



تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۲/۳۰

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

ساعت امتحان: ۱۰ صبح

تعداد صفحات: ۴

نمره:



وزارت آموزش و پرورش

اداره‌ی کل آموزش و پرورش استان مازندران

مدیریت آموزش و پرورش شهرستان بابل

دبیرستان فرزانه‌گان متوسطه دوم

طراح: زهرا علی زاده

سؤال امتحانی: نوبت دوم

درس: هندسه ۲

پایه: یازدهم

رشته: ریاضی

نام و نام خانوادگی:

کلاس: ۱۱/۱

محل

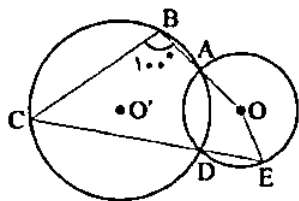
مهر آموزشگاه

تأیید می‌شود: با نام و یاد خداوند پی همّت و با تکیه بر دانش خود، به سوالات زیر پاسخ تشریحی کامل و دقیق بده

سوال	شرح سوال	بارم
۱.	ثابت کنید اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه.	۱/۵
۲.	از نقطه P در خارج دایره ای، مماس PA به طول $4\sqrt{15}$ را بر آن رسم کرده ایم. (A روی دایره است). همچنین خط راستی از P گذرانده ایم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کرده است و $BC = 8$. طول های PB و PC را به دست آورید.	۱
۳.	یک چهار ضلعی محیطی است اگر و تنها اگر : ۱- ۲-	۰/۵

۴.

مطابق شکل دو دایره به مراکز O و O' در نقاط A و D متقاطع اند و چهارضلعی $OBCE$ چنان است که نقاط A و D روی اضلاع آن قرار دارد و $\hat{B} = 100^\circ$ است. اندازه زاویه AOE چند درجه است؟

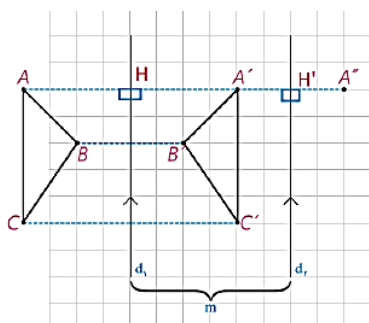


۵.

نقطه ثابت تبدیل را تعریف کنید.

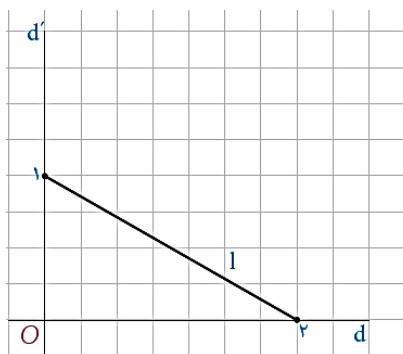
۶.

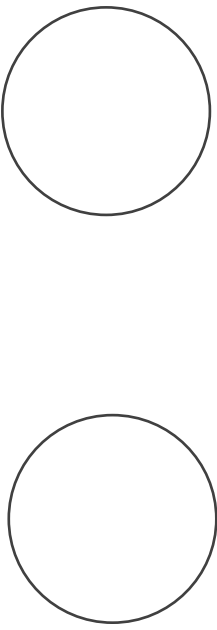
در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصله m از آن قرار دارد و مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. اگر بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کرده و $A''B''C''$ بنامیم، با چه تبدیلی می توان آن را تصویر ABC دانست؟ چرا؟

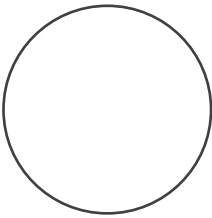
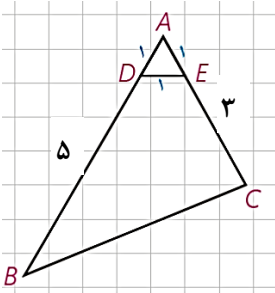


۷.

در شکل روبرو اگر خط l را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{8}{5}$ تصویر کنیم و آن را l' بنامیم، مساحت بین خط l و l' و خطوط d' و d چقدر است؟



۸.	از بین همه دوزنقه هایی با قاعده های به طول ۵ و ۷ که در قاعده به طول ۷ مشترک هستند و دارای مساحت ۲۴ می باشند، کمترین محیط ممکن را بدست آورید.	۲
۹.	در یک n ضلعی منتظم هیچ یک از محورهای تقارن آن، قطر چندضلعی نمی باشد و داریم $n^2 - 19n + 84 = 0$. تعداد کل تقارن های خطی و دورانی این چندضلعی را بدست آورید.	۱
۱۰.	قضیه سینوس ها را در حالت غیر قائمه ($\hat{A} \neq 90^\circ$) اثبات کنید.	۲
		

۲/۵	۱۱. قضیه استوارت را بیان و اثبات کنید.	۱۱
۱/۵	۱۲. ثابت کنید در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می کند. 	۱۲
۱	۱۳. در شکل مقابل، (۱) طول BC را بدست آورید. (۲) مساحت چهارضلعی $DECB$ را بیابید. 	۱۳
۱	۱۴. اگر در مثلث ABC داشته باشیم $a^2 + b^2 - c^2 = 4S$، آن گاه اندازه زاویه C چند درجه است ؟	۱۴



تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۰۲/۳۰

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

ساعت امتحان: ۱۰ صبح

تعداد صفحات:

نمره:

محل

مهر آموزشگاه



وزارت آموزش و پرورش

اداره کل آموزش و پرورش استان مازندران

مدیریت آموزش و پرورش شهرستان بابل

دبیرستان فرزنانگان متوسطه دوم

طراح: زهرا علی زاده

سؤال امتحانی: نوبت دوم

درس: هندسه ۲

پایه: یازدهم

رشته: ریاضی

نام و نام خانوادگی:

کلاس: ۱۱/۱

بارم

۱/۵

سوال

۱.

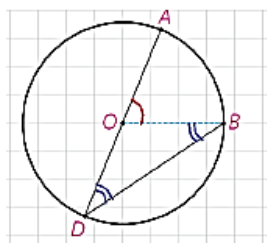
ثابت کنید اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه.

۱- در شکل مقابل $\widehat{ADB}$ یک زاویه محاطی است که یک ضلع آن از مرکز دایره عبور کرده است.

۲- اگر از B به O وصل کنیم، زاویه AOB یک زاویه خارجی برای مثلث متساوی الساقین OBD است.

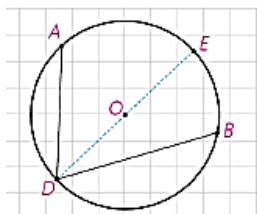
بنابراین: $\widehat{AOB} = \widehat{ODB} + \widehat{OBD} = 2\widehat{ODB}$ و از آن نتیجه می‌شود:

$$\widehat{ODB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$



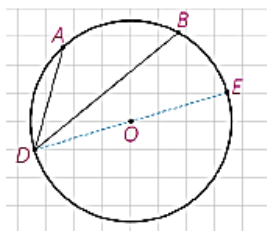
۳- در این شکل $\widehat{ADB}$ یک زاویه محاطی است که دو ضلع آن در دو طرف O واقع شده‌اند.

۴- اگر قطر DE را رسم کنیم طبق قسمت ۱ داریم: $\widehat{ADE} = \frac{1}{2}\widehat{AE}$ و $\widehat{EDB} = \frac{1}{2}\widehat{BE}$ $\Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{AE} + \frac{1}{2}\widehat{BE} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$



۵- در این شکل $\widehat{ADB}$ یک زاویه محاطی است که دو ضلع آن در یک طرف O واقع شده‌اند.

۶- اگر قطر DE را رسم کنیم، طبق قسمت ۱ داریم:



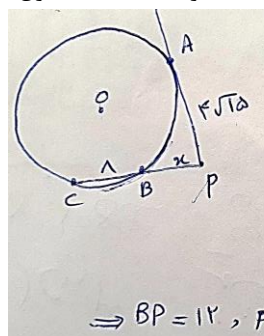
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ADE} = \frac{1}{2}\widehat{AE} \\ \widehat{BDE} = \frac{1}{2}\widehat{BE} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{AE} - \frac{1}{2}\widehat{BE} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$$

بنابراین:

قضیه: اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه.

۲.

از نقطه P در خارج دایره ای، مماس PA به طول $4\sqrt{15}$ را بر آن رسم کرده ایم. (A روی دایره است). همچنین خط راستی از P گذرانده ایم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کرده است و $BC = 8$. طول های PB و PC را به دست آورید.



$$\begin{aligned} AP^2 &= BP \cdot PC \\ \rightarrow 240 &= x(x+8) \\ x^2 + 8x - 240 &= 0 \\ (x-12)(x+20) &= 0 \\ \Rightarrow x &= 12, x = -20 \quad \text{غیرممکن} \\ \Rightarrow BP &= 12, PC = 20 \end{aligned}$$

۳.

یک چهار ضلعی محیطی است اگر و تنها اگر:

۰/۵

۱-

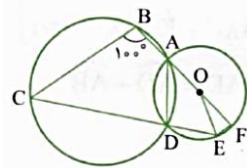
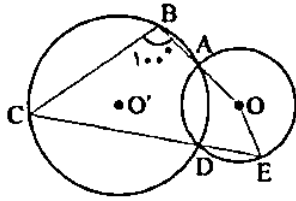
۲-

بنابراین؛ یک چند ضلعی، محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه هم‌رس باشند. این نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است.

قضیه: یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر باشند.

۴.

مطابق شکل دو دایره به مراکز O و O' در نقاط A و D متقاطع اند و چهارضلعی $OBCE$ چنان است که نقاط A و D روی اضلاع آن قرار دارد و $\hat{B} = 100^\circ$ است. اندازه زاویه AOE چند درجه است؟



پس $\hat{ADE} = \hat{B} = 100^\circ$. هم‌چنین محاطی‌بودن چهارضلعی $ADEF$ نتیجه می‌دهد که چهارضلعی $ABCD$ محاطی است،
 $\hat{F} = 180^\circ - \hat{ADE} = 80^\circ$.

اما مثلث OEF متساوی‌الساقین است ($OE = OF$)، پس

$$\hat{OEF} = 80^\circ \text{ و نهایتاً } \hat{AOE} = \hat{OEF} + \hat{F} = 2 \times 80^\circ = 160^\circ.$$

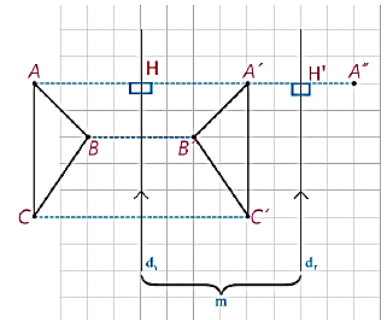
۵.

نقطه ثابت تبدیل را تعریف کنید.

تعریف: در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل یافته آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود، نقطه ثابت تبدیل می‌نامند.

۶.

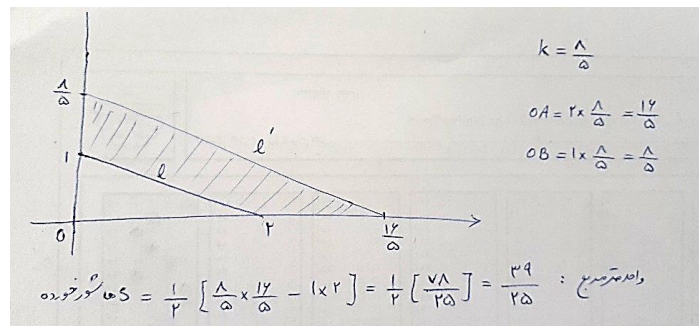
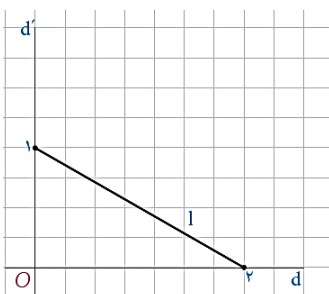
در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصله m از آن قرار دارد و مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. اگر بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کرده و $A''B''C''$ بنامیم، با چه تبدیلی می‌توان آن را تصویر ABC دانست؟ چرا؟



با انتقالی تحت بردار انتقالی که اندازه آن دو برابر فاصله ی بین دو خط بازتاب d_1 و d_2 یعنی $2m$ و راستای آن عمود بر این دو خط است، می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث ABC دانست.
 نتیجه می‌گیریم، ترکیب دو بازتابی که محورهای بازتاب موازی یکدیگر هستند یک انتقال است.

۷.

در شکل روبرو اگر خط l را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{8}{5}$ تصویر کنیم و آن را l' بنامیم، مساحت بین خط l و l' و خطوط d و d' چقدر است؟



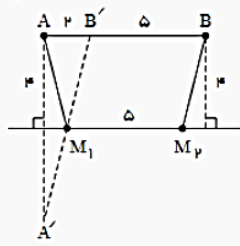
۸.

از بین همه دوزنقه‌هایی با قاعده‌های به طول ۵ و ۷ که در قاعده به طول ۷ مشترک هستند و دارای مساحت ۲۴ می‌باشند، کمترین محیط ممکن را بدست آورید.

۲

این مسأله را می‌توان در قالب مسأله کوتاه‌ترین مسیر هرون حل کرد. کافیت طول کوتاه‌ترین مسیر AM_1M_2B را تعیین کنیم که مسیر M_1M_2 روی خطی به موازات خط AB قرار دارد و طول آن ۵ می‌باشد. فاصله نقاط B و A از این خط همان ارتفاع دوزنقه است که با استفاده از مساحت به دست می‌آید.

$$\frac{1}{2}(\delta + \gamma) \times h = 24 \Rightarrow h = 4$$



کافیت کم‌ترین مقدار $AM_1 + BM_2$ را تعیین کنیم:

کمترین مقدار برای $AM_1 + BM_2$

$$= AM_1 + M_1B' = A'M_1 + M_1B' = A'B' = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \text{کمترین محیط دوزنقه} = \delta + \gamma + 2\sqrt{17} = 12 + 2\sqrt{17}$$

۹. در یک n ضلعی منتظم هیچ یک از محورهای تقارن آن، قطر چندضلعی نمی‌باشد و داریم $n^2 - 19n + 84 = 0$. تعداد کل تقارن‌های خطی و دورانی این چندضلعی را بدست آورید.

چون هیچ یک از محورهای تقارن n ضلعی

منتظم قطر آن نیستند، پس n فرد است و داریم:

$$n^2 - 19n + 84 = 0 \Rightarrow (n - 7)(n - 12) = 0$$

$$\Rightarrow n = 7 \text{ یا } n = 12$$

چون n فرد است لذا $n = 7$ قابل قبول است و تعداد کل تقارن‌های خطی و دورانی هفت ضلعی منتظم ۱۴ است.

۱۰. قضیه سینوس‌ها را در حالت غیر قائمه ($\hat{A} \neq 90^\circ$) اثبات کنید.

۵- حال مثلث ABC ($\hat{A} > 90^\circ$) را در نظر بگیرید. نقطه دلخواه A' روی کمان BC را به B و C وصل می‌کنیم. زوایای $\hat{A}$ و $\hat{A}'$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟ این دو زاویه مکمل هم هستند. راه اول: چهارضلعی $ABA'C$ محاطی است پس بنا بر قضیه زوایای مقابل مکمل هستند. راه دوم:

$$\hat{A} = \frac{BA'C}{r} \Rightarrow \hat{A} + \hat{A}' = \frac{BA'C}{r} + \frac{BAC}{r} = \frac{BA'C + BAC}{r} = \frac{360^\circ}{r} = 180^\circ$$

$\Rightarrow \hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$

با توجه به آنچه از مثلثات می‌دانید، جاهای خالی را پر کنید:

در مثلث $A'BC$ ، طبق نتیجه قسمت (۳) می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{a}{\sin A'} = 2R \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

طول قطر برابر با $2R$ است.

مثلث دلخواه ABC ($\hat{A} < 90^\circ$) و دایره محیطی آن به مرکز O را در نظر می‌گیریم. قطر BD را رسم، و A به D وصل می‌کنیم. ($BD = 2R$)

۱- زوایای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ چرا با هم برابرند؟ این دو زاویه محاطی هستند و هر دو رویه رو به کمان AB هستند پس هم اندازه‌اند. اندازه آنها برابر است با نصف کمان AB .

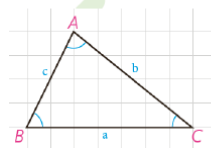
۲- چرا مثلث ABD در رأس A قائم‌الزاویه است؟ زیرا زاویه A محاطی رویه رو به قطر دایره است. $\hat{A} = \frac{BCD}{r} = \frac{180^\circ}{r}$

۳- با توجه به دو قسمت قبل، داریم:

$$\sin C = \sin D \text{ و } \sin D = \frac{c}{BD} \Rightarrow \sin C = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = 2R$$

نتیجه

در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازه هر ضلع، به سینوس زاویه روبه‌رو به آن برابر است با طول قطر دایره محیطی. مثلاً:



قضیه سینوس‌ها: در مثلث ABC با اضلاع $BC=a$ ، $AC=b$ ، $AB=c$ و داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.

۱۱. قضیه استوارت را بیان و اثبات کنید.

در مثلث ABC ، نقطه دلخواه D روی BC مفروض است. (قضیه استوارت) $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$

$$\triangle ABD: AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2AD \cdot DB \cdot \cos \alpha$$

$$\xrightarrow{\times DC} AB^2 \cdot DC = DC \cdot AD^2 + DC \cdot DB^2 - 2DC \cdot AD \cdot DB \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

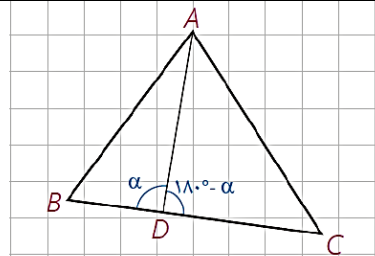
$$\triangle ACD: AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$\xrightarrow{\times DB} AC^2 \cdot DB = DB \cdot AD^2 + DB \cdot DC^2 + 2DB \cdot AD \cdot DC \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)+(2)} AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = DC \cdot AD^2 + DC \cdot DB^2 - 2DC \cdot AD \cdot DB \cdot \cos \alpha + DB \cdot AD^2 + DB \cdot DC^2 + 2DB \cdot AD \cdot DC \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \underbrace{(DC + DB)}_{BC} + BD \cdot DC \underbrace{(DC + DB)}_{BC}$$

$$\Rightarrow AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$



۱۲. ثابت کنید در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می کند.

در مثلث ABC برای محاسبه طول نیمساز داخلی زاویه $\hat{A}$ ($\hat{A}_1 = \hat{A}_2$)، یعنی AD، AD را امتداد می دهیم تا دایره محیطی مثلث را در E قطع کند و E را به C وصل می کنیم.

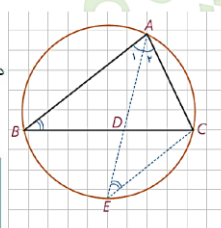
الف) چرا $\hat{E} = \hat{B}$ ؟

زیرا این دو زاویه هردو محاطی هستند و روبه رو به یک کمان (کمان AC) هستند.

ب) چرا مثلث های ABD و AEC متشابه اند؟

(ب) نسبت های اضلاع متناظر آنها را بنویسید.

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AB} = \frac{CE}{BD}$$



ت) از تناسب اول نتیجه می گیریم:

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE = AD(AD + DE) = AD^2 + AD \cdot DE$$

و چون $AD \cdot DE = BD \cdot DC$ (چرا؟)

دو وتر AE و BC یکدیگر را در نقطه D درون دایره قطع کرده اند بنا بر قضیه داریم: $AD \cdot DE = BD \cdot DC$

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

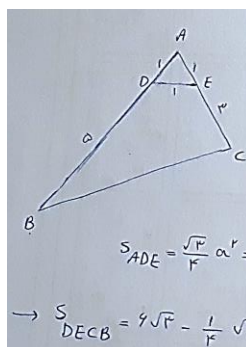
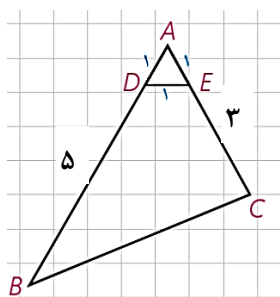
بنابراین:

قضیه ۲: در هر مثلث، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می کند.

۱۳. در شکل مقابل،

(۱) طول BC را بدست آورید.

(۲) مساحت چهارضلعی DECB را بیابید.



$$\triangle ADE \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{4}$$

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$$

$$BC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \frac{1}{4} = 28 \rightarrow BC = 2\sqrt{7}$$

$$S_{DECB} = S_{ABC} - S_{ADE} \quad ; \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

$$\rightarrow S_{DECB} = \frac{15\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{3} = \frac{14\sqrt{3}}{4} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

۱۴. اگر در مثلث ABC داشته باشیم $a^2 + b^2 - c^2 = 4S$ ، آن گاه اندازه زاویه C چند درجه است؟

به کمک قضیه کسینوس ها داریم:

$$4S = a^2 + b^2 - c^2 \Rightarrow 4S = a^2 + b^2 - c^2$$

$$-(a^2 + b^2 - 2ab \cos C) \Rightarrow 4S = 2ab \cos C$$

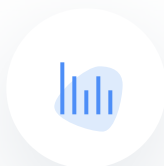
$$\Rightarrow 4 \times \frac{1}{2} ab \sin C = 2ab \cos C$$

$$\Rightarrow \tan C = 1 \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ$$



اپلیکیشن درسی همیار

برنامه رایگان درسی همیار



تمام پایه ها

جواب کتاب ، تدریس و نمونه سوال



همیشه رایگان

برنامه همیار کاملا رایگان میباشد