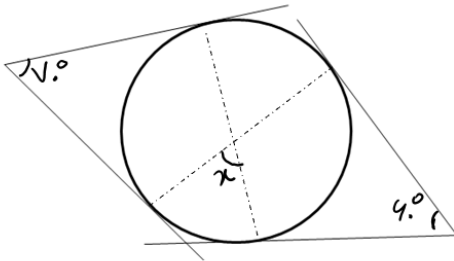
نام دبیر: آقای قربانی

زمان: ۱۱۰ دقیقه

۱- دو دایره متقاطع را تعریف کنید. (با رسم شکل) (۵/۰ نمره)

۲- قضیه: ثابت کنید اندازه هر زاویه ظلی برابر با نصف کمان رو به رو به آن است. (۱ نمره)

۳- در شکل زیر x را بیابید. (خطوط مماس اند) (۱ نمره)



۴- درستی یا نادرستی هر یک از گزاره های زیر را با ذکر دلیل کامل مشخص کنید. (۳ نمره)

(الف) اگر دو دایره C و $\hat{C}$ دارای ۲ مماس مشترک خارجی و یک مماس مشترک داخلی باشند آنگاه متقاطع اند.

(ب) اگر فاصله نقطه A تا نزدیک ترین نقطه دایره $C(O, 3)$ برابر ۷ باشد آنگاه A درون دایره است.

(ج) کمان های بین خط مماس بر دایره و وتر موازی با آن با یکدیگر برابرند.

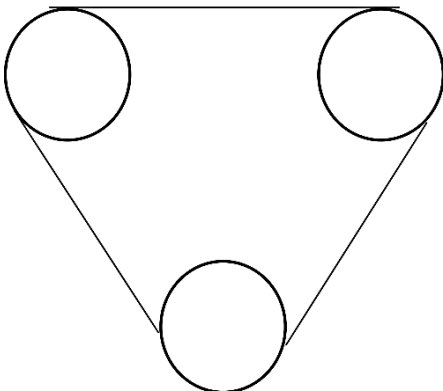
(د) در دایره ای به شعاع ۲ مساحت قطعه ایجاد شده توسط کمانی به زاویه ۳۰ درجه برابر با $\frac{\pi}{4}$ است.

(و) دوزنقه متساوی الاساقین یک چهارضلعی محاطی است.

(ی) اگر شعاع دایره محاطی داخلی یک چند ضلعی محیطی برابر ۱۰ و مساحت ۲۰ باشد محیط آن ۲ می باشد.

۵- در شکل زیر، سه دایره به شعاع های برابر ۲ می باشند. این سه دایره به وسیله نخ بسته شده اند. اگر

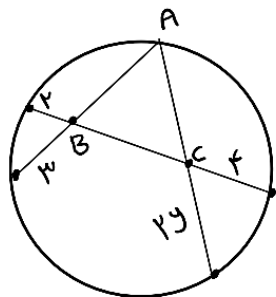
فاصله دو به دو مرکز ها 6π باشد، طول نخ کدام است؟ (۱ نمره)



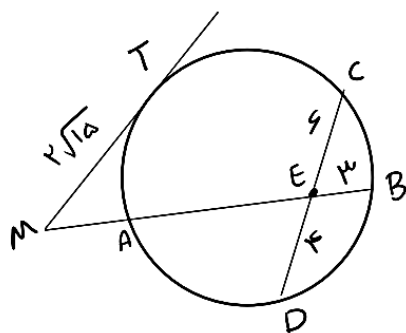


۶- الف) در شکل زیر مثلث متساوی الاضلاع ABC مثلث ABC و اندازه y

کدام است؟ (۰/۷۵ نمره)

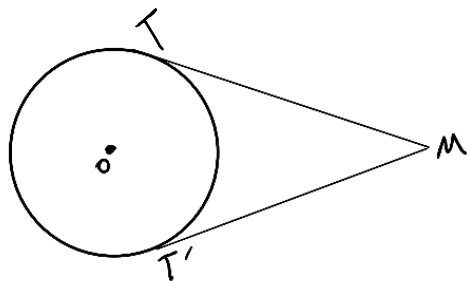


ب) در شکل زیر در شکل زیر ME چقدر است؟ (MT مماس است .) (۰/۷۵ نمره)



۷- الف) اگر از نقطه M ، بیرون دایره $C(O.R)$ دو مماس MT و MT' را رسم کنیم، ثابت کنید: $MT = MT'$.

(۰/۵ نمره)



ب) در شکل مورد الف اگر $\widehat{M} = 60^\circ$ و شعاع دایره ۶ باشد طول مماس MT چقدر است؟ (۰/۵ نمره)

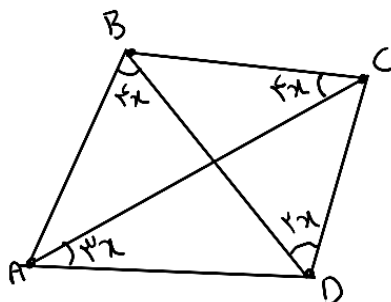


۸- الف) در دو دایره $C(O, 5x - 3)$ و $\hat{C}(\hat{O}, 2x + 4)$ متخارج اند. اگر $d = 10$ خط المرکزین باشد. حدود x را بیابید. (۰/۵ نمره)

ب) دو دایره $C, \hat{C}$ مفروض اند. اگر اندازه شعاع یکی از آن ها یک واحد بیشتر از دیگری باشد و طول مماس مشترک داخلی دو دایره برابر $2\sqrt{3}$ و خط المرکزین $\sqrt{37}$ باشد شعاع دو دایره را بیابید. وضعیت دو دایره نسبت به هم چگونه است؟ (۱ نمره)

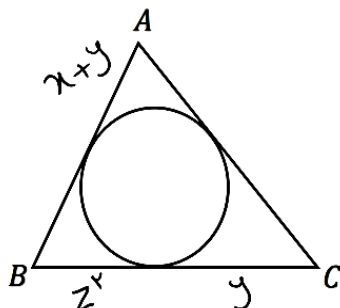
۹- الف) ثابت کنید $ABCD$ یک چهارضلعی محیطی است اگر و تنها اگر حاصل جمع اضلاع رو به رو آن با هم برابر باشد. (۱/۵ نمره)

ب) در شکل زیر اگر $ABCD$ یک چهارضلعی محاطی باشد، با توجه به اندازه های روی شکل، نسبت اندازه زوایه A به B را بیابید. (۱ نمره)



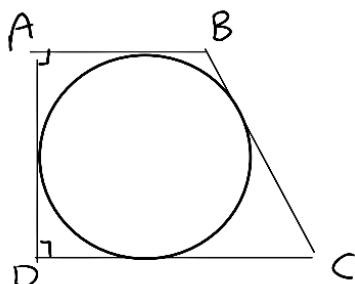
۱۰- الف) در مثلث محیطی شکل زیر مقادیر مجهول را بیابید. (۱ نمره)

$$(AB = 10, AC = 6, BC = 12)$$





ب) در شکل زیر $AB = 10$ و $CD = 15$ است. شعاع دایره محاطی کدام است؟ (۱ نمره)



۱۱- در یک مثلث شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی ۱۲ و x و ۴ است. اگر شعاع دایره محاطی داخلی برابر ۲ باشد. x را بیابید. (۱ نمره)

۱۲- ثابت کنید در مثلث ABC اگر h_a و h_b و h_c ارتفاع‌های اضلاع این مثلث بوده و r_a و r_b و r_c شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی آن باشند، آنگاه خواهیم داشت: (۱ نمره)

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

(r شعاع دایره محاطی داخلی است)

۱۳- در یک دوزنقه متساوی الساقین محیطی: (۱ نمره)

الف) ثابت کنید قطر دایره محاطی واسه هندسی بین دو قاعده است.

ب) اگر طول قاعده‌های آن ۷ و ۱۵ باشد طول ساق و محیط آن را بیابید.

به نام خداوند جان و خرد



مرکز علمی پژوهش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان
دیسریان علامه علی (ع) تهران

نام:

نام خانوادگی:
شماره:

کلاس:

رشته:

۱۴- الف) در مثلثی به اضلاع ۶ و ۸ و ۱۰ طول شعاع دایره محیطی و شعاع بزرگترین دایره محاطی خارجی آن چقدر است؟ (۱ نمره)

ب) در مثلث متساوی الاضلاعی به مساحت $\sqrt{3}$ هریک از مقادیر زیر را حساب کنید . (۱ نمره)

- شعاع دایره محاطی خارجی

- شعاع دایره محاطی داخلی

یا علی

به نام او

سید فاطمه
کارشناسی هنرهای بصری

نام:

نام خانوادگی:
شماره:

کلاس:

به نام خداوند جان و خرد



مرکز پژوهش‌های هنر و معماری
دانشگاه هنر و معماری (۷) تهران

رشته:

تاریخ: ۱۴۰۲/۱۰/۴

درس: هندسه ۲

نام دبیر: آقای قربانی

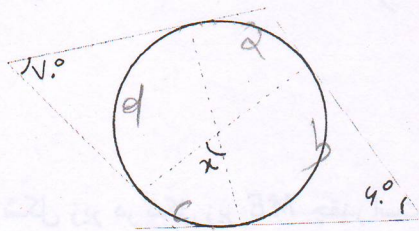
زمان: ۱۱۰ دقیقه

صفحه ۱

۱- دو دایره متقاطع را تعریف کنید. (با رسم شکل) (۱۵/۰ نمره)

۲- قضیه: ثابت کنید اندازه هر زاویه ظلی برابر با نصف کمان رو به آن است. (۱ نمره) صفحه ۲

۳- در شکل زیر X را بیابید. (خطوط مماس اند) (۱ نمره)



$$\begin{aligned} 60^\circ &= \frac{a+d+c-b}{2} \\ 70^\circ &= \frac{a+b+c-d}{2} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 60^\circ &= \frac{a+d+c-b}{2} \\ 70^\circ &= \frac{a+b+c-d}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2a+2c}{2} = 130^\circ \Rightarrow a+c = 130^\circ$$

$$x = \frac{a+c}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$$

۴- درستی یا نادرستی هر یک از گزاره های زیر را با ذکر دلیل کامل مشخص کنید. (۳ نمره) مماس بیرون

(الف) اگر دو دایره C, C' دارای ۲ مماس مشترک خارجی و یک مماس مشترک داخلی باشند آنگاه متقاطع اند.

(ب) اگر فاصله نقطه A تا نزدیک ترین نقطه دایره $C(O, 3)$ برابر ۷ باشد آنگاه A درون دایره است. نادرست چون ۷ بزرگتر از شعاع است

(ج) کمان های بین خط مماس بر دایره و وتر موازی با آن با یکدیگر برابرند. درست $\widehat{BAX} = \widehat{ABW}$

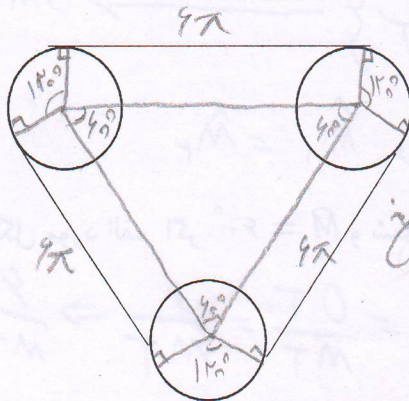
(د) در دایره ای به شعاع ۲ مساحت قطعه ایجاد شده توسط کمانی به زاویه ۳۰ درجه برابر با $\frac{\pi}{3}$ است. درست $\frac{30^\circ}{360^\circ} \times 2^2 \pi = \frac{\pi}{3}$

(و) دوزنقه متساوی الاضلاع محاطی است. درست

(ی) اگر شعاع دایره محاطی داخلی یک چند ضلعی محیطی برابر ۱۰ و مساحت ۲۰ باشد محیط آن ۲ می باشد. نادرست $p = \frac{s}{p} \Rightarrow 10 = \frac{20}{p} \Rightarrow p = 2 \Rightarrow 2p = 4$

۵- در شکل زیر، سه دایره به شعاع های برابر ۲ می باشند. این سه دایره به وسیله نخ بسته شده اند. اگر

فاصله دو به دو مرکز ها 6π باشد، طول نخ کدام است؟ (۱ نمره)

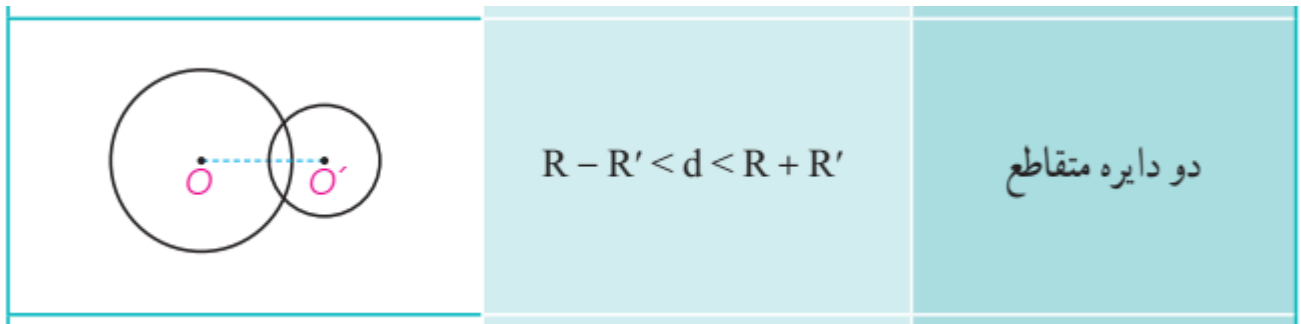


$$\frac{120^\circ}{360^\circ} \times 2\pi \times 3 = 2\pi \times 2 = 4\pi$$

$$\text{طول نخ} = 3 \times 6\pi + 4\pi = 22\pi$$

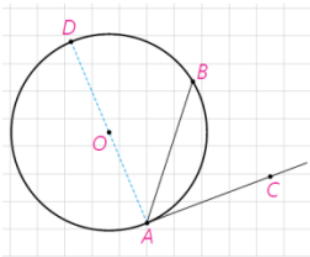
سوال ۱:

دو دایره که دو نقطه ی مشترک داشته باشند را دو دایره ی متقاطع می نامیم



سوال ۲:

زاویه ی ظلّی حادّه باشد:

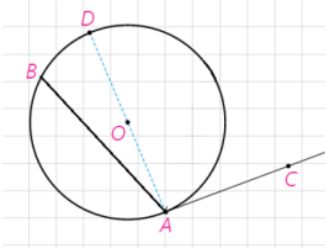


$$\widehat{DAC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{AD}$$

$$\widehat{DAB} \text{ محاطی} \Rightarrow \widehat{DAB} = \frac{1}{2}\widehat{DB}$$

$$\widehat{DAC} - \widehat{DAB} = \frac{1}{2}(\widehat{AD} - \widehat{DB}) \Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

زاویه ی ظلّی منفرجه باشد:



$$\widehat{DAC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DAC} = \frac{1}{2}\widehat{AD}$$

$$\widehat{DAB} \text{ محاطی} \Rightarrow \widehat{DAB} = \frac{1}{2}\widehat{DB}$$

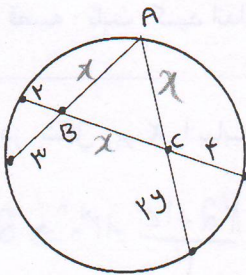
$$\widehat{DAC} + \widehat{DAB} = \frac{1}{2}(\widehat{AD} + \widehat{DB}) \Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$



۶- الف) در شکل زیر مثلث متساوی الاضلاع ABC مثلث ABC و اندازه y

$$x \times 3 = 2(x + 2) \Rightarrow 3x = 2x + 4 \Rightarrow x = 4$$

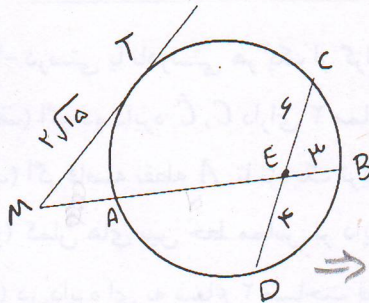
کدام است؟ (۰/۷۵ نمره)



$$x(2y) = 2(x+2) \Rightarrow 8 \times 2y = 2 \times 10 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

ب) در شکل زیر در شکل زیر ME چقدر است؟ (MT مماس است.) (۰/۷۵ نمره)

$$BE \cdot AE = CE \cdot DE \Rightarrow 3 \cdot AE = 4 \cdot 2 \Rightarrow AE = \frac{8}{3}$$



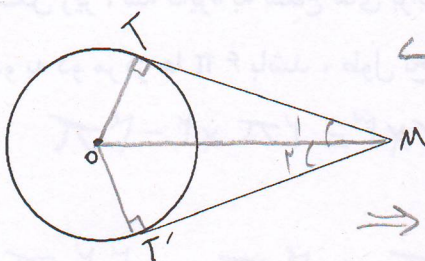
$$MT^2 = MA \cdot MB \Rightarrow (2\sqrt{15})^2 = MA(MA + 1 + 3)$$

$$\Rightarrow MA^2 + 4MA - 60 = 0 \Rightarrow (MA - 4)(MA + 16) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} MA = 4 \\ MA = -16 \end{cases} \quad ME = MA + AE = 4 + 1 = 5$$

۷- الف) اگر از نقطه M بیرون دایره $C(O, R)$ دو مماس MT و MT' را رسم کنیم، ثابت کنید: $MT = MT'$.

(۰/۵ نمره)



$$\left. \begin{array}{l} MO = MO \text{ (مستتر)} \\ OT = OT' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتریک ضلع قائم}} \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

$$\Rightarrow MT = MT', \hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

ب) در شکل مورد الف اگر $\hat{M} = 60^\circ$ و شعاع دایره ۶ باشد طول مماس MT چقدر است؟ (۰/۵ نمره)

$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \frac{\hat{M}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{OT}{MT} = \frac{6}{MT} \Rightarrow \frac{6}{MT} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow MT = 6\sqrt{3}$$

به نام خداوند جان و خرد



مرکز علمی و پژوهشی دانش و آگاهی
دانشگاه علامه طباطبائی (۷۲) تهران

نام:

نام خانوادگی:
شماره:

کلاس:

رشته:

۸- الف) در دو دایره $C(O, 5x - 3)$ و $\hat{C}(O', 2x + 4)$ متخارج اند. اگر $d = 10$ خط مرکزین باشد.

حدود x را بیابید. (۰/۵ نمره)

$$\begin{aligned} 2x + 4 > 0 &\Rightarrow x > -2 \\ 5x - 3 > 0 &\Rightarrow x > \frac{3}{5} \\ d > R + R' &\Rightarrow 10 > 2x + 4 + 5x - 3 \\ &\Rightarrow 10 > 7x + 1 \Rightarrow 9 > 7x \Rightarrow x < \frac{9}{7} \end{aligned}$$

ب) دو دایره $C, \hat{C}$ مفروض اند. اگر اندازه شعاع یکی از آن ها یک واحد بیشتر از دیگری باشد و طول مماس

مشترک داخلی دو دایره برابر $2\sqrt{3}$ و خط مرکزین $\sqrt{37}$ باشد شعاع دو دایره را بیابید. وضعیت دو دایره

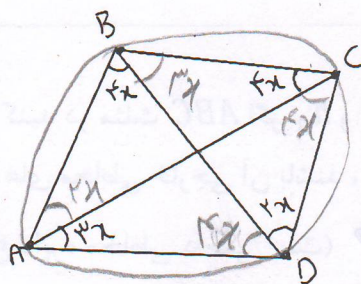
نسبت به هم چگونه است؟ (۱ نمره)

۹- الف) ثابت کنید $ABCD$ یک چهارضلعی محیطی است اگر و تنها اگر حاصل جمع اضلاع رو به رو آن با

هم برابر باشد. (۱/۵ نمره)

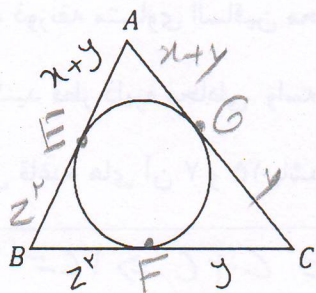
ب) در شکل زیر اگر $ABCD$ یک چهارضلعی محاطی باشد، با توجه به اندازه های روی شکل،

نسبت اندازه زوایه A به B را بیابید. (۱ نمره)



$$\begin{aligned} \hat{CAB} &= \frac{1}{2} \widehat{BC} \\ \hat{BDC} &= \frac{1}{2} \widehat{BC} \\ \Rightarrow \hat{CAB} &= \hat{BDC} = 2x \\ \frac{\hat{A}}{\hat{B}} &= \frac{4x}{2x} = \frac{2}{1} \end{aligned}$$

۱۰- الف) در مثلث محیطی شکل زیر مقادیر مجهول را بیابید. (۱ نمره)



($AB = 10, AC = 6, BC = 12$)

$$P = \frac{6 + 10 + 12}{2} = 14$$

$$CG = P - c = 14 - 10 = 4 \Rightarrow y = 4$$

$$AE = P - a = 14 - 12 = 2 \Rightarrow x + y = 2 \Rightarrow x + 4 = 2 \Rightarrow x = -2$$

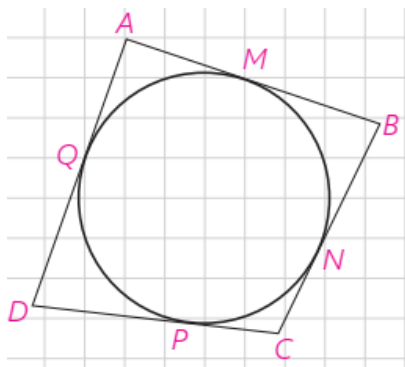
$$BE = P - b = 14 - 6 = 8 \Rightarrow z = 8 \Rightarrow z = \pm 2\sqrt{2}$$

سوال ۹: قسمت الف

فرض می کنیم چهارضلعی $ABCD$ محیطی باشد.

می دانیم مماس های رسم شده بر یک دایره از یک نقطه با هم برابرند:

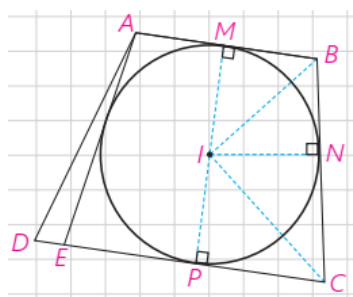
$$AB + CD = AM + MB + PC + PD = AQ + BN + CN + DQ = AD + BC$$



در عکس قضیه که با برهان خلف اثبات خواهیم کرد فرض می کنیم $AB + CD = BC + AD$

نیمسازهای دو زاویه ی B و C یک دیگر را در نقطه ای مانند I قطع می کنند. با توجه به ویژگی نیمساز نقطه ی I از سه ضلع AB و BC و CD به یک فاصله است بنابراین دایره ای به مرکز I و شعاع IM بر سه ضلع AB و BC و CD مماس است.

حال فرض می کنیم این دایره بر ضلع AD مماس نباشد پس از نقطه ی A مماسی بر دایره رسم می کنیم تا خط CD را در نقطه ی مانند E قطع کند پس:

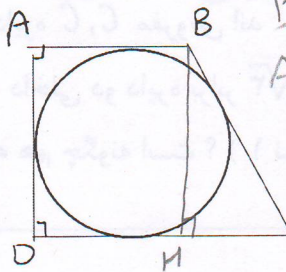


$$AB + EC = AE + BC \xrightarrow{AB+CD=BC+AD} BC + AD - CD + EC = AE + BC \Rightarrow AD - DE = AE \Rightarrow AD = DE + AE$$

در فصل اول هندسه ی دهم یاد گرفتیم که شرط تشکیل مثلث (قضیه ی نابرابری مثلثی) $AD < AE + DE$ می باشد بنابراین $AD = DE + AE$ غیرممکن است و در نتیجه E همان D است و دایره بر ضلع AD نیز مماس است.



ب) در شکل زیر $AB = 10$ و $CD = 15$ است. شعاع دایره محاطی کدام است؟ (۱ نمره)



$$BH = 2r$$

$$AB + CD = 10 + 15 = 25$$

$$AB + CD = AD + BC = 25 \Rightarrow 2r + BC = 25 \Rightarrow BC = 25 - 2r$$

$$BH^2 + CH^2 = BC^2 \Rightarrow (2r)^2 + (15 - 10)^2 = (25 - 2r)^2$$

$$4r^2 + 25 = 4r^2 - 100r + 25^2$$

$$\Rightarrow 100r = 625 - 25 = 600 \Rightarrow r = 6$$

۱۱- در یک مثلث شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی ۱۲ و x و ۴ است. اگر شعاع دایره محاطی داخلی برابر ۲ باشد x را بیابید. (۱ نمره)

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 6$$

۱۲- ثابت کنید در مثلث ABC اگر h_a و h_b و h_c ارتفاع‌های اضلاع این مثلث بوده و r_a و r_b و r_c شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی آن باشند، آنگاه خواهیم داشت: (۱ نمره)

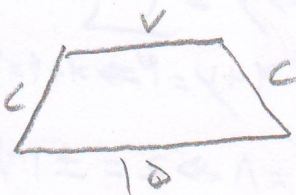
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

(r شعاع دایره محاطی داخلی است) صفحہ بعد

۱۳- در یک دوزنقه متساوی الساقین محیطی: (۱ نمره)

الف) ثابت کنید قطر دایره محاطی واسه هندسی بین دو قاعده است. صفحہ بعد

ب) اگر طول قاعده‌های آن ۷ و ۱۵ باشد طول ساق و محیط آن را بیابید.



$$\Rightarrow 7 + 15 = c + c \Rightarrow 2c = 22$$

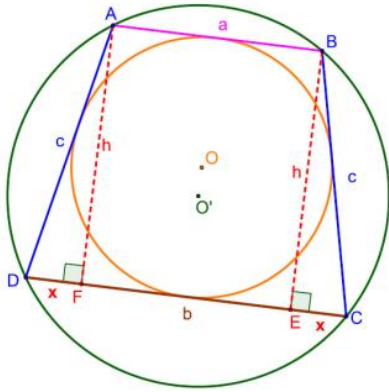
$$\Rightarrow c = 11$$

سوال ۱۲:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{2} a h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S} \\ S &= \frac{1}{2} b h_b \Rightarrow h_b = \frac{2S}{b} \Rightarrow \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S} \\ S &= \frac{1}{2} c h_c \Rightarrow h_c = \frac{2S}{c} \Rightarrow \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{2p}{2S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

سوال ۱۳: قسمت الف



$$2c = a + b \Rightarrow c = \frac{a+b}{2}, \quad b = 2x + a \Rightarrow x = \frac{b-a}{2}$$

$$h^2 = c^2 - x^2 \Rightarrow h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{4ab}{4} \Rightarrow h = \sqrt{ab}$$

سوال ۱۴:

قسمت الف) مثلث قائم الزاویه است زیرا $6^2 + 8^2 = 10^2$

$$P = \frac{6 + 8 + 10}{2} = 12$$

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$

شعاع بزرگ ترین دایره ی محاطی خارجی:

$$r_a = \frac{S}{P - a} = \frac{24}{12 - 10} = 12$$

شعاع دایره ی محیطی تمام مثلث ها از فرمول زیر به دست می آید:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{6 \times 8 \times 10}{4 \times 24} = 5$$

قسمت ب)

اگر اندازه ی اضلاع مثلث a باشد:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot a \sin 60^\circ = \frac{1}{2} a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \sqrt{3} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow AH = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$P = \frac{a + a + a}{2} = \frac{3}{2} a = \frac{3}{2}$$

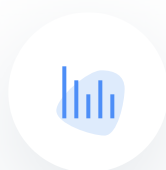
$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$r_a = \frac{S}{P - a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{2} - 1} = 2\sqrt{3}$$



اپلیکیشن درسی همیار

برنامه رایگان درسی همیار



تمام پایه ها

جواب کتاب ، تدریس و نمونه سوال



همیشه رایگان

برنامه همیار کاملا رایگان میباشد