درس ۱ استدلال ریاضی

نقش استدلال در زندگی انسان‌ها انکارناپذیر است. همهٔ ما در زندگی روزمره و یا در زندگی حرفه‌ای خود نیازمند کسب توانمندی در این زمینه هستیم. تسلیم عقل در برابر استدلال موهبتی الهی است که امکان تعامل بین انسان‌ها و توسعه علوم گوناگون و رشد و بالندگی را در زمینه‌های مختلف برای بشر فراهم ساخته است. استدلال و اثبات در ریاضیات نیز جایگاه ویژه‌ای دارد. درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. آشنایی با روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات، هم به فهم ریاضیات و هم به بسط و توسعه آن کمک شایانی می‌نماید. هدف ما در این درس آشنایی با برخی از روش های استدلال و اثبات در ریاضی است.

مثال : درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید :

الف) مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

ب) عدد $۲^{۲^n}+۱$ به ازای همه عددهای طبیعی n، عددی اول است.

حل : گاهی ممکن است برای فهم یک گزاره، مثال‌هایی را برای صدق آن بررسی کنیم.

برای نمونه برای گزاره الف داریم :

$۵+۶+۷=۱۸$ $\qquad$ $۱۰+۱۱+۱۲=۳۳$

$۲۵+۲۶+۲۷=۷۸$ $\qquad$ $۳۱+۳۲+۳۳=۹۶$

در همه موارد حاصل جمع‌های به‌دست آمده، درستی گزاره الف را نشان می‌دهند همچنین برای $n=۱$, $n=۲$, $n=۳$ و $n=۴$ حاصل $۲^{۲^n}+۱$ به ترتیب برابر ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ است که همگی اعداد اول هستند و ظاهراً بر درستی گزاره ب دلالت می‌کنند.

آیا ارائه این مثال‌ها برای برقراری گزاره‌های الف و ب کافی هستند. اگر کافی نیست آیا ارائه مثال‌های بیشتر کفایت می‌کند؟

در مورد الف هر چقدر مثال ارائه کنید، مشاهده خواهید کرد که گزاره برقرار است، اما در مورد گزاره ب، اگر $n=۵$ آن‌گاه :

$$۲^{۲^n}+۱=۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷=۶۴۱\times ۶۷۰۰۴۱۷$$

که به وضوح نشان می‌دهد، حاصل یک عدد اول نیست. همین «مثال نقض» نشان می‌دهد که گزارهٔ ب در حالت کلی درست نیست. این روش استدلال به‌صورت معمول برای رد کردن یک حکم کلی به‌کار می‌رود و استدلال به کمک «مثال نقض» است.

در مورد گزاره الف با اینکه نمی‌توانید مثال نقضی ارائه کنید، امّا درستی گزاره با ارائه مثال به‌دست نمی‌آید. مثلاً یک احتمال این است که نتوانید مثال نقضی ارائه کنید و یا اینکه تاکنون مثال نقضی برای آن ارائه نشده باشد. به هر حال در اینجا اثبات دشوار نیست. کافی است سه عدد طبیعی را با n، $n+1$ و $n+2$ نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$n+n+1+n+2=3n+3=3(n+1)$$

که نشان می‌دهد گزاره الف در حالت کلی درست است.

این نوع اثبات کردن را «اثبات مستقیم» می‌نامند. البته اثبات مستقیم ممکن است کاملاً پیچیده باشد. هدف این کتاب طرح اثبات‌های دشوار نیست[1]. محتوای آموزش این درس در چارچوب مطالبی است که تاکنون آموخته‌اید. در کار در کلاس نمونه‌هایی از استدلال به روش «اثبات مستقیم» و استدلال به کمک «مثال نقض» را مشاهده خواهید کرد.

کار در کلاس

هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. گزاره صحیح است. اثبات: کافیست دو عدد فرد را با $2n-1$, $2m-1$ به فرض $n,m\in\mathbb{Z}$ نمایش دهیم. در این صورت: $2n-1+2m-1=2n+2m-2=2(n+m-1) \longrightarrow$ عدد زوج

ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y: $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

اگر $x=9$ و $y=16$ باشد، آنگاه:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{x+y}&=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}&=\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sqrt{x+y}\neq\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

بنابراین گزاره صحیح نیست.

پ) حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

گزاره صحیح است. اثبات: کافیست سه عدد طبیعی متوالی را با $n+1$ و $n+2$ و $n+3$ به فرض $n\in\mathbb{N}$ نمایش دهیم. در این صورت حاصل‌ضرب آنها $(n+3)(n+2)(n+1)$ خواهد بود و می‌توان نوشت:

$$(n+3)(n+2)(n+1)=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)\times n!\times 3!}{n!\times 3!}=\frac{(n+3)!}{n!\times 3!}\times 3!=\underbrace{\binom{n+3}{3}}_{\in\mathbb{N}}\times 6$$

$\Longrightarrow$ $(n+3)(n+2)(n+1)$ بر ۶ بخش‌پذیر است

ت) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد 2^n-1 اول است.

اگر $n=4$ آنگاه: $2^4-1=16-1=15$ ، عدد اول نیست. بنابراین گزاره غلط است.

ث) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

گزاره صحیح است. اثبات: کافیست دو عدد گویا را با $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ نمایش دهیم که a و b و c و d اعداد صحیح بوده و b و d مخالف صفر باشند، بنابراین:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{\text{عدد صحیح}}{\text{عدد صحیح ناصفر}}=\text{عدد گویا}$$

ج) اگر برای هر سه مجموعه A، B و C داشته باشیم $A\cup B=A\cup C$ آنگاه $B=C$

اگر $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{2,4\}$ و $C=\{4\}$ ، آنگاه $A\cup B=A\cup C=\{1,2,3,4\}$ ولی $B\neq C$.

چ) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k+1$ مربع کامل است.

گزاره صحیح است. اثبات: کافیست $k=n(n+1)$ به فرض $n\in\mathbb{N}$ در نظر گرفته شود، بنابراین:

$$4k+1=4n(n+1)+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2 \longrightarrow \text{مربع کامل}$$

خواندنی

یافتن مثال نقض ممکن است کار بسیار دشواری باشد. گاهی سال‌ها وقت برای یافتن مثال نقض لازم بوده است. به‌طور مثال عبارت $991n^2+1$ را برای nهای طبیعی درنظر بگیرید. اگر حاصل این عبارت را برای $n=1$، $n=2$، ... و $n=1000$ به‌دست آورید هیچ کدام مجذور کامل نمی‌باشند. آیا به نظر شما می‌توان حکم کرد که «برای nهای طبیعی عبارت $991n^2+1$ هیچ‌گاه مجذور کامل نیست.» پاسخ منفی است! سرپینسکی ریاضی‌دان معاصر لهستانی، کوچک‌ترین عدد طبیعی که به ازای آن $991n^2+1$ مجذور کامل باشد را ارائه کرد. این عدد ۲۹ رقم دارد! عدد $n=12055735790331359447442538737$ مثال نقض موردنظر است.

۱ــ طرح مسائل در ارزشیابی‌ها باید در سطح مطالب کتاب باشد. طرح مسائل پیچیده که نیاز به دانش محتوایی سطح بالا دارند مورد تأیید مؤلفین نیست.

اثبات با درنظر گرفتن همه حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همهٔ موارد ممکن درمورد مسئله را درنظر بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال : ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $n^۲ - ۵n + ۷$ عددی فرد است.

حل : دو حالت در اینجا ممکن است رخ دهد :

الف) n زوج است، به‌عبارت دیگر $n = ۲k$ $(k \in \mathbb{N})$؛ در این حالت داریم :

$$n^۲ - ۵n + ۷ = (۲k)^۲ - ۵(۲k) + ۷ = ۴k^۲ - ۱۰k + ۶ + ۱ = ۲(۲k^۲ - ۵k + ۳) + ۱$$

که حاصل یک عدد فرد است.

ب) n فرد است، یعنی $n = ۲k - ۱$ $(k \in \mathbb{N})$؛ در این حالت هم داریم :

$$n^۲ - ۵n + ۷ = (۲k - ۱)^۲ - ۵(۲k - ۱) + ۷ = ۴k^۲ - ۴k + ۱ - ۱۰k + ۵ + ۷$$
$$= ۴k^۲ - ۱۴k + ۱۳ = ۲(۲k^۲ - ۷k + ۶) + ۱$$

که باز هم حاصل یک عدد فرد است.

به عبارت دیگر زوج یا فرد بودن n، فرد بودن $n^۲ - ۵n + ۷$ را نتیجه می‌دهد.

اگر زوج بودن n را با p و فرد بودن n را با q و فرد بودن $n^۲ - ۵n + ۷$ را با r نمایش دهیم، حکم را می‌توان به‌صورت گزاره $p \vee q \Rightarrow r$ نمایش داد. با توجه به هم ارزی $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ شیوهٔ اثبات در مثال فوق توجیه می‌شود.

$$\begin{aligned} p \vee q \Rightarrow r &\equiv r \vee \sim (p \vee q) \\ &\equiv r \vee (\sim p \wedge \sim q) \\ &\equiv (r \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim q) \\ &\equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \end{aligned}$$

به‌طریق مشابه، برای هر تعداد متناهی گزارهٔ دلخواه داریم :

$$P_۱ \vee P_۲ \vee \dots P_n \Rightarrow r \equiv (P_۱ \Rightarrow r) \wedge (P_۲ \Rightarrow r) \wedge \dots (P_n \Rightarrow r)$$

نوعی دیگری از درنظر گرفتن حالت‌های ممکن، در مثال زیر ارائه شده است.

مثال : ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = ۰$ آنگاه $a = ۰$ یا $b = ۰$.

حل : برای a دو حالت ممکن است رخ دهد :

الف) اگر $a = ۰$، در این حالت حکم برقرار است (چرا؟) **زیرا گزاره $a = ۰$ یا $b = ۰$ یک ترکیب فصلی است و اگر $a = ۰$ درست فرض شود ، کل ترکیب درست خواهد بود .**

ب) اگر $a \neq ۰$، در این حالت $a^{-۱}$ (معکوس a) یک عدد حقیقی است و با ضرب طرفین رابطه $ab = ۰$ در $a^{-۱}$ داریم :

$$ab = ۰ \Rightarrow a^{-۱}(ab) = a^{-۱} \times ۰$$
$$\Rightarrow b = ۰$$

بنابراین در هر دو حالت حکم برقرار است.

الف) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید a^2+b^2 زوج است.

فقط درحالتی ab فرد است که a و b هردو فرد باشند زیرا اگر حداقل یکی از آنها زوج باشد ab زوج خواهد شد. بنابراین با فرض $a=2n-1$ و $b=2m-1$ ، $n,m\in\mathbb{Z}$ داریم:

$$a^2+b^2=(2n-1)^2+(2m-1)^2=4n^2-4n+1+4m^2-4m+1=4n^2-4n+4m^2+2=2(2n^2-2n+2m^2-2m+1)$$

که حاصل عددی زوج است.

ب) $A=\{3,4\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S=\{1,2,\dots,6\}$ است و $n\in S$، اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج باشد ثابت کنید $n\in A$.

کافیست هر شش عضو S را بررسی کنیم (در نظر گرفتن تمام حالت ها):

$n=1 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{1\times 4}{4}=1 \longrightarrow$ زوج نیست

$n=2 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{4\times 9}{4}=9 \longrightarrow$ زوج نیست

$n=3 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{9\times 16}{4}=36 \longrightarrow$ زوج است

$n=4 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{16\times 25}{4}=100 \longrightarrow$ زوج است

$n=5 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{25\times 36}{4}=225 \longrightarrow$ زوج نیست

$n=6 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{36\times 49}{4}=441 \longrightarrow$ زوج نیست

بنابراین فقط برای $n=3$ و $n=4$ ، عدد $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج می‌باشد به عبارت دیگر $n\in A$ است.

اثبات غیرمستقیم

اثبات به روش برهان خلف

در هندسه (۱) با اثبات به روش برهان خلف که نوعی اثبات غیرمستقیم است آشنا شده‌اید. در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک نتیجه غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا (با توجه به منطقی بودن همه مراحل) معلوم می‌شود که فرضِ نادرست بودنِ حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

در تعاملات و محاورات روزمره هم ممکن است از این روش استدلال استفاده کنیم. آنجا که با فردی نظری کاملاً متضاد داریم و به درستی نظر خود اطمینان داریم، برای رسیدن به نتیجه موردنظرمان، موقتاً نظر مخالف خود را می‌پذیریم و با استفاده از دنباله‌ای از استدلال‌ها و ادبیاتی که مورد توافق دو طرف است، نشان می‌دهیم که پذیرفتن نظر او به بن بست یا تناقض منجر می‌شود.

مثال : ثابت کنید حاصل‌جمع یک عددگویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل : فرض کنیم که r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد. نشان می‌دهیم که $r+x$ یک عدد گنگ است. اگر (فرض خلف) $r+x$ گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است. از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویا است. پس تفاضل $r+x$ و r باید عددی گویا باشد یعنی $r+x-r\in Q$ و از آنجا $x\in Q$ که با فرض ما در تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌گردد.

مثال : حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل : فرض کنیم r یک عدد گویای ناصفر باشد و x عددی گنگ باشد ولی rx عددی گویا (فرض خلف) باشد. می‌دانیم که حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویاست. علاوه بر این معکوس هر عدد گویای ناصفر هم عددی گویاست. بنابراین $(\frac{1}{r})(rx)\in Q$ و از آنجا $x\in Q$ که با فرض در تناقض است.

مثال : a_1 ، a_2 و a_3 عددهایی صحیح هستند و b_1 ، b_2 و b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است.

حل : برای درک بهتر مسئله، مثالی ارائه می‌کنیم. a_1 ، a_2 و a_3 را به‌ترتیب، ۵، ۸ و ۱ درنظر می‌گیریم و b_1 ، b_2 و b_3 را ۸، ۱ و ۵ درنظر می‌گیریم، داریم :

$$(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)=(5-8)(8-1)(1-5)=(-3)(7)(-4)=84$$

اگر $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است. پس هر سه عامل a_1-b_1 ، a_2-b_2 و a_3-b_3 هم باید فرد باشند (چرا؟) و درنتیجه مجموع آنها هم باید عددی فرد باشد، یعنی $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)$ باید عددی فرد باشد. امّا مجموع این سه عبارت صفر است!

زیرا فقط حاصلضرب سه عدد فرد ، عددی فرد خواهد شد و در صورتی که حداقل یکی از آنها زوج باشد ، حاصلضرب زوج می شود .

کار در کلاس

درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید.

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

برهان خلف : فرض می‌کنیم $\frac{1}{x}$ عددی گویا باشد، از طرفی می‌دانیم وارون هر عدد گویای ناصفر، عددی گویاست پس وارون $\frac{1}{x}$ یعنی x نیز گویاست که با فرض سؤال تناقض دارد، پس $\frac{1}{x}$ عددی گنگ است

ب) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ولی g در $x=a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

برهان خلف : فرض می‌کنیم $f+g$ در $x=a$ پیوسته باشد، از طرفی تفریق دو تابع پیوسته، پیوسته است پس $g=(f+g)-f$ در $x=a$ پیوسته است که با فرض سؤال تناقض دارد پس $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

اثبات‌های بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد آنها را گزاره‌های هم ارز (هم‌ارزش) می‌نامیم.

اگر P و Q دو گزاره هم ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آن‌گاه گزاره‌های $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ هر دو درست هستند و در نتیجه $P \Leftrightarrow Q$ یک گزاره درست است.

به عکس اگر ترکیب دو شرطی $P \Leftrightarrow Q$ درست باشد، آن‌گاه P و Q دو گزاره هم‌ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی از آنها را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود. به کمک این موضوع می‌توانیم درستی یا نادرستی یک گزاره را بررسی کنیم. در عمل به‌طور معمول درستی یا نادرستی گزاره‌ای که معمولاً ساده‌تر است را انتخاب می‌کنیم. البته این کار ممکن است که در یک مرحله انجام نشود، به‌طور مثال اگر P ، Q و R سه گزاره باشند و $P \Leftrightarrow Q$ و $Q \Leftrightarrow R$ یعنی ارزش سه گزاره یکسان است و اثبات درستی یا نادرستی هر یک، تکلیف دو گزاره دیگر را معلوم خواهد کرد. به‌هر حال ممکن است این عمل ادامه یابد و در تعدادی متناهی مرحله کار انجام شود.

با توجه به آنچه گفته شد، در هنگام استفاده از این روش اثبات (که گاهی به آن «روش بازگشتی» هم می‌گویند) توانایی ارائه ترکیب دو شرطی درست و مناسب بسیار اساسی است.

مثال : ترکیب دو شرطی $a=b \Leftrightarrow a^3=b^3$ ، $(a,b\in\mathbb{R})$ درست است ولی ترکیب دو شرطی $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$ درست نیست (چرا؟)

زیرا $a^2=b^2 \Rightarrow a=b \quad \vee \quad a=-b$ و نمی توان به طور قطع ادعا کرد $a^2=b^2 \Rightarrow a=b$

اگر $a,b\in\mathbb{R}$ کدام‌یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

الف) $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$

ب) $a<b \Leftrightarrow a^3<b^3$ درست

نادرست ، به طور مثال از $-3<2$ نتیجه می‌شود که $9<4$ و این نامساوی منطقی نیست

مثال : اگر $a>0$ ثابت کنید $a+\frac{1}{a}\geq 2$

اگر $a>0$، داریم : $a+\frac{1}{a}\geq 2 \Leftrightarrow a^2+1\geq 2a$

این ترکیب دو شرطی بیان نمی‌کند که کدام گزاره درست است، بلکه تنها بیانگر آن است که دو گزاره هم ارز هستند و اثبات هر کدام، دیگری را نتیجه می‌دهد. به نظر شما چرا این دو گزاره هم ارز هستند؟ **زیرا می توان طرفین یک نامساوی را در هر عدد مثبت (مانند a)ضرب یا بر آن تقسیم‌کرد.** اثبات کدام‌یک ساده‌تر است؟ **اثبات $a^2+1\geq 2a$ ساده تر است.**

همچنین $a^2+1\geq 2a \Leftrightarrow a^2+1-2a\geq 0$

و درنهایت : $a^2+1-2a\geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2\geq 0$

آخرین گزاره یعنی $(a-1)^2\geq 0$ همواره برقرار است، به‌عبارت دیگر حکم هم ارز گزاره‌ای است که همواره برقرار است. پس حکم ثابت شده است. مراحل اثبات را (با شرط $a>0$) به صورت زیر می‌توان خلاصه کرد :

$$a+\frac{1}{a}\geq 2 \Leftrightarrow a^2+1\geq 2a$$
$$\Leftrightarrow a^2+1-2a\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a-1)^2\geq 0 \quad \text{همواره برقرار است.}$$

به هر حال این نوع استدلال در گفت‌وگوها و مذاکرات معمول هم مورد استفاده قرار می‌گیرد، آنجا که برای بررسی یک حکم، معادل آن را به مخاطب یادآوری می‌کنیم و از عباراتی نظیر : آنچه که شما می‌گویید معادل این است که ....، یا گفته شما به مثابه آن است که ....، در آنجا باید از قوانین و ادبیات مورد پذیرش طرفین پیروی کنیم و در ریاضیات از منطق ریاضی. در هر حال در هنگام استفاده از این نوع استدلال در زندگی روزمره هم ممکن است پس از چند مرحله به نتیجه برسیم.

مثال : ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

حل : اگر a و b دو عدد نامنفی باشند، حکم ما چنین خواهد بود : $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab}$$
$$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0 \quad \text{گزاره همیشه درست.}$$

مثال : اگر b و a دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید : $a^2+ab+b^2\geq 0$

حل : $a^2+ab+b^2\geq 0 \Leftrightarrow (a+\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4}\geq 0$

اثبات کوتاه و زیبایی است. حکم با یک گزاره همیشه درست (سمت راست) هم‌ارز است.

راه دوم :

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2ab + 2b^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab + a^2 + b^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 \geq 0$$ گزاره همیشه درست.

البته ممکن است شما هم راه‌حل دیگری برای این مسئله ارائه کنید.

شیوه‌ای که در این قسمت از درس مورد استفاده قرار گرفت را برای نشان دادن نادرستی یک گزاره نیز می‌توان به‌کار برد.

کار در کلاس

الف) اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم‌ارزند؟

بله هم‌ارز می‌باشند. اثبات :

فرض کنیم n زوج است و نشان می‌دهیم n^2 زوج است : $n=2k \Rightarrow n^2=4k^2=2(2k^2) \rightarrow$ زوج است

اثبات عکس: فرض کنیم n^2 زوج است و نشان می‌دهیم n زوج است :

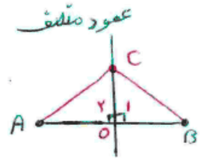
برهان خلف : اگر n زوج نباشد پس n عددی فرد خواهد بود یعنی :

$n=2k-1 \Rightarrow n^2=4k^2-4k+1=2(2k^2-2k)+1 \rightarrow$ n^2 فرد است ← تناقض

بنابراین : n^2 زوج است $\Longleftrightarrow$ n زوج است

ب) آیا دو گزاره زیر هم‌ارزند؟

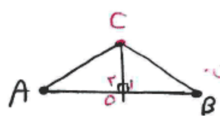
۱ نقطه C روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارد. ۲ فاصله نقطه C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.



اثبات ① ⇐ ② :

$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1=\hat{O}_2\\ AO=OB\\ OC=OC\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} A\overset{\triangle}{O}C \cong B\overset{\triangle}{O}C \Rightarrow AC=BC \Rightarrow$$

فاصله نقطه‌ی C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است



اثبات ② ⇐ ① : با فرض $AC=BC$ ، ارتفاع OC وارد بر ضلع AB را رسم کرده، نشان می‌دهیم OC عمود منصف است.

$$\left.\begin{array}{l}AC=BC\\ OC=OC\\ \hat{O}_1=\hat{O}_2=90^\circ\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} A\overset{\triangle}{O}C \cong B\overset{\triangle}{O}C \Rightarrow AO=OB \Rightarrow$$

OC عمود منصف پاره‌خط AB است

بنابراین : ① $\Longleftrightarrow$ ② یعنی دو گزاره هم‌ارزند.

تمرین

۱ گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید : **پاسخ تمرینها در صفحات بعد می باشد .**

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی **هم‌علامت** (مخالف صفر) باشند داریم : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم :

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$$
$$x^2+y^2+1 \geq xy+x+y$$

۲ عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به‌طوری‌که $x^3 < x^2$.

۳ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+2\beta$ گنگ هستند.

۴ آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که $x^2+y^2=(x+y)^2$

۵ آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که :

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \qquad (a+b \neq 0)$$

۶ گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آنها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

پاسخ تمرین صفحه ۸ کتاب درسی:

① الف) اگر x و y دو عدد حقیقی هم‌علامت (مخالف صفر) باشند داریم: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

x و y هم‌علامتند، بنابراین $xy>0$ خواهد بود.

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2 \iff xy\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geq 2xy \iff x^2+y^2\geq 2xy \iff x^2+y^2-2xy\geq 0$$

$$\iff (x-y)^2\geq 0 \quad \text{همیشه درست}$$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم:

$$(\text{I})\quad x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$$

ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\iff 2x^2+2y^2+2z^2\geq 2xy+2yz+2zx$$

$$\iff \underline{x^2}+\underline{\underline{x^2}}+\underline{y^2}+\underline{\underline{y^2}}+\underline{z^2}+\underline{\underline{z^2}}-\underline{2xy}-\underline{\underline{2yz}}-\underline{\underline{\underline{2zx}}}\geq 0$$

$$\iff (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\geq 0 \quad \text{همیشه درست}$$

$$(\text{II})\quad x^2+y^2+1\geq xy+x+y$$

ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\iff 2x^2+2y^2+2\geq 2xy+2x+2y$$

$$\iff \underline{x^2}+\underline{\underline{x^2}}+\underline{y^2}+\underline{\underline{y^2}}+\underline{1}+\underline{\underline{1}}-\underline{2xy}-\underline{\underline{2x}}-\underline{\underline{\underline{2y}}}\geq 0$$

$$\iff (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\geq 0 \quad \text{همیشه درست}$$

② عدد حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که $x^3<x^2$. جواب: $x=0/1$ ، $x=-1$ و $x=-2$ و ...

③ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+2\beta$ گنگ هستند.

(I) فرض کنیم $\alpha-\beta$ گویا باشد از طرفی $\alpha+\beta$ گویاست پس مجموع آنها یعنی $\alpha+\beta+\alpha-\beta=2\alpha$ گویا بوده و در نتیجه α نیز گویاست که با فرض تناقض دارد پس $\alpha-\beta$ گنگ است.

(II) فرض کنیم $\alpha+2\beta$ گویا باشد از طرفی $\alpha+\beta$ گویاست پس تفاضل آنها یعنی $\beta=(\alpha+2\beta)-(\alpha+\beta)$ گویاست که با فرض تناقض دارد پس $\alpha+2\beta$ گنگ است.

④ آیا اعداد صحیح مانند x و y وجود دارند که $x^2+y^2=(x+y)^2$

$$x^2+y^2=x^2+y^2+2xy \Rightarrow 2xy=0 \Rightarrow x=0 \ \vee\ y=0$$

حداقل یکی از اعداد x و y باید صفر باشند به طور مثال $x=0$ و $y=7$ جواب است.

⑤ آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که: $(a+b\neq 0)$ $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

خیر - اثبات: برهان خلف. فرض کنیم چنین اعدادی وجود داشته باشند، بنابراین:

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Rightarrow \frac{1}{a+b}=\frac{a+b}{ab}\Rightarrow (a+b)^2=ab \Rightarrow a^2+b^2+2ab=ab$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+ab=0 \xrightarrow{\times 2} 2a^2+2b^2+2ab=0 \Rightarrow a^2+\underline{a^2}+b^2+\underline{b^2}+\underline{2ab}=0$$

$$\Rightarrow (a+b)^2+a^2+b^2=0 \Rightarrow a=0 \ \wedge\ b=0 \ \wedge\ a+b=0 \Rightarrow \text{تناقض}$$

۶) الف) مربع و مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است. صحیح است زیرا :

$2n-1$: عدد فرد ، $n \in \mathbb{Z}$

$\xrightarrow{\text{مربع}} (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 2(2n^2 - 2n) + 1 \longrightarrow$ فرد است

$\xrightarrow{\text{مکعب}} (2n-1)^3 = 8n^3 - 12n^2 + 6n - 1 = 2(4n^3 - 6n^2 + 3n) - 1 \longrightarrow$ فرد است

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است. صحیح است زیرا :

پنج عدد طبیعی متوالی : $n+1$ و $n+2$ و $n+3$ و $n+4$ و $n+5$ ، $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\text{میانگین اعداد} = \frac{\text{مجموع اعداد}}{\text{تعداد اعداد}} = \frac{5n+15}{5} = n+3 = \text{عدد وسطی}$$

نویسنده پاسخ ها : افشین ملاسعیدی

شهرستان : آبادان