درس ۲ بخش‌پذیری در اعداد صحیح[1]

قرار دادن تعدادی شیء در دسته‌های مساوی یا دسته‌بندی کردن تعدادی از چیزها را، بدون آنکه باقی‌مانده‌ای داشته باشیم، «عاد کردن» یا شمارش آن اشیا، توسط شمارنده‌ها می‌گویند. مثلاً، ۱۲ شیء را می‌توان با شمارنده‌های مثبتِ عدد ۱۲ یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۱۲ دسته‌بندی یا شمارش کرد.

در این فصل برای نمایش این مفهوم از نماد «|» استفاده کرده و مثلاً می‌نویسیم ۲|۱۲ و می‌خوانیم عدد ۲ عدد ۱۲ را می‌شمارد یا عاد می‌کند. بیان دیگر این مفهوم آن است که بگوییم عدد ۱۲ بر عدد ۲ بخش‌پذیر است (باقی‌ماندهٔ تقسیم صفر است).

توجه داشته باشید که دسته‌بندی کردن اشیا در دسته‌های صفرتایی یا شمارش تعدادی شیء خاص به‌صورت صفر تا صفر کار بی‌معنایی است؛ لذا صفر هیچ عدد غیر صفری را نمی‌شمارد و هیچ عدد غیر صفری بر صفر بخش‌پذیر نمی‌باشد در ضمن توجه داشته باشید که هر عدد بر خودش و بر ۱ بخش‌پذیر است؛ یعنی اگر a عددی طبیعی باشد $1|a$ و $a|a$. (عدد ۱ هر عدد صحیح را عاد می‌کند و هر عدد برخودش بخش‌پذیر است).

حال با توجه به اینکه مفهوم بخش‌پذیری b بر a معادل است با اینکه بنویسیم $a|b$ (عدد a، عدد b را می‌شمارد یا عدد a، عدد b را عاد می‌کند) مفهوم بخش‌پذیری را می‌توان برای هر دو عدد صحیح به‌کار برد، مثلاً می‌توان گفت، عدد -28 بر ۴ بخش‌پذیر است (زیرا، $(-7)\times 4=-28$ یا باقی‌مانده تقسیم -28 بر عدد ۴ صفر است) پس در حالت کلّی و با تعمیم مفهوم عاد کردن به مجموعهٔ اعداد صحیح عاد کردن به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

> عدد صحیح a، که مخالف صفر است[2]، شمارندهٔ عدد b است ــ یا a، b را می‌شمارد یا $a|b$ یا b بر a بخش‌پذیر است ــ هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به‌طوری که $b=aq$.
>
> اگر عدد b بر عدد a بخش‌پذیر نباشد یا عدد a عدد b را عاد نکند می‌نویسیم، $a \nmid b$

۱ــ در سراسر این فصل منظور از عدد، عدد صحیح است.

۲ــ اینکه صفر عدد صفر را می‌شمارد به‌صورت یک قرارداد پذیرفته می‌شود.

کار در کلاس

۱ با توجه به تعریف رابطهٔ عاد کردن جاهای خالی را پر کنید.

الف) $۷|۶۳ \Leftrightarrow ۶۳=۷\times۹$

ب) $۹۱=۷\times۱۳ \Leftrightarrow ۷|۹۱$

پ) $-۶|۵۴ \Leftrightarrow ۵۴=(-۹)\times(-۶)$

ت) $۵|-۳۵ \Leftrightarrow -۳۵=۵\times(-۷)$

ث) $۰=۱۸\times۰ \Leftrightarrow ۱۸|۰$

ج) $a|۱ \Rightarrow a=+۱$ یا $a=-۱$

چ) $۲۶=۲\times۱۳ \Rightarrow ۲|۲۶$ و $۱۳|۲۶$

۲ با استفاده از تعریف عاد کردن و قوانین ضرب و تقسیمِ اعداد توان‌دار با پایه‌های برابر، ابتدا نشان دهید که $۳^۵|۳^۹$ و سپس ثابت کنید :

$\forall m,n\in\mathbb{N}; m\le n \Rightarrow a^m | a^n$

$(۳^۹=۳^۵\times۳^۴ \overset{(۳^۴=q)}{\Rightarrow} ۳^۵|۳^۹)$

$a^n=a^m\times a^{n-m} \Rightarrow a^m|a^n$

ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن

ویژگی ۱ : اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیحِ عدد b را نیز می‌شمارد؛ یعنی :

$$\boxed{a|b \Rightarrow a|mb}$$

مثال: $۳|۶ \Rightarrow ۳|۶\times۵ , ۳|۶\times۴ , ۳|۶\times(-۷) , \cdots$

نتیجه : اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه $b^۲$ را می‌شمارد و در حالت کلّی b^n را می‌شمارد که $n\in\mathbb{N}$ است. یعنی :

الف) $a|b \Rightarrow a|b^۲$

ب) $a|b \Rightarrow a|b^n$

برای اثبات (الف) کافی است از ویژگی ۱ استفاده کرده و m را مساوی با b فرض کنیم؛ و برای اثبات (ب) نیز کافی است $m=b^{n-۱}$ فرض شود.

سؤال : آیا از اینکه $a|bc$ می‌توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می‌کند؟ خیر نمی توان چنین نتیجه ای گرفت .

به گزاره‌های زیر دقت کنید و پس از آن پاسخ دهید :

الف) $۳|۶\times۹$ و $۳|۶$ و $۳|۹$

ب) $۳|۶\times۵$ و $۳|۶$ و $۳\nmid۵$

ج) $۶|۳\times۴$ و $۶\nmid۳$ و $۶\nmid۴$

سؤال : آیا از اینکه $a|b$ می‌توان نتیجه گرفت که $ka|kb$؟ آیا از $ka|kb$ می‌توان نتیجه گرفت $a|b$؟ $(k\in\mathbb{Z})$ $(k\neq۰)$

$a|b \Rightarrow b=aq \overset{\text{در } k \text{ ضرب}}{\Rightarrow} kb=kaq \Rightarrow ka|kb$

$ka|kb \Rightarrow kb=kaq \overset{\text{بر } k \text{ تقسیم}}{\Rightarrow} b=aq \Rightarrow a|b$

ویژگی ۲ : اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد آنگاه عدد a عدد c را می‌شمارد.

$$\boxed{a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c}$$

اثبات: $\begin{cases} a\,|\,b \Rightarrow b = aq_۱ \,(۱) \\ b\,|\,c \Rightarrow c = bq_۲ \end{cases}$

$$c = bq_۲ \overset{(۱)}{\Rightarrow} c = aq_۱q_۲ \xrightarrow{q_۱q_۲=q} c = aq \Rightarrow a|c$$

این خاصیّت را «خاصیت تعدّی» برای رابطهٔ عاد کردن می‌نامیم.

سؤال : با استفاده از خاصیت تعدّی برای رابطهٔ عاد کردن، نشان دهید که :

$$a|b \Rightarrow a|b^n$$

اثبات: طبق فرض: $a\,|\,b$ و می‌دانیم: $b\,|\,b^n$ $\overset{\text{تعدی}}{\Rightarrow} a|b^n$

ویژگی ۳ : هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$\boxed{a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c}$$

اثبات: $\left.\begin{matrix} a\,|\,b \Rightarrow b = a \times q_۱ \\ a\,|\,c \Rightarrow c = aq_۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \pm c = a\underbrace{(q_۱ \pm q_۲)}_{q} \Rightarrow a|b \pm c$

سؤال : آیا از اینکه $a|b+c$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a|c$ یا $a|b$؟ خیر به طور مثال $۳|۵ \pm ۲$ ولی $۳ \nmid ۲$ و $۵ \nmid ۲$

ویژگی ۴ : اگر $a|b$ و $b \neq ۰$ در این صورت $|a| \leq |b|$.

اثبات : چون $a|b$ پس $b = aq$ و چون $b \neq ۰$ پس $q \neq ۰$ و چون $q \in \mathbb{Z}$ لذا $|q| \geq ۱$. حال اگر طرفین نامساوی اخیر را در $|a|$ ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$۱ \leq |q| \Rightarrow |a| \times ۱ \leq |a|\,|q| \Rightarrow |a| \leq |aq| \Rightarrow |a| \leq |b|$$

نتیجه : اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه $a = \pm b$.

اثبات : در صورتی که یکی از اعداد صفر باشند ، دیگری نیز صفر خواهد بود زیرا فقط صفر می تواند صفر را عاد کند . اما در حالتی که هر دو عدد ناصفر باشند ، خواهیم داشت :

$$\left.\begin{matrix} a\,|\,b \overset{(۴)}{\Rightarrow} |a| \leq |b| \\ b\,|\,a \overset{(۴)}{\Rightarrow} |b| \leq |a| \end{matrix}\right\} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$$

کار در کلاس

۱ اگر $a \neq ۰$ عددی صحیح و دو عدد $(۷m+۶)$ و $(۶m+۵)$ بر a بخش‌پذیر باشند ثابت کنید $a = \pm ۱$.

$$\left.\begin{matrix} a\,|\,۷m+۶ \Rightarrow a\,|\,۴۲m+۳۶ \\ a\,|\,۶m+۵ \Rightarrow a\,|\,۴۲m+۳۵ \end{matrix}\right\} \Rightarrow a\,|(۴۲m+۳۶)-(۴۲m+۳۵)$$

$\Rightarrow a|۱ \Rightarrow a = \pm ۱$ (چرا؟)

$$|a| \leq ۱ \xrightarrow{|a| \in \mathbb{N}} |a| = ۱ \Rightarrow a = \pm ۱$$

۲ اگر $a|b$ نشان دهید که $a^n|b^n$.

اثبات: $a|b \Rightarrow b=aq \Rightarrow b^n = a^n q^n \xrightarrow{q^n=q'} b^n = a^n q' \Rightarrow a^n|b^n$

۳ اگر $a|b$ و $c|d$ نشان دهید که $ac|bd$.

$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow b=aq_1 \\ c|d \Rightarrow d=cq_2 \end{array}\right\} \Rightarrow b\times d=(a\times c)\underbrace{(q_1 q_2)}_{q}$$

$$\Rightarrow b\times d = a\times c\times q \Rightarrow ac|bd$$

۴ اگر $a|b$ و $a|c$ نشان دهید که $a|mb \pm nc$.
(از ویژگی ۱ و ویژگی ۳ استفاده کنید).

$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow a|mb \\ a|c \Rightarrow a|nc \end{array}\right\} \xrightarrow{\pm} a|mb \pm nc$$

شما در سال‌های قبل با تعریف و مفهوم اعداد اول آشنا شده‌اید و می‌دانید که هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارندهٔ مثبتی به‌جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. مجموعهٔ اعداد اول، که ثابت شده است مجموعه‌ای نامتناهی است، به‌صورت $P=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,...\}$ نمایش داده می‌شود.

تذکر : با توجه به تعریف عدد اول، اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a|p$ در این‌صورت $a=۱$ یا $a=p$.

مثال : اگر عدد طبیعی a دو عدد $(۹k+۷)$ و $(۷k+۶)$ را عاد کند، ثابت کنید $a=۱$ یا $a=۵$.

$a|۹k+۷ \Rightarrow a|۷\times(۹k+۷)$

$\Rightarrow a|۶۳k+۴۹$

$a|۷k+۶$

$\Rightarrow a|۹\times(۷k+۶) \Rightarrow a|۶۳k+۵۴$

$\Rightarrow a|(۶۳k+۵۴)-(۶۳k+۴۹)$

$\Rightarrow a|۵ \Rightarrow a=۵$ یا $a=۱$

خواندنی

می‌دانیم که هر عدد طبیعی و کوچک‌تر یا مساوی ۱۰ عدد !۱۰ را عاد می‌کند (چرا؟) و به‌طور کلّی می‌توان نوشت : $\forall k \le n$ ، $k|n!$؛ بنابراین عدد ۲+!۱۰۰ و همین‌طور عدد ۳+!۱۰۰ و ... و بالاخره عدد ۱۰۰+!۱۰۰ همه اعدادی غیراول هستند. بنابراین با توجه به اینکه اعداد (۲+!۱۰۰) و (۳+!۱۰۰) و ... (۱۰۰+!۱۰۰)، تعداد ۹۹ عدد طبیعی و متوالی‌اند ما توانسته‌ایم ۹۹ عدد طبیعی متوالی بیابیم که هیچ‌کدام اول نباشند.

آیا شما می‌توانید ۱۵ عدد طبیعی متوالی بیابید که هیچ‌کدام اول نباشند؟ ۱۶!+۲, ۱۶!+۳ , ... , ۱۶!+۱۶
(برای اینکه نشان دهیم عدد ۷+!۱۰۰ بر ۷ بخش‌پذیر است، کافی است از عدد ۷ در دو عدد !۱۰۰ و ۷، فاکتور بگیریم یا با استفاده از خواص عاد کردن بنویسیم : ۷|۷ و ۷|۱۰۰! ⇒ ۷|۱۰۰!+۷)

بزرگ‌ترین مقسومٌ‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد

می‌خواهیم با توجه به تعریف رابطهٔ عاد کردن، مفاهیم ب م م (بزرگ‌ترین مقسومٌ‌علیه مشترک) و ک م م (کوچک‌ترین مضرب مشترک) دو عدد را معرفی کنیم.

توجه دارید که مقسوم‌علیه همان شمارنده است. به عبارت دیگر، اگر بنویسیم $a|b$، یعنی a شمارندهٔ b است یا b بر a بخش‌پذیر است و این یعنی a مقسوم‌علیه b است؛ و نیز توجه دارید که b مضرب a است، یعنی $b=aq$ یا $a|b$.

تعریف : عدد طبیعی d را ب م م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد و اگر دو شرط زیر برقرار باشد آنگاه $(a,b)=d$.

الف) $d|a, d|b$

ب) $\forall m>0 : m|a, m|b \Rightarrow m \le d$

شرط (الف) مقسومٌ‌علیه مشترک بودن را برای d تأمین می‌کند و شرط (ب) نشان می‌دهد که d از هر مقسوم‌علیه مشترک دلخواهی چون m بزرگ‌تر یا مساوی است.

اگر داشته باشیم $(a,b)=1$ در این صورت می‌گوییم، a و b نسبت به هم اول‌اند.

مثال : $(1,12)=1$, $(7,11)=1$, $(4,9)=1$, $(3,4)=1$

$(4,-6)=2$, $(0,6)=6$, $(8,16)=8$, $(6,9)=3$

تعریف : عدد طبیعی c را ک م م دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b]=c$، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد، و اگر این دو شرط برقرار باشد آنگاه $[a,b]=c$

الف) $a|c$, $b|c$

ب) $\forall m>0$, $a|m$, $b|m \Rightarrow c \le m$

توضیح دهید که هریک از شرط‌های (الف) و (ب) کدام ویژگی را تأمین می‌کنند؟

شرط (الف) مضرب مشترک بودن را برای c تامین می کند و شرط (ب) نشان می دهد که از مضرب مشترک دلخواهی چون m، کوچکتر یا مساوی است .

مثال : $[-4,16]=16$, $[1,8]=8$, $[6,4]=12$, $[3,4]=12$

کار در کلاس

1 با توجه به تعاریف ب م م و ک م م ثابت کنید :

الف) $a|b \Rightarrow (a,b)=|a|$

شرط اول : $|a|\,|a \xrightarrow{a|b} |a|\,|b$

شرط دوم : $\forall m>0 : m|a \wedge m|b \Rightarrow m|a \Rightarrow |m| \le |a| \xrightarrow{m>0} m \le |a|$

ب) $a|b \Rightarrow [a,b]=|b|$

شرط اول : $b\,\big|\,|b| \xrightarrow{a|b} a\,\big|\,|b|$

شرط دوم : $\forall m>0 : a|m \wedge b|m \Rightarrow b|m \Rightarrow |b| \le |m| \xrightarrow{m>0} |b| \le m$

راهنمایی : برای اثبات (الف) باید دو شرط موجود در تعریف ب م م را برای $|a|$ بررسی کنیم، یعنی نشان دهیم که $|a|\,|a$ و . . . و نیز برای هر $m>0$ که $m|a$ و $m|b$ نشان دهیم $m \le |a|$ و همین‌طور برای اثبات (ب) . . .

۲ اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$ ، ثابت کنید، $(p,a) = ۱$

فرض کنیم $(p,a) = d$
$d \mid p \overset{p \text{ اول}}{\Rightarrow} d = ۱$ یا $d = p$
$d \mid a$ ①

اگر $d = p \overset{①}{\Rightarrow} p \mid a$ (و این با فرض $p \nmid a$ تناقض دارد)

پس فقط $d = ۱$ یا $(p,a) = ۱$.

تذکر : توجه دارید که در مورد اعدادی که اول نباشند، مطلبِ کار در کلاس ۲ ممکن است برقرار نباشد :

مثال: $۴ \nmid ۶$ ولی $(۴,۶) = ۲ \neq ۱$

قضیه تقسیم و کاربردها

ممکن است در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده صفر نباشد، یعنی a بر b بخش‌پذیر نباشد $(b \nmid a)$. در این‌صورت قضیهٔ تقسیم که به بیان آن خواهیم پرداخت (این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم) کمک می‌کند تا بحث بخش‌پذیری در $\mathbb{Z}$ را کامل کنیم.

قضیه تقسیم : اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این‌صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $۰ \leq r < b$.

مثال : اگر ۲۵ را بر ۷ تقسیم کنیم داریم : $q = ۳$ و $r = ۴$، و به عبارت دیگر $۲۵ = (۷ \times ۳) + ۴$. حال اگر ۲۵- را بر ۷ تقسیم کنیم و $q = -۳$ در نظر بگیریم، در این صورت تساوی $-۲۵ = ۷ \times (-۳) - ۴$ حاصل می‌شود که نمی‌توان (-۴) را به عنوان باقی‌مانده معرفی کرد، زیرا طبق قضیه تقسیم باقی‌مانده باید نامنفی و کوچک‌تر از مقسوم‌علیه باشد در این صورت با اضافه و کم کردن مضارب مثبتی از مقسومٌ‌علیه، شرایط قضیه تقسیم را برقرار می‌کنیم :

$$-۲۵ = ۷ \times (-۳) - ۴ = ۷ \times (-۳) - ۴ - ۷ + ۷$$

$$= ۷ \times (-۳) - ۷ + ۳ = ۷\underbrace{[(-۳) - ۱]}_{q} + ۳ = ۷q + ۳ \Rightarrow r = ۳$$

تذکر : همان‌طور که از دورهٔ ابتدایی به‌خاطر دارید در تقسیم عدد a بر b، a را مقسوم، b را مقسومٌ‌علیه، q را خارج قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم.

مثال : اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این‌صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(۲m - ۵n)$ بر ۱۷ را به‌دست آورید.

حل :

طبق فرض: $m = ۱۷q_۱ + ۵$
طبق فرض: $n = ۱۷q_۲ + ۳$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲m = ۲ \times ۱۷q_۱ + ۱۰ \\ -۵n = (-۵) \times ۱۷q_۲ - ۱۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (۲m - ۵n) = ۱۷\,(۲q_۱ - ۵q_۲) - ۵$$

$$= ۱۷\,(۲\,q_۱ - ۵\,q_۲) - ۵ - ۱۷ + ۱۷$$

$$= ۱۷(\underbrace{۲q_۱ - ۵q_۲}_{q_۳} - ۱) + ۱۷ - ۵$$

$$\Rightarrow (۲m - ۵n) = ۱۷(\underbrace{q_۳ - ۱}_{q}) + ۱۲$$

$$= ۱۷q + ۱۲ \Rightarrow r = ۱۲$$

افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم

با توجه به قضیهٔ تقسیم، می‌دانیم که اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی b، و با توجه به اینکه باقی‌ماندهٔ تقسیم یعنی r در رابطهٔ $۰ \leq r < b$ صدق می‌کند، برای a برحسب r دقیقاً b حالت وجود دارد، مثلاً اگر عدد صحیح a را بر ۵ تقسیم کنیم در این صورت یا a بر ۵ بخش‌پذیر است، یعنی $r=۰$، یا باقی‌مانده تقسیم a بر ۵ عدد ۱ است یا . . . یا باقی‌ماندهٔ تقسیم ۴ است؛ به عبارت دیگر، $a=۵k$ یا $a=۵k+۱$ یا $a=\cdots$ یا $a=۵k+۳$ یا $a=\cdots$ پس می‌توان گفت هر عدد صحیح مانند a را می‌توان به یکی از پنج صورت فوق نوشت.

مسئله ۱ : اگر $m \in \mathbb{Z}$ نشان دهید که m را به یکی از دو صورت $۲k$ یا $۲k+۱$ (زوج یا فرد) می‌توان نوشت.

حل : کافی است m را بر ۲ تقسیم کنیم؛ در این صورت طبق قضیهٔ تقسیم خواهیم داشت :

$$m = ۲k + r \;,\; ۰ \leq r < ۲ \Rightarrow m = ۲k \text{ یا } m = ۲k + ۱$$

مسئله ۲ : ثابت کنید اگر $p>۳$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p=۶k+۱$ یا $p=۶k+۵$ نوشته می‌شود.

حل : کافی است p را بر ۶ تقسیم کنیم، در این صورت طبق قضیهٔ تقسیم خواهیم داشت :

$p=۶k$ (۱)

$p=۶k+۱$ (۲)

$p=۶k+۲$ (۳)

$p=۶k+۳$ (۴)

$p=۶k+۴$ (۵)

$p=۶k+۵$ (۶)

p در حالت (۱)، (۳) و (۵) زوج است و لذا با اول بودنِ آن تناقض دارد. در حالت (۴) و با فاکتورگیری از ۳ داریم :

$p=۳(۲k+۱)$

یا $p=۳k'$ یا $۳|p$ که با اول بودن p در تناقض است و لذا فقط حالت‌های (۲) و (۶) باقی می‌ماند و حکم اثبات می‌شود.

(توجه دارید که عکس مطلب فوق در حالت کلّی برقرار نیست؛ مثلاً $(۲۵ = ۶\times۴+۱)$ ولی ۲۵ اول نیست.)

مسئله۳ : ابتدا ثابت کنید که هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $۴k+۱$ یا $۴k+۳$ نوشته می‌شود، سپس نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل $(۸t+۱)$ نوشته می‌شود (باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است.)

حل : فرض کنیم $a\in\mathbb{Z}$ و a فرد باشد، اگر a را بر ۴ تقسیم کنیم خواهیم داشت :

$a=۴k$ (۱)

$a=۴k+۱$ (۲)

$a=۴k+۲$ (۳)

$a=۴k+۳$ (۴)

(چهار مجموعهٔ $A_۱=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=۴k\}$ و $A_۲=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=۴k+۱\}$ و $A_۳=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=۴k+۲\}$ و $A_۴=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,a=۴k+۳\}$ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را افراز می‌کنند.)

حالت‌های (۱) و (۳) زوج بوده و لذا $a=۴k+۱$ یا $a=۴k+۳$

اگر $a=۴k+۱ \Rightarrow a^۲=۱۶k^۲+۸k+۱=۸\,(\underbrace{۲k^۲+k}_{k'})+۱=۸k'+۱$

اگر $a=۴k+۳ \Rightarrow a^۲=۱۶k^۲+۲۴k+۹=۱۶k^۲+۲۴k+۸+۱$

$\Rightarrow a^۲=۸(\underbrace{۲k^۲+۳k+۱}_{t})+۱=۸t+۱$

تمرین

۱ فرض می‌کنیم $ab=cd$ (a , b , c و d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطهٔ عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

۲ ثابت کنید : اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

۳ اگر $a>۱$ و $a|۹k+۴$ و $a|۵k+۳$، ثابت کنید a عددی اول است.

۴ اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به‌طوری‌که $۵|۴k+۱$، ثابت کنید : $۲۵|۱۶k^۲+۲۸k+۶$

۵ آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c|b+d$؟

۶ ثابت کنید : الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.

(**راهنمایی :** فرض کنید $d=(m\ ,\ m+۱)$ و ثابت کنید $d|۱$ و نتیجه بگیرید $d=۱$).

۷ اگر $p\neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p, q)=۱$.

۸ اگر $m,n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$ ثابت کنید :

$m\leq n\,,\,a|b \Rightarrow a^m|b^n$

۹ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به‌ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

۱۰ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+۲$ در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(a^۲+b^۲+۳)$ بر ۸ را بیابید.

۱۱ اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $۳|n^۳-n$

(**راهنمایی :** برای n سه حالت $n=۳k$ و $n=۳k+۱$ و ... در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $۳|n^۳-n$).

۱۲ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسومٌ‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

۱۳ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+۲$ یا $a+۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۴ ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

۱۵ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر $!۳$ بخش‌پذیر است.

۱۶ حاصل هر یک را به دست آورید : $(m \in \mathbb{Z})$

الف) $\left([m^۲, m], m^۵\right)$

ب) $(۲m, ۶m^۳)$

پ) $(۳m+۱, ۳m+۲)$

ت) $\left[m^۷, (m^۲, m^۳)\right]$

ث) $\left[(۷۲, ۴۸), ۱۲۰\right]$

پاسخ تمرینهای صفحه ۱۶ کتاب

۱ فرض می‌کنیم $ab = cd$ (a , b , c و d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطهٔ عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

$$a|cd \;,\; b|cd \;,\; c|ab \;,\; d|ab \;,\; ab|cd$$

۲ ثابت کنید : اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

$$a|b \xrightarrow{\text{ویژگی ۱}} a|(-۱)\times b \Rightarrow a|-b$$

$$-a|a \;,\; a|b \xrightarrow{\text{ویژگی ۲ تعدی}} -a|b$$

$$a|b \Rightarrow (-۱)a|(-۱)b \Rightarrow -a|-b$$

۳ اگر $a>۱$ و $a|۹k+۴$ و $a|۵k+۳$، ثابت کنید a عددی اول است.

$$\left.\begin{array}{l} a|۹k+۴ \xrightarrow{\text{راست}\times ۵} a|۴۵k+۲۰ \\ a|۵k+۳ \xrightarrow{\text{راست}\times ۹} a|۴۵k+۲۷ \end{array}\right\} \Rightarrow a|(۴۵k+۲۷)-(۴۵k+۲۰) \Rightarrow a|۷ \xrightarrow{a>۱} a=۷ \Rightarrow \text{a عددی اول است}$$

۴ اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به‌طوری‌که $۵|۴k+۱$، ثابت کنید : $۲۵|۱۶k^۲+۲۸k+۶$

$$\left.\begin{array}{l} ۵|۴k+۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲۵|۱۶k^۲+۸k+۱ \\ \xrightarrow{\times ۵} ۲۵|۲۰k+۵ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} ۲۵|۱۶k^۲+۲۸k+۶$$

۵ آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c|b+d$؟

خیر، به طور مثال $۳|۳$ و $۲|۴$ ولی $۳+۴ \nmid ۳+۲$.

۶ ثابت کنید : الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند.

$$\text{فرض می‌کنیم}: m\in\mathbb{Z}\,,\ (m,m+1)=d \Rightarrow d|m \wedge d|m+1 \xrightarrow{\text{تفریق}} d|(m+1)-m \Rightarrow d|1 \xrightarrow{d>0} d=1$$

ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.

$$\text{فرض می‌کنیم}: k\in\mathbb{Z}\,,\ (2k+1\,,\,2k+3)=d \Rightarrow d|2k+1 \wedge d|2k+3 \xrightarrow{\text{تفریق}} d|(2k+3)-(2k+1)$$

$$\Rightarrow d|2 \xrightarrow{\text{فرد بودن } d} d=1$$

۷ اگر $p\neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p,q)=1$.

برهان خلف: فرض می‌کنیم $(p,q)=d$ و $d\neq 1$ باشد بنابراین:

$$d|p \wedge d|q \xrightarrow{d\neq 1} d=p \wedge d=q \Rightarrow p=q \quad \text{تناقض}$$

۸ اگر $m,n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$ ثابت کنید : $m\le n\,,\ a|b \Rightarrow a^m|b^n$

$$a|b \xrightarrow{\text{توان } m} a^m|b^m \xrightarrow{\text{سمت راست} \times b^{n-m}} a^m|b^m\times b^{n-m} \Rightarrow a^m|b^n$$

۹ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و۸ به‌ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

$$a=7k+5 \xrightarrow{\times 8} 8a=56k+40$$

$$a=8k'+7 \xrightarrow{\times 7} 7a=56k'+49$$

$$\xrightarrow{\text{تفریق}} a=56k-56k'-9$$

$$\xrightarrow{-9=-56+47} a=56k-56k'-56+47$$

$$\Rightarrow a=56\underbrace{(k-k'-1)}_{q}+47 \Rightarrow \quad r=47 \text{ باقیمانده}$$

۱۰ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+2$ در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد (a^2+b^2+3) بر ۸ را بیابید.

$$\text{فرض می‌کنیم}: n\in\mathbb{Z}\,,\ a=2n+1 \xrightarrow{b|a+2} b|2n+3 \Rightarrow b \text{ عددی فرد است} \Rightarrow b=2m+1\ ,\ m\in\mathbb{Z}$$

$$a^2+b^2+3=(2n+1)^2+(2m+1)^2+3=4n^2+4n+1+4m^2+4m+1+3$$

$$=4\underbrace{n(n+1)}_{2k}+4\underbrace{m(m+1)}_{2k'}+5=8k+8k'+5=8\underbrace{(k+k')}_{q}+5 \Rightarrow r=5$$

۱۱ اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $3|n^3-n$

$n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)$

اگر $n=3k \Rightarrow n^3-n=3\underbrace{k(3k-1)(3k+1)}_{q} \Rightarrow 3|n^3-n$

اگر $n=3k+1 \Rightarrow n^3-n=(3k+1)(3k)(3k+2)=3\underbrace{k(3k+1)(3k+2)}_{q'} \Rightarrow 3|n^3-n$

اگر $n=3k+2 \Rightarrow n^3-n=(3k+2)(3k+1)\underbrace{(3k+3)}_{3(k+1)}=3\underbrace{(k+1)(3k+2)(3k+1)}_{q''} \Rightarrow 3|n^3-n$

بنابراین در هر حالت نشان دادیم $3|n^3-n$.

۱۲ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسومٌ‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

با فرض $a=bq+r$ داریم :

$$\left.\begin{array}{l} n|a \\ n|b \Rightarrow n|bq \end{array}\right\} \Rightarrow n|a-bq \xrightarrow{a-bq=r} n|r$$

۱۳ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

برای هر عدد صحیح دلخواه a یکی از سه حالت زیر وجود دارد :

حالت اول: $a=3k \Rightarrow 3|a$

حالت دوم: $a=3k+1 \Rightarrow a+2=3k+3 \Rightarrow a+2=3(k+1) \Rightarrow 3|a+2$

حالت سوم: $a=3k+2 \Rightarrow a+4=3k+6 \Rightarrow a+4=3(k+2) \Rightarrow 3|a+4$

بنابراین همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش پذیرند.

۱۴ ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

با فرض $n \in \mathbb{Z}$ ، دو عدد صحیح متوالی را به صورت n و $n+1$ در نظر می گیریم :

$(n+1)^3-n^3=\cancel{n^3}+3n^2+3n+1-\cancel{n^3}=3\underbrace{n(n+1)}_{2k}+1=2\underbrace{(3k)}_{q}+1 \Rightarrow$ عدد فرد است.

۱۵ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر !۳ بخش‌پذیر است.

اعداد صحیح متوالی را به صورت $n+1$ و n و $n-1$ در نظر میگیریم که حاصلضرب آن ها n^3-n خواهد شد و قبلاً (تمرین ۱۱) نشان دادیم که $3|n^3-n$، پس n^3-n بر ۳ بخش پذیر است.

ازطرفی حاصلضرب هر دو عدد صحیح متوالی، مضرب ۲ است پس حاصلضرب سه عدد صحیح متوالی، بر ۲ بخش پذیر است.

بنابراین n^3-n بر ۶ یعنی $3!$ بخش پذیر است، در نتیجه $3!|n^3-n$.

۱۶ حاصل هر یک را به دست آورید : $(m \in \mathbb{Z})$

الف) $\left([m^۲ , m] , m^۵\right)$

$$(\underbrace{[m^۲ , m]}_{m^۲} , m^۵) = (m^۲ , m^۵) = m^۲ \quad , m \neq ۰$$

ب) $(۲m , ۶m^۳)$

$$(۲m , ۶m^۳) = ۲|m| \quad , \quad m \neq ۰$$

(توجه داشته باشیم که $۲m | ۶m^۳$)

پ) $(۳m + ۱ , ۳m + ۲)$

$$(۳m+۱ , ۳m+۲) = ۱$$

(توجه داشته باشیم که $۳m+۱$, $۳m+۲$ دو عدد متوالی هستند)

ت) $\left[m^۷ , (m^۲ , m^۳)\right]$

$$[m^۷ , \underbrace{(m^۲ , m^۳)}_{m^۲}] = [m^۷ , m^۲] = |m^۷| \quad , m \neq ۰$$

ث) $\left[(۷۲ , ۴۸) , ۱۲۰\right]$

$$[\underbrace{(۷۲ , ۴۸)}_{۲۴} , ۱۲۰] = [۲۴ , ۱۲۰] = ۱۲۰$$

(توجه داشته باشیم که $۲۴ | ۱۲۰$)

نویسنده پاسخ ها : افشین ملاسعیدی

شهرستان : آبادان

هزینه این فایل : قرائت صلوات جهت سلامتی
مُنجی عالم بشریت ، قُطب دایره امکان (عج)

عزیزان می توانند به محض آماده شدن دیگر
فایل ها به وبلاگ مراجعه نموده و دانلود کنند .

آدرس وبلاگ: sinxcosx.blogfa.com

همچنین در صورت مشاهده اشتباه در محاسبه و پاسخ
ها بنده را از طریق شماره ۰۹۱۶۸۳۲۴۵۰۰ مطلع سازید .

سپاسگزارم